سلسلة المسائل المحلولة شوم

3000 مسألة محلولة في

الجبر الخطي



سايمور لبشوتز

ترجمة

د. علي مصطفى بن الأشهر

أكاديميا

أكاديميا هي العلامة التجارية لأكاديميا إنترناشيونال للنشر والطباعة

ACADEMIA is the Trade Mark of Academia International
for Publishing and Printing

3000 مسألة محلولة في الجبر الخطي
Schaum's 3000 Solved Problems in Linear Algebra

Academia International أكاديميا إنترناشيونال
P.O.Box 113-6669 ص.ب
Beirut, Lebanon بيروت، لبنان
Tel 800832-800811-862905 هاتف
Fax (009611) 805478 فاكس
E-mail: academia@dm.net.lb بريد إلكتروني

إلى الطالب

تغطي هذه المجموعة، المتكوّنة من آلاف الأسئلة المحلولة، كل أنواع المسائل تقريباً التي قد تظهر في أي مقرّر للجبر الخطي. كما أنها تضم مسائل حسابية ومسائل نظرية (تقتضي براهين).

يُستهلُّ كل قسم بمسائل ابتدائية تزداد صعوبتها مع التقدّم في القسم. وتظهر المسائل النظرية التي تقتضي براهين بعد المسائل الحسابية، التي قد تسلّط الضوء على النظرية (فمعظم الطلاب يجدون صعوبة في البراهين).

يكون لدى الطلاب عادة كتاب مدرسي مخصص لمقرر الجبر الخطي. ولذلك يتبع تسلسِلُ الفصولِ الترتيب المعتاد في معظم الكتب المدرسية (رغم أنه قد يكون هناك بعض التفاوت). غير أن فصولنا وأقسامنا كتبت بحيث يمكن تغيير ترتيبها، كلما كان ذلك محتملاً، دون صعوبة أو دون انقطاع التواصل.

يتبع حل كل مسألة بيان المسألة على الفور. لكنك قد ترغب في حلّ المسألة بنفسك قبل أن تقرأ الحل المعطى. بل ينبغي عليك في الواقع أن تحاول حل المسألة دون الرجوع إلى الكتاب بعد أن تقرأ الحلّ. وهكذا فإن كتاب «3000 مسألة محلولة في الجبر الخطي» هو بمثابة تكملة لأي مقرر في الجبر الخطي، أو بمثابة مقرّر مذاكرة مستقل».

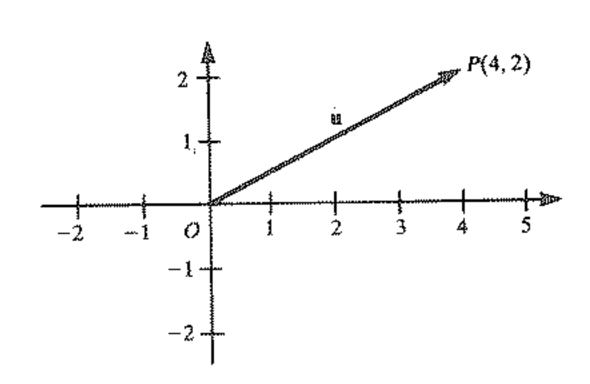
المحتويات

الفصل 1
المتجهات في R^n و C^n

1.1 المتجهات في R^n

1.1 يعرّف متجه u في الفضاء المتجهي R^n بأنه مجموعة مرتبة من n عدد حقيقي: $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. يسمى العدد الحقيقي a_k بالمركبة أو الاحداثية الكائية لـ u. قارن هذا بتعريف متجه في الفيزياء.

■ تعرّف الفيزياء متجه u بأنه كمية ذات مقدار وإتجاه، ممثلة بواسطة سهم أو قطعة مستقيمة موجهة تبدأ من نقطة مرجعية O. الشكل 1-1 يعرّف متجه مستوٍ u بواسطة إحداثيي نقطته الطرفية $P(4,2)$. أي أن $u = (4,2)$ وذلك وفق التعريف المذكور لمتجه في R^2.



شكل 1-1

2.1 أذكر الفرق بين متجه صفّي ومتجه عمودي.

■ المتجه العمودي u هو متجه رتبت مركباته راسياً:

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

أما المتجه الصفّي فهو متجه رتبت مركباته أفقياً، كما في المسألة 1.1. [في هذا الفصل، تكتب المتجهات عادة كمتجهات صفّية.]

3.1 إلى أي فضاء متجهي R^n ينتمي كل متجه؟

(أ) $(3, -2, 5, 8)$ (ب) $(3, 6+2i)$ (ج) $(\pi, 2, 5\pi)$

■ (أ) R^4، لوجود أربع مركبات. (ب) لا يوجد، نظراً لوجود مركبات غير حقيقية. (ج) R^3 [π و 5π عددان حقيقيان].

4.1 ليكن المتجهان u و v في R^n، متى يكون $u = v$؟

■ يتساوى المتجهان u و v إذا وفقط إذا تساوت المركبات المتقابلة.

5.1 لتكن $u_1 = (1,2,3)$، $u_2 = (2,3,1)$، $u_3 = (1,3,2)$، $u_4 = (2,3,1)$ متجهات في R^3. أذكر المتجهات المتساوية (إن وجدت).

■ المتجهان u_2 و u_4 فقط متساويا المركبات.

6.1 أوجد x و y إذا $(x,3) = (2, x+y)$.

■ بما أن المتجهين متساويان، فإن المركبات المتقابلة تكون متساوية: $x = 2$، $3 = x + y$. بالطرح، $y = 1$.

7.1 عرّف المتجه الصفري في R^n.

■ $\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ مركبة}}$

8.1 أوجد x و y إذا كان $u = (x + y, x - 3)$ المتجه الصفرى.

■ أولاً، نساوي مركبتي u بالصفر لنحصل على المعادلتين: $x + y = 0$، $x - 3 = 0$. المعادلة الأولى تعطينا $x = 3$؛ إذن، تعطى المعادلة الأولى $y = -3$.

9.1 عرّف السالب، $-u$ ، للمتجه $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ في $\mathbf{R}^n$.

■ $-u \equiv (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

10.1 أوجد السوالب لـ (أ) $u = (3, -5, -8, 4)$، (ب) $v = (-4, 2\pi, 0)$، (ج) $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$.

■ (أ) $-u = (-3, -(-5), -(-8), -4) = (-3, 5, 8, -4)$ ؛ (ب) $-v = (4, -2\pi, 0)$ ؛
(ج) $-\mathbf{0} = (-0, -0, -0, -0) = (0,0,0,0) = \mathbf{0}$.

11.1 اثبت أن $-(-u) = u$ من أجل أي متجه في $\mathbf{R}^n$.

■ ليكن $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. بما أن $-(-a) = a$ من أجل أي سلمى a في $\mathbf{R}$، إذن:

$$-(-u) = -(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = u$$

2.1 جمع المتجهات وضربها في سلميات

12.1 ليكن $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ متجهين في $\mathbf{R}^n$. إذن، المجموع $u + v$ هو المتجه

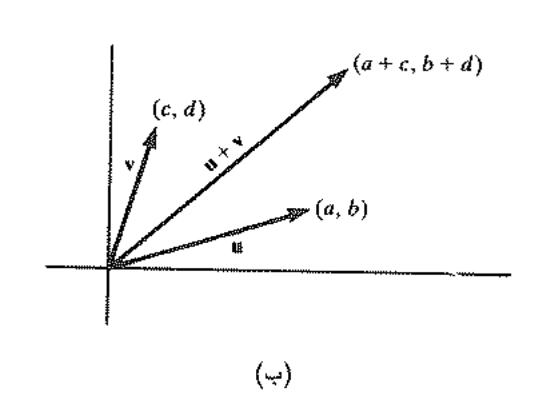
$$u + v \equiv (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

بين أن هذا التعريف يتوافق مع جمع المتجهات في الفيزياء.

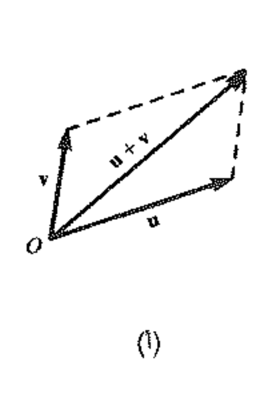
■ في الفيزياء، المتجه $\mathbf{u + v}$ هو قطر متوازي الأضلاع المكون من المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، كما يوضحه الشكل 1-2 (أ). الآن، لتكن O نقطة الأصل لمنظومة إحداثية (في $\mathbf{R}^2$)، ولنفترض أن (a,b) و (c,d) نقطتا الطرف للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ على الترتيب، كما في الشكل 1-2 (ب). إذن، وباستخدام الهندسة، يمكن أن نبين أن $(a + c, b + d)$ هي نقطة الطرف للمتجه $\mathbf{u + v}$. من جهة أخرى، بجمع المركبات المتقابلة، نحصل على

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

تعريفا الجمع يعطيان كلاهما نفس النتيجة.



(ب)



(أ)

شكل 1-2

إحسب (أ) $(3, -4, 5, -6) + (1, 1, -2, 4)$، (ب) $(1, 2, -3) + (4, -5)$.

■ (أ) نجمع المركبات المتقابلة:

$$(3,-4,5,-6) + (1,1,-2,4) = (3+1, -4+1, 5-2, -6+4) = (4,-3,3,-2)$$

(ب) إن المجموع غير معرّفٍ؛ لأن المتجهين ليس لهما نفس عدد المركبات.

14.1 احسب: (أ) $\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

■ (أ) نجمع المركبات المتقابلة:

$$\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-3\\-4-1\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix}$$

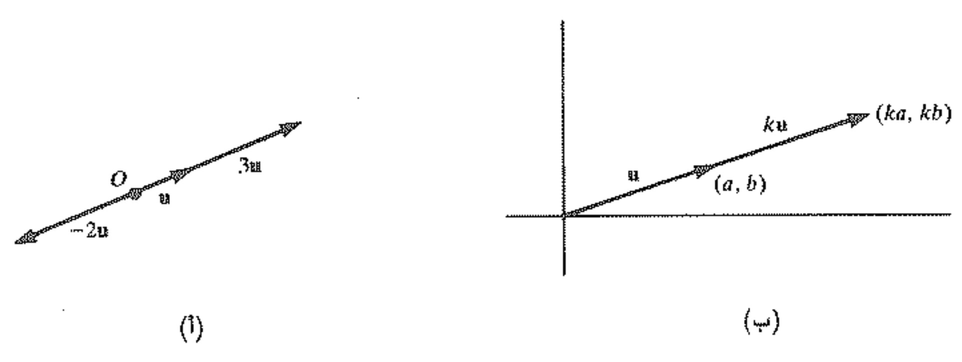
(ب) إن المجموع ليس محدداً، إذ انّ عدد مركبات المتجهين مختلف.

15.1 ليكن $u = (u_1,u_2,...,u_n)$ أي متجه في $\mathbf{R}^n$ وليكن k أي سلمى [عدد حقيقي] في $\mathbf{R}$. إذن، الجداء [السلمى] ku هو المتجه

$$ku \equiv (ku_1,ku_2,..., ku_n)$$

بين كيف يتوافق هذا التعريف مع الضرب السلمي للمتجهات في الفيزياء.

■ تعرّف الفيزياء جداء عدد حقيقي k ومتجهٍ [سهم] u، مثلاً بنقطة مرجعية O، بأنه المتجه (i) الذي يكون مقداره مساويا لمقدار u مضروبا في |k| : (ii) واتجاهه هو اتجاه u إذا $k\geqslant0$، ومضاد له إذا $k<0$. شكل 1-3 (أ) لإيضاح ذلك. نختار الآن O كنقطة الأصل لمنظومة إحداثية [لـ $\mathbf{R}^2$]، ولنفترض أن (a,b) النقطة الطرفية لـ u، كما هو موضح في شكل 1-3 (ب). إذن، باستخدام الهندسة، يمكن أن نبين بسهولة أن ku هو (ka,kb). من جهة أخرى، يعطى تعريفنا $k(a,b) = (ka,kb)$، نفس النتيجة.



شكل 1-3

16.1 احسب: (أ) $-3(4,-5,-6)$، (ب) $-(6,7,-8)$.

■ (أ) إضرب كل مركبة في العدد السلمي: $-3(4,-5,-6) = (-12,15,18)$. (ب) إما أن تضرب كل مركبة في -1 أو تأخذ سالب كل مركبة: في الحالتين تحصل على $(6,-7,8)$.

17.1 إحسب: (أ) $5\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$، (ب) $-2\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$.

■ إضرب كل مركبة في العدد السلّمي:

(أ) $5\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\15\\20\end{pmatrix}$، (ب) $-2\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\10\end{pmatrix}$

18.1 عرّف الفرق، $u-v$، للمتجهين u و v في $\mathbf{R}^n$.

■ نحصل على الفرق بإضافة السالب: $u - v \equiv u + (-v)$.

19.1 إحسب: (أ) $(3,-5,6,8)-(4,1,-7,9)$، (ب) $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

■ أوجد أولاً سالب المتجه الثاني ثم إجمع:

(أ) $(3,-5,6,8)-(4,1,-7,9)=(3,-5,6,8)+(-4,-1,7,-9)=(-1,-6,13,-1)$.

(ب) $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

20.1 لتكن $u=(2,-7,1)$، $v=(-3,0,4)$، $w=(0,5,-8)$. أوجد (أ) $3u-4v$، (ب) $2u+3v-5w$.

■ انجز الضرب السلمي أولاً ثم الجمع المتجهي.

(أ) $3u-4v=3(2,-7,1)-4(-3,0,4)=(6,-21,3)+(12,0,-16)=(18,-21,-13)$.

(ب) $2u+3v-5w=2(2,-7,1)+3(-3,0,4)-5(0,5,-8)$

$=(4,-14,2)+(-9,0,12)+(0,-25,40)$

$=(4-9+0,-14+0-25,2+12+40)=(-5,-39,54)$

21.1 لتكن $u=(3,-2,1,4)$ و $v=(7,1,-3,6)$ في $\mathbf{R}^4$. أوجد (أ) $u+v$، (ب) $4u$، (ج) $2u-3v$.

■ (أ) $u+v=(3+7,-2+1,1-3,4+6)=(10,-1,-2,10)$؛ (ب) $4u=(4.3,4.(-2),4.1,4.4)=(12,-8,4,16)$؛

(ج) $2u-3v=(6,-4,2,8)+(-21,-3,9,-18)=(-15,-7,11,-10)$.

22.1 أوجد x و y إذا $(4,y)=x(2,3)$.

■ (i) نضرب في العدد السلمي x للحصول على $(4,y)=x(2,3)=(2x,3x)$. (ii) نساوي بين المركبات المتقابلة: $4=2x$، $y=3x$. (iii) نحل المعادلتين الخطيتين من أجل x و y: $x=2$ و $y=6$.

23.1 اكتب $w=(1,9)$ كتركيبة خطية للمتجهين $u=(1,2)$ و $v=(3,-1)$.

■ نريد إيجاد عددين سلميين x و y بحيث أن $w=xu+yv$؛ أي أن

$(1,9)=x(1,2)+y(3,-1)=(x,2x)+(3y,-y)=(x+3y,2x-y)$

المساواة بين المركبتين المتقابلتين تعطي المعادلتين

$x+3y=1 \qquad 2x-y=9$

لحل منظومة المعادلتين، نضرب المعادلة الأولى في -2 ثم نضيفها إلى المعادلة الثانية لنحصل على $-7y=7$ أو $y=-1$. ثم نعوض بـ $y=-1$ في المعادلة الأولى للحصول على $x-3=1$، أو $x=4$. وبذلك يكون لدينا $w=4u-v$.

24.1 اكتب $v=(2,-3,4)$ كتركيبة خطية للمتجهات $u_1=(1,1,1)$، $u_2=(1,1,0)$، $u_3=(1,0,0)$.

■ إتبع خطوات المسألة 23.1، مستخدما الترميزات العمودية هذه المرة.

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y\\x\end{pmatrix}$$

الآن، ساوِ بين المركبات المتقابلة كل منها للأخرى:

$x+y+z=2 \qquad x+y=-3 \qquad x=4$

لحل منظومة المعادلات، نعوض بـ $x=4$ في المعادلة الثانية لنحصل على $4+y=-3$، أو $y=-7$، ثم نعوض في المعادلة الأولى لنجد $z=5$. وبذلك تكون $v=4u_1-7u_2+5u_3$.

25.1 اكتب $w=(1,2,-5)$ كتركيبة خطية للمتجهات $u_1=(1,-1,-1)$، $u_2=(2,1,4)$ و $u_3=(1,1,3)$.

■ أولاً، نضرب في السلّميات x,y,z، ثم نجمع:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+z\\-x+y+z\\-x+4y+3z\end{pmatrix}$$

ثم نساوي بين المركبات المتقابلة لنحصل على المنظومة:

$$x + 2y + z = 1 \qquad -x + y + z = 2 \qquad -x + 4y + 3z = -5$$

نضيف المعادلة الأولى إلى المعادلة الثانية لنحصل على $3y + 2z = 3$ (i). الآن، أضف المعادلة الأولى إلى المعادلة الثالثة لنحصل على $6y + 4z = -4$، أو $3y + 2z = -2$ (ii). من الواضح أن المعادلتين (i) و (ii) غير متوافقتين. يعني هذا أن w ليست تركيبة خطية لـ u_1، u_2، u_3.

26.1 أثبت أن $(u + v) + w = u + (v + w)$.

■ من التعريف [المسألة 12.1] تكون $u_i + v_i$ المركبة رقم i لـ $u + v$ وبذلك تكون $(u_i + v_i) + w_i$ المركبة رقم i لـ $(u + v) + w$. من جهة أخرى، تكون $v_i + w_i$ المركبة i لـ $v + w$، وبذلك تكون $u_i + (v_i + w_i)$. المركبة i لـ $u + (v + w)$. ولكن u_i، v_i، w_i أعداد حقيقية يتحقق من أجلها قانون التجميع؛ أي أن

$$(u_i + v_i) + w_i = u_i + (v_i + w_i) \qquad (i = 1,...,n)$$

وبالتالي، $(u + v) + w = u + (v + w)$، لأن مركباتها المتقابلة متساوية.

27.1 أثبت أن $u + 0 = u$.

■ $$u + 0 = (u_1,u_2,...,u_n) + (0,0,...,0) = (u_1 + 0,u_2 + 0,...,u_n) = (u_1,u_2,...,u_n) = u$$

28.1 أثبت أن $u + (-u) = 0$.

■ $$u + (-u) = (u_1,u_2,...,) + (-u_1,-u_2,...,-u_n) = (u_1 - u_1,u_2 - u_2,...,u_n - u_n) = (0,0,...,0) = 0$$

29.1 أثبت أن $u + v = v + u$.

■ وفق التعريف [المسألة 12.1]، تكون $u_i + v_i$ المركبة i لـ $u + v$ وتكون $v_i + u_i$ المركبة i لـ $v + u$. ولكن u_i و v_i أعداد حقيقية يتحقق من أجلها قانون التبديل، أي أن

$$u_i + v_i = v_i + u_i \qquad (i = 1,...,n)$$

وبالتالي، $u + v = v + u$ نظراً لتساوي مركباتهما المتقابلة.

30.1 أثبت أن $k(u + v) = ku + kv$.

■ بما أن $u_i + v_i$ المركبة i لـ $u + v$، تكون $k(u_i + v_i)$ المركبة i لـ $k(u + v)$. بما أن ku_i و kv_i المركبتين i لـ ku و kv على الترتيب، تكون $ku_i + kv_i$ المركبة i لـ $ku + kv$. ولكن k، u_i، v_i أعداد حقيقية؛ إذن

$$k(u_i + v_i) = ku_i + kv_i \qquad (i = 1,...,n)$$

وبذلك، $k(u + v) = ku + kv$، نظراً لتساوي المركبات المتقابلة.

31.1 أثبت أن $(k + k')u = ku + k'u$.

■ وفق التعريف [المسألة 15.1]، تكون $(k + k')u_i$ المركبة i للمتجه $(k + k')u$. بما أن ku_i و $k'u_i$ المركبتان i لـ ku و k'u على الترتيب، تكون $ku_i + k'u_i$ المركبة i لـ $ku + k'u$. ولكن k، k'، u_i أعداد حقيقية؛ إذن

$$(k + k')u_i = ku_i + k'u_i \qquad (i = 1,...,n)$$

وبالتالي $(k + k')u = ku + k'u$، نظراً لتساوي المركبات المتقابلة.

32.1 أثبت أن $(kk')u = k(k'u)$.

■ بما أن $k'u_i$ المركبة i لـ $k'u$، تكون $k(k'u_i)$ المركبة i لـ $k(k'u)$. ولكن $(kk')u_i$ المركبة i لـ $(kk')u$، وبما أن k، 'k، u_i أعداد حقيقية، إذن

$$(kk')u_i = k(k'u_i) \qquad (i = 1,...,n)$$

وبالتالي $(kk')u = k(k'u)$، نظراً لتساوي المركبات المتقابلة.

33.1 اثبت أن $1.u = u$.

■ $1.u = 1(u_1,u_2,...,u_n) = (1u_1,1u_2,...,1u_n) = (u_1,u_2,...,u_n) = u$

34.1 اثبت أن $0u = \mathbf{0}$ من أجل أي متجه u.

■ **طريقة 1:** $0u = 0(u_1,u_2,...,u_n) = (0u_1,0u_2,...,0u_n) = (0,0,...,0) = \mathbf{0}$.

طريقة 2: من التعريف 31.1، $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. بإضافة $-(0u)$ للطرفين نحصل على

$$0v + (-(0v)) = (0v + 0v) + (-(0v))$$

$$\mathbf{0} = 0v + (0v) + (-(0v))) \quad \text{[بواسطة المسألتين 28.1 و 26.1)]}$$

$$\mathbf{0} = 0v + \mathbf{0} \quad \text{[بواسطة المسألة 28.1]}$$

$$\mathbf{0} = 0v \quad \text{[بواسطة المسألة 27.1]}$$

[لاحظ أن الطريقة 2، رغم طولها، لا تستخدم الإحداثيات صراحة).

35.1 اثبت أن $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ من أجل أي سلّمي k.

■ **طريقة 1:** $k\mathbf{0} = k(0,0,...,0) = (k.0,k.0,...k.0) = (0,0,...,0) = \mathbf{0}$.

طريقة 2: من المسألة 34.1، $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. إذن، وبواسطة المسألة 31.1، $k\mathbf{0} = k(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k\mathbf{0} + k\mathbf{0}$. نضيف $-(k\mathbf{0})$ إلى الطرفين، فنجد النتيجة المطلوبة، كما في المسألة 34.1.

36.1 بيّن أن $(-1)u = -u$.

■ من الخواص التي سبق إثباتها، نجد

$$u + (-u) = \mathbf{0} = 0u = (1 + (-1))u = 1u + (-1)u = u + (-1)u$$

وهذا يقود إلى النتيجة بإضافة $-u$ إلى الطرفين.

3.1 رمز التجميع

37.1 ليكن $f(k)$ تعبيراً جبرياً يتضمن عدداً صحيحاً متغيراً. عرّف التعبير

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

حيث $n \geqslant 1$. [هنا، يسمى 1 النهاية الدنيا، n النهاية العليا، والحرف الإغريقي سيغما يعمل كرمز للتجميع].

■ $S_n = f(1) + f(2) +...+f(n-1) + f(n)$. يتضح من هذا التعريف أنه من أجل $n \geqslant 2$، $S_n = S_{n-1} + f(n)$.

38.1 لنفترض أن n_1 و n_2 عددان صحيحان بحيث أن $n_1 \leqslant n_2$. عرّف $\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k)$.

■ $\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k) = f(n_1) + f(n_1+1) + f(n_1+2) + \cdots + f(n_2)$ من أجل $n_2 < n_1$، يعرّف المجموع عادة بأنه صفر.

39.1 إحسب $\sum_{k=1}^{4} k^3$.

■ $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$.

40.1 إحسب $\sum_{j=2}^{5} j^2$.

■ $\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$.

41.1 أوجد $\sum_{k=1}^{5} x_k$.

■ $\sum_{k=1}^{5} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

42.1 أعد الكتابة بدون استخدام رمز التجميع:

(أ) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ، (ب) $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ، (ج) $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

■ (أ) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ (ب) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ (ج) $a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$.

43.1 أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$.

■ يكون البرهان باستقراء من أجل n. لدينا من أجل $n = 1$،

$$\sum_{k=1}^{1} [f(k) + g(k)] = f(1) + g(1) = \sum_{k=1}^{1} f(k) + \sum_{k=1}^{1} g(k)$$

لنفترض أن $n > 1$، وأن المبرهنة تتحقق من أجل $n - 1$؛ أي أن

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$$

إذن (أنظر المسألة 37.1)،

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) + g(k)] + [f(n) + g(n)] = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) + f(n) + g(n)$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n)\right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} g(k) + g(n)\right] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$$

وبذلك يتم إثبات المبرهنة.

44.1 أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} c\, f(k) = c \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

■ البرهان يتبع مباشرة من قانون التوزيع للأعداد الحقيقية، $a(b + c + \ldots) = ab + ac + \ldots$.

4.1 الجداء النقطي (الداخلي)

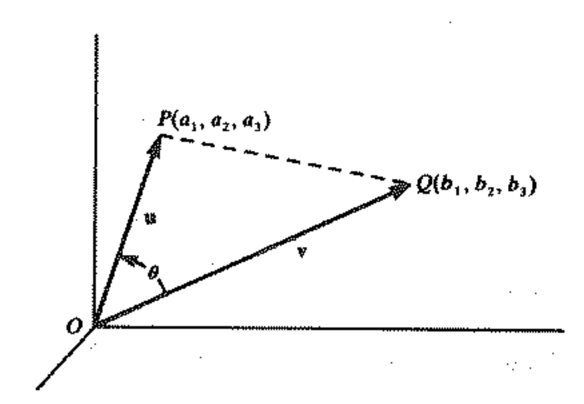
45.1 لنفترض أن $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ متجهان في $\mathbf{R}^n$. يعرّف الجداء النقطي [أو الداخلي أو السلّمي] لـ u، v، والذي يرمز له بـ u.v، بأنه العدد السلّمي المتحصل عليه بضرب المركبات المتقابلة وجمع الجداءات الناتجة:

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

بيّن كيف يتوافق هذا التعريف مع ذلك المستخدم في الفيزياء.

■ لنفترض أن u و v متجهان (سهمان) في R^3 يبدءان من نقطة الأصل O، كما موضح في الشكل 1-4. بالإضافة إلى ذلك، نفترض أن $P(a_1,a_2,a_3)$ و $Q(b_1,b_2,b_3)$ نقطتا الطرف لـ u و v على الترتيب، ولتكن θ الزاوية بين u و v. تعرّف الفيزياء الجداء النقطي بأنه

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$$



شكل 1-4

الآن $|\mathbf{u}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ ، $|\mathbf{v}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$

و

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\sum_{k=1}^{3}u_kv_k\end{aligned}$$

ولكن، بواسطة قانون الجيوب، $\overline{PQ}^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$ ؛ وبالتالي، $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta=\sum_{k=1}^{3}u_kv_k$ ، ويتوافق التعريفان.

46.1 إحسب u.v، حيث $u=(2,-3,6)$ و $v=(8,2,-3)$.

■ إضرب المركبات المتقابلة ثم إجمع: $u.v=(2)(8)+(-3)(2)+(6)(-3)=-8$.

47.1 إحسب u.v، حيث $u=(1,-8,0,5)$ و $v=(3,6,4)$.

■ الجداء النقطي غير معرّف بين متجهين مختلفين في عدد المركبات.

48.1 إحسب u.v حيث $u=(3,-5,2,1)$ و $v=(4,1,-2,5)$.

■ نضرب المركبات المتقابلة ثم نجمع: $u.v=(3)(4)+(-5)(1)+(2)(-2)+(1)(5)=8$.

49.1 إحسب u.v حيث $u=(1,-2,3,-4)$ و $v=(6,7,1,-2)$.

■ نضرب المركبات المتقابلة ثم نجمع: $u.v=(1)(6)+(-2)(7)+(3)(1)+(-4)(-2)=3$.

50.1 لتكن $u=(3,2,1)$، $v=(5,-3,4)$، $w=(1,6,-7)$. أوجد: (أ) $(u+v).w$ (ب) $u.w+v.w$.

■ (أ) نحسب u + v أولاً، بجمع المركبات المتقابلة: $u+v=(3+5,2-3,1+4)=(8,-1,5)$. ثم نحسب الجداء النقطي $(u+v).w$ بضرب المركبات المتقابلة والجمع: $(u+v).w=(8)(1)+(-1)(6)+(5)(-7)=-33$. (ب) نحسب أولاً $u.v=3+12-7=8$ و $v.w=5-18-28=-41$. إذن $u.w+v.w=8-41=-33$. [أنظر مسألة 52.1، من أجل توضيح للتوافق بين (أ) و (ب)].

51.1 لتكن $u=(1,2,3,-4)$، $v=(5,-6,7,8)$؛ و $k=3$. أوجد (أ) $k(u.v)$، (ب) $(ku).v$، (ج) $u.(kv)$.

■ (أ) نوجد أولاً $u.v = 5 - 12 + 21 - 32 = -18$، ثم $k(u.v) = 3(-18) = -54$. (ب) نوجد أولاً $ku = (3(1), 3(2), 3(3), 3(-4)) = (3, 6, 9, -12)$. ثم نحسب

$$(ku).v = (3)(5) + (6)(-6) + (9)(7) + (-12)(8) = 15 - 36 + 63 - 96 = -54$$

(ج) نحسب أولاً $kv = (15, -18, 21, 24)$. ثم نحسب

$$u.(kv) = (1)(15) + (2)(-18) + (3)(21) + (-4)(24) = 15 - 36 + 63 - 96 = -54$$

[أنظر مسألتي 53.1 و 54.1].

52.1 اثبت أن $(u + v).w = u.w + v.w$.

■ نجد، باستخدام مسألة 43.1، أن

$$(u+v)\cdot w = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = u \cdot w + v \cdot w$$

53.1 أثبت أن $(ku).v = k(u.v)$.

■ نستخدم المسألة 44.1، إذن

$$(ku)\cdot v = \sum_{i=1}^{n} (ku_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} k(u_i v_i) = k \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = k(u \cdot v)$$

54.1 أثبت أن $u.v = v.u$.

■ $$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = v \cdot u$$

55.1 اثبت أن $u.u \geqslant 0$، وأن $u.u = 0$ إذا وفقط إذا $u = \mathbf{0}$.

■ بما أن u_i^2 غير سالب من أجل كل i. إذن $u.u = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 \geqslant 0$. كما أن $u.u = 0$ إذا وفقط إذا $u_i = 0$ من أجل كل i؛ أي أن $u = \mathbf{0}$.

في المسألتين 56.1 و 57.1، u_i ترمز للمتجه رقم i في مجموعة متجهات (وليست المركبة رقم i لمتجه u).

56.1 لتكن $u_1, u_2, \ldots, u_p$ و v متجهات في $\mathbf{R}^n$، ولتكن $a_1, a_2, \ldots, a_p$ سلَّميات في $\mathbf{R}$. اثبت أن

(أ) $\left(\sum_{k=1}^{p} a_k u_k\right) \cdot v = \sum_{k=1}^{p} a_k (u_k \cdot v)$ (ب) $v \cdot \left(\sum_{k=1}^{k} a_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{k} a_k (v \cdot u_k)$

نعبر عن ذلك بالقول أن حساب الجداء النقطي بالنسبة إلى متجه ثابت v يمثل تحويلاً خطياً في $\mathbf{R}^n$.

■ (أ) يكون البرهان بالاستقراء من أجل p. الحالة $p = 1$ صحيحة، بواسطة المسألة 53.1. لنفترض أن $p > 1$ وأن المبرهنة صحيحة من أجل $p - 1$؛ أي أن

$$\left(\sum_{k=1}^{p-1} a_k u_k\right) \cdot v = \sum_{k=1}^{p-1} a_k (u_k \cdot v)$$

إذن، باستخدام المسائل 37.1 و 52.1 و 53.1 والفرضية الاستقرائية أعلاه، يكون لدينا

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k u_k\right) \cdot v = \left(\sum_{k=1}^{p-1} a_k u_k\right) \cdot v + (a_p u_p) \cdot v = \sum_{k=1}^{p-1} a_k (u_k \cdot v) + a_p (u_p \cdot v) = \sum_{k=1}^{p} a_k (u_k \cdot v)$$

(ب) نستخدم $u.v = v.u$ [المسألة 54.1] والجزء (أ)، نجد أن

$$v \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} a_k u_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k u_k\right) \cdot v = \sum_{k=1}^{p} a_k (u_k \cdot v) = \sum_{k=1}^{p} a_k (v \cdot u_k)$$

57.1 لتكن $u_1,u_2,\ldots,u_p,v_1,v_2,\ldots,v_q$ متجهات في $\mathbf{R}^n$، ولتكن $a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_q$ أي سلّميات في $\mathbf{R}$. اثبت أن

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{q} b_k v_k\right)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_j b_k (u_j\cdot v_k)$$

(خطائية الجداء الداخلي)

■ باستخدام المسالة 56.1:

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{q} b_k v_k\right)=\sum_{j=1}^{p} a_j\left[u_j\cdot\left(\sum_{k=1}^{q} b_k v_k\right)\right]=\sum_{j=1}^{p} a_j\left[\sum_{k=1}^{q} b_k (u_j\cdot v_k)\right]=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_j b_k (u_j\cdot v_k)$$

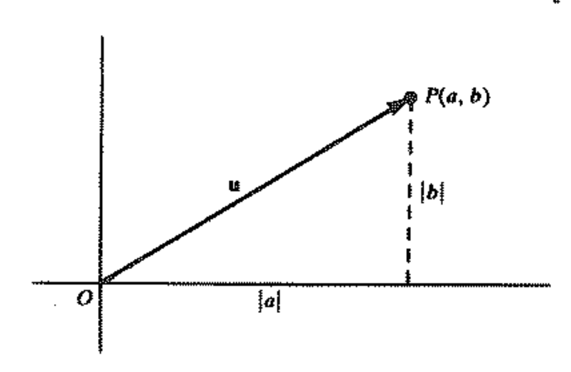
5.1 التظليم((الطول) في $\mathbf{R}^n$

58.1 إذا كان $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ متجهاً في $\mathbf{R}^n$ فإن نظيم أو طول u، والذي نرمز له بـ $\|u\|$، هو الجذر التربيعي غير السالب لـ u.u:

$$\|u\|=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

بيّن أن تعريف النظيم أعلاه يتوافق مع تعريف الطول لمتجه [سهم] في الفيزياء.

■ ليكن u متجهاً [سهما] في $\mathbf{R}^2$ بنقطة طرفية $P(a,b)$، كما موضح في شكل 1-5. إذن، $|a|$ و $|b|$ هما طولا ضلعي المثلث قائم ـ الزاوية المكون من u والاتجاهين الراسي والأفقي. نجد، باستخدام مبرهنة فيثاغوراس أن طول u هو $|u|=\sqrt{a^2+b^2}$ ؛ وهذه القيمة هي نفسها نظيم u.



شكل 1-5

59.1 إن $\mathbf{R}^n$، مزوداً بتعريفات الجمع المتجهي والضرب السلمي والجداء الداخلي، يسمى الفضاء n- الاقليدي. لماذا؟

■ وفقاً للمسالة 45.1، نصطلح على أن متجهين u و v في فضاء الجداء الداخلي $\mathbf{R}^n$ يكونان متعامدين إذا $u.v=0$. لدينا، من أجل مثل هذين المتجهين، من مسالة 57.1، أن

$$\|u+v\|^2=(u+v)\cdot(u+v)=u\cdot u+0+0+v\cdot v=\|u\|^2+\|v\|^2$$

وهي مبرهنة فيثاغوراس. ونظراً لأن النظرية نتيجة للهندسة الاقليدية، فإننا نسمي $\mathbf{R}^n$ فضاءاً «إقليدياً».

60.1 أوجد $\|u\|$ إذا $u=(3,-12,-4)$.

■ نوجد أولا $\|u\|^2=u\cdot u$ بتربيع مركبات u ثم جمعها: $\|u\|^2=3^2+(-12)^2+(-4)^2=9+144+16=169$.
إذن، $\|u\|=\sqrt{169}=13$.

61.1 أوجد $\|v\|$ إذا $v=(2,-3,8,-5)$.

■ ربّع كل مركبة لـ v ثم إجمع لتحصل على $\|v\|^2=v\cdot v$: $\|v\|^2=2^2+(-3)^2+8^2+(-5)^2=4+9+64+25=102$.
إذن، $\|v\|=\sqrt{102}$.

62.1 أوجد $\|w\|$ إذا $w = (-3, 1, -2, 4, -5)$.

■ $\|w\|^2 = (-3)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2 + (-5)^2 = 9 + 1 + 4 + 16 + 25 = 55$ ؛ وبالتالي $\|w\| = \sqrt{55}$

63.1 حدد k بحيث أن $\|u\| = \sqrt{39}$ حيث $u = (1, k, -2, 5)$.

■ $\|u\|^2 = 1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2 = k^2 + 30$. الآن، حل $k^2 + 30 = 39$ لتحصل على $k = 3, -3$.

64.1 أعط تعريفاً لمتجه الوحدة.

■ يكون متجه u متجه وحدة إذا $\|u\| = 1$ أو، بشكل مكافىء، إذا $u.u = 1$.

65.1 ليكن v متجها غير صفري. اثبت أن

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$$

متجه وحدة له نفس إتجاه v. [أن أسلوب إيجاد $\hat{v}$ يسمى مناظمة v].

■ المتجه $\hat{v}$ متجه وحدة، لأن

$$\hat{v} \cdot \hat{v} = \left(\frac{v}{\|v\|}\right) \cdot \left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^2} (v \cdot v) = \frac{1}{\|v\|^2} \|v\|^2 = 1$$

كما أن $\hat{v}$ له نفس إتجاه v لأنه مضاعف سلمي موجب لـ v.

66.1 ناظم $v = (12, -3, -4)$.

■ أولاً، نـوجد $\|v\|^2 = v.v = 12^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 144 + 9 + 16 = 169$. ثـم نقسـم كـل مـركبـة لـ v عـلى $\|v\| = \sqrt{169} = 13$ للحصول على

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}\right)$$

67.1 ناظم $w = (4, -2, -3, 8)$.

■ أولاً، نـوجد $\|w\|^2 = w.w = 4^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 8^2 = 16 + 4 + 9 + 64 = 93$. نقسـم كـل مركبـة لـ w عـلى $\|w\| = \sqrt{93}$ للحصول على

$$\hat{w} = \frac{w}{|w|} = \left(\frac{4}{\sqrt{93}}, \frac{-2}{\sqrt{93}}, \frac{-3}{\sqrt{93}}, \frac{8}{\sqrt{93}}\right)$$

68.1 ناظم $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)$.

■ لاحظ أن v وأي مضاعف موجب لـ v لهما نفس الشكل المناظم [أنظر المسألة 72.1]. وبالتالي، نضرب v في 12 أولاً للتخلص من الكسور: $12v = (6, 8, -3)$ إذن، $\|12v\|^2 = 36 + 64 + 9 = 109$. نتيجة لذلك، يكون متجه الوحدة المطلوب

$$\hat{v} = \widehat{12v} = \frac{12v}{\|12v\|} = \left(\frac{6}{\sqrt{109}}, \frac{8}{\sqrt{109}}, \frac{-3}{\sqrt{109}}\right)$$

69.1 بيّن أن $\|u\| \geq 0$ ، و $\|u\| = 0$ إذا وفقط إذا $u = 0$.

■ ينتج ذلك مباشرة من المسألة 55.1.

70.1 اثبت متباينة كوشي ـ شفارتز: $|u.v| \leqslant \|u\| \|v\|$ ، من أجل u و v إختياريين في R^n.

■ سنبرهن القضية الاقوى التالية: $|u\cdot v| \le \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \le \|u\|\,\|v\|$. أولا، إذا $u = 0$ أو $v = 0$، فإن المتباينة تختزل إلى $0 \leqslant 0 \leqslant 0$ وتكون بالتالي صحيحة. نحتاج إذن أن ننظر فقط في الحالة $u \neq 0$ و $v \neq 0$، أي أن $\|u\| \neq 0$ و $\|v\| \neq 0$. إضافة إلى ذلك، ولأن

$$|u \cdot v| = |\sum u_i v_i| \le \sum |u_i v_i|$$

نحتاج فقط أن نثبت المتباينة الثانية.

الآن، ومن أجل أي عددين حقيقيين $x,y \in \mathbf{R}$، $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ أو، بشكل مكافىء

$$2xy \leqslant x^2 + y^2 \qquad (1)$$

نضع $x = |u_i|/\|u\|$ و $y = |v_i|/\|v\|$ في (1) لنحصل، من أجل أي i، على

$$2\,\frac{|u_i|}{\|u\|}\,\frac{|v_i|}{\|v\|} \le \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2} \qquad (2)$$

ولكن، ومن تعريف النظيم لمتجه، $\|u\| = \sum u_i^2 = \sum |u_i|^2$ و $\|v\| = \sum v_i^2 = \sum |v_i|^2$. لذلك، لجمع (2) من أجل i واستخدام $|u_i v_i| = |u_i|\,|v_i|$، يكون لدينا

$$2\,\frac{\sum |u_i v_i|}{\|u\|\,\|v\|} \le \frac{\sum |u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum |v_i|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2$$

أي أن

$$\frac{\sum |u_i v_i|}{\|u\|\,\|v\|} \le 1$$

بضرب الطرفين في $\|u\|\,\|v\|$ ، تحصل على المتباينة المطلوبة.

71.1 أثبت متباينة منكوفسكي/ Minkowski: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ ، من أجل u و v إختياريتين في $\mathbf{R}^n$.

■ نستخدم متباينة كوشي ـ شفارتز (المسألة 70.1) والخواص الأخرى للجداء الداخلي:

$$\|u + v\|^2 = (u + v).(u + v) = u.u + 2(u.v) + v.v$$
$$\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

بأخذ الجذور التربيعية نحصل على المتباينة المرغوبة.

72.1 أثبت أن النظيم في $\mathbf{R}^n$ يحقق القوانين التالية:

$[N_1]$: من أجل أي متجه u، $\|u\| \geqslant 0$ ؛ و $\|u\| = 0$ إذا وفقط إذا $u = 0$.

$[N_2]$: من أجل أي متجه u وأي سلمي k، $\|ku\| = |k|\,\|u\|$.

$[N_3]$: من أجل أي متجهين u، v: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

■ بُرهنت $[N_1]$ في المسألة 69.1 ، و $[N_3]$ في المسألة 71.1. إذن، نحتاج فقط إلى أن نبرهن $[N_2]$. لنفترض أن $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ وبذلك $ku = (ku_1,ku_2,\ldots,ku_n)$. إذن،

$$\|ku\|^2 = (ku_1)^2 + (ku_2)^2 + \ldots + (ku_n)^2 = k^2(u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2) = k^2\|u\|^2$$

أخذ الجذور التربيعية يعطينا $[N_2]$.

73.1 بيّن أن $\|-u\| = \|u\|$ ، من أجل أي متجه في $\mathbf{R}^n$.

■ باستخدام الخاصية $[N_2]$ في المسألة 72.1، يكون لدينا $\|-u\| = \|(-1)u\| = |-1|\,\|u\| = \|u\|$.

74.1 لتكن $u=(1,2,-2)$، $v=(3,-12,4)$، و $k=-3$. (أ) أوجد $\|u\|,\|v\|$، و $\|ku\|$. (ب) تحقق أن $\|ku\|=|k|\,\|u\|$ و $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$.

▩ (أ) $\|u\|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$ ، $\|v\|=\sqrt{9+144+16}=\sqrt{169}=13$ ، $ku=(-3,-6,6)$ ، $\|ku\|=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$.

(ب) بما أن $|k|=|-3|=3$ ، يكون لدينا $\|ku\|=9=3.3=|k|\,\|u\|$. أيضاً، $u+v=(4,-10,2)$. إذن

$$\|u+v\|=\sqrt{16+100+4}=\sqrt{120}\leq 16=3+13=\|u\|+\|v\|$$

6.1 المسافة، الزوايا، المساقط

75.1 ليكن u و v أي متجهين في $\mathbb{R}^n$. المسافة بين u و v، ويرمز لها بـ $d(u,v)$، تعرّف بأنها

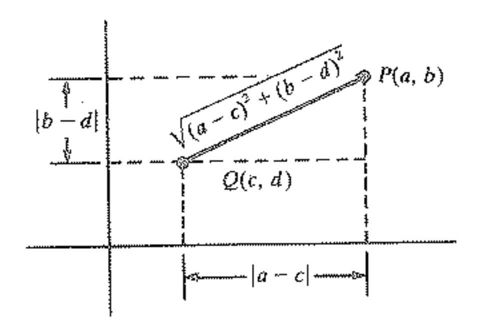
$$d(u,v)\equiv\|u-v\|$$

بين أن هذا التعريف يقابل المفهوم المعتاد للمسافة الاقليدية في $\mathbb{R}^2$.

▩ ليكن $u=(a,b)$ و $v=(c,d)$ في $\mathbb{R}^2$. كما يوضح الشكل 6-1، فإن المسافة بين النقطتين $P(a,b)$ و $Q(c,d)$ تكون $d=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$. من جهة أخرى، وبواسطة التعريف أعلاه، لدينا

$$d(u,v)=\|u-v\|=\|(a-c,\,b-d)\|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

وكلاهما يعطي نفس القيمة.



شكل 6-1

76.1 أوجد $d(u,v)$، حيث (أ) $u=(1,7)$، $v=(6,-5)$؛ (ب) $u=(3,-5,4)$، $v=(6,2,-1)$؛ (ج) $u=(1,-2,4,1)$، $v=(3,1,-5,0)$.

▩ في كل حالة استخدم الصيغة

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$$

(أ) $d(u,v)=\sqrt{(1-6)^2+(7+5)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

(ب) $d(u,v)=\sqrt{(3-6)^2+(-5-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+49+25}=\sqrt{83}$

(ج) $d(u,v)=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2}=\sqrt{95}$

77.1 أوجد k بحيث أن $d(u,v)=6$، إذا $u=(2,k,1,-4)$ و $v=(3,-1,6,-3)$.

▩ $(d(u,v))^2=\|u-v\|^2=(2-3)^2+(k+1)^2+(1-6)^2+(-4+3)^2=k^2+2k+28$. الآن، نحل $k^2+2k+28=6^2$ لنحصل على $k=2,-4$.

78.1 استخدم المسألة 72.1 لإثبات أن دالة المسافة $d(u,v)$ تحقق:

$[M_1]$ $d(u,v)\geqslant 0$، و $d(u,v)=0$ إذا وفقط إذا $u=v$.

$[M_2]$ $d(u,v) = d(v,u)$.

$[M_3]$ $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$ (متباينة المثلث).

■ $[M_1]$ تنتج مباشرة من $[N_1]$. من $[N_2]$، نجد أن

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| = |-1| \ \|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u)$$

وهي $[M_2]$. من $[N_3]$، نجد أن

$$d(u,v) = \|u-v\| = \|(u-w) + (w-v)\| \leqslant \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v)$$

وهي $[M_3]$.

79.1 ليكن u و v متجهين في $\mathbf{R}^n$. تعرّف الزاوية θ ، بين u و v بواسطة

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

(أ) بيّن أن θ عدد حقيقي وحيد في $[0, \pi]$. (ب) بيّن أن هذا التعريف يقابل ذلك التعريف المستخدم في الفيزياء.

■ (أ) لدينا، من متباينة كوشي ـ شفارتز، أن $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$. إذن، $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ، وهي تعرّف بشكل وحيد زاوية حقيقية $0 \leq \theta \leq \pi$. (ب) تعرّف الفيزياء الجداء النقطي بأنه $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos\theta$ ؛ بالقسمة على $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ نحصل على القاعدة أعلاه في $\cos\theta$.

80.1 أوجد $\cos\theta$ ، حيث θ الزاوية بين $u = (1,-2,3)$ و $v = (3,-5,-7)$.

■ نوجد أولاً

$$u.v = 3 + 10 - 21 = -8 \qquad \|u\|^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \qquad \|v\|^2 = 9 + 25 + 49 = 83$$

إذن، باستخدام الصيغة في المسألة 79.1،

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} = -\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{83}}$$

81.1 أوجد $\cos\theta$ ، حيث θ الزاوية بين $u = (4,-3,1,5)$ و $v = (2,6,-1,4)$.

■ $u.v = 8-18-1+20 = 9 \qquad \|u\|^2 = 16+9+1+25 = 51 \qquad \|v\|^2 = 4+36+1+16 = 57$

إذن

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{51}\sqrt{57}}$$

82.1 ليكن u و $v \neq 0$ متجهين في $\mathbf{R}^n$. إن المسقط [المتجهي] لـ u على v هو المتجه

$$\text{proj}\,(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \, v \qquad (1)$$

بين أن هذا التعريف يتوافق مع مفهوم المسقط المتجهي في الفيزياء.

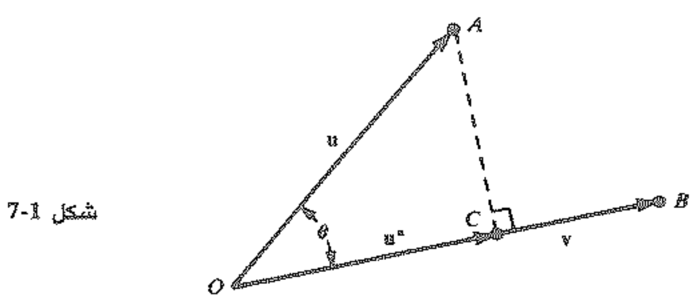
■ في الصورة الفيزيائية، شكل 1-7، يكون المسقط [العمودي] لـ $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو المتجه $\mathbf{u}^*$ الذي مقداره

$$|\mathbf{u}^*| = |\mathbf{u}| \cos\theta = |\mathbf{u}| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

للحصول على $\mathbf{u}^*$، نضرب مقداره في متجه الوحدة في إتجاه $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}^* = |\mathbf{u}^*| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

والذي يقابل (1) أعلاه.



شكل 7-1

83.1 أوجد مسقط proj(u,v) حيث $u = (1,-2,3)$ و $v = (2,5,4)$.

■ نوجد أولاً $u.v = 2-10+12 = 4$ و $\|v\|^2 = 4 + 25 + 16 = 45$. إذن، بواسطة (1) للمسألة 82.1، يكون لدينا

$$\text{proj}(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{4}{45}(2, 5, 4) = \left(\frac{8}{45}, \frac{20}{45}, \frac{16}{45}\right) = \left(\frac{8}{45}, \frac{4}{9}, \frac{16}{45}\right)$$

84.1 أوجد مسقط proj(u,v) حيث $u = (4,-3,1,5)$ و $v = (3,6,-4,1)$.

■ نوجد أولاً $u.v = 12 - 18 - 4 + 5 = -5$ و $\|v\|^2 = 9+36+16+1 = 62$. إذن،

$$\text{proj}(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = -\frac{5}{62}(3, 6, -4, 1) = \left(\frac{-15}{62}, \frac{-30}{62}, \frac{20}{62}, \frac{-5}{62}\right) = \left(\frac{-15}{62}, \frac{-15}{31}, \frac{10}{31}, \frac{-5}{62}\right)$$

[لاحظ أنه عندما $u.v < 0$، يكون المسقط في الاتجاه المعاكس لـ v].

7.1 التعامد

85.1 ليكن u و v متجهين في $\mathbf{R}^n$. نقول، عندئذ، أن u متعامد/ orthogonal مع v (أو عمودي/ perpendicular عليه) إذا $u.v = 0$. بين أن هذا التعريف يتوافق مع تعامد المتجهات (الأسهم) في الفيزياء.

■ يكون سهمان متعامدين إذا وفقط إذا كانت الزاوية بينهما $\theta = 90°$. ولكن، عندئذ وفقط عندئذ، يكون $u.v = 0$، وذلك من المسألة 45.1.

86.1 لتكن المتجهات $u = (5,4,1)$، $v = (3,-4,1)$ و $w = (1,-2,3)$. أي هذه المتجهات، إن وجدت، متعامدة؟

■ أوجد الجداء النقطي لكل زوج من هذه المتجهات:

$$u.v = 15-16+1=0 \qquad v.w = 3+8+3=14 \qquad u.w = 5-8+3=0$$

وبالتالي، يكون المتجهان u و v متعامدين، وكذلك المتجهان u و w، ولكن v و w ليسا متعامدين.

87.1 حدد k لكي يكون المتجهان $u = (1,k,-3)$ و $v = (2,-5,4)$ متعامدين.

■ حلّ $u.v = (1)(2) + (k)(-5) + (-3)(4) = 2-5k-12=0$ من أجل k: تحصل على $k = -2$.

88.1 حدد k لكي يكون المتجهان $u = (2,3k,-4,1,5)$ و $v = (6,-1,3,7,2k)$ متعامدين.

■ بحل $u.v = (2)6 + (3k)(-1) + (-4)(3) + (1)(7) + (5)(2k) = 12 - 3k - 12 + 7 + 10k = 7k + 7 = 0$. نحصل على $k = -1$.

89.1 بين أن المتجه الصفري **0** متعامد مع كل متجه في $\mathbf{R}^n$.

بما أن $0u = \mathbf{0}$، $\mathbf{0}.u = (0u).u = 0(u.u) = 0$.

90.1 بيّن أن المتجه الصفري هو المتجه الوحيد المتعامد مع كل متجه في R^n.

▩ لنفترض أن u متعامد مع كل متجه في R^n. إذن، u متعامد مع نفسه؛ أي أن $u.u = 0$. نجد، من المسألة 55.1، أن $u = 0$.

91.1 بين أن تعامد المتجهات علاقة متناظرة ولكنها ليست متعدية.

▩ من المسألة 54.1، $u.v = v.u$. وبذلك، يكون u متعامداً مع v إذا وفقط إذا $u.v = 0$، إذا وفقط إذا $v.u = 0$، إذا وفقط إذا كان v متعامداً مع u. وبالتالي، تكون العلاقة متناظرة. من جهة أخرى، أنظر في متجهات المسألة 86.1. هنا، v متعامد مع u، و u متعامد مع w، ولكن v ليس متعامداً مع w؛ فالعلاقة ليس إذن متعدية.

92.1 إذا كان u و v متعامدين مع w، بين أن $u + v$ متعامد مع w.

▩ $(u + v).w = u.w + v.w = 0 + 0 = 0$

93.1 إذا كان u متعامداً مع w، بين أن كل مضاعف سلمي ku متعامد مع w.

▩ $(ku).w = k(u.w) = k(0) = 0$

94.1 لتكن u_3 ،u_2 ،u_1 متجهات غير صفرية ومتعامدة ثنائياً، ولنفترض أن w تركيبة خطية $w = xu_1 + yu_2 + zu_3$. أثبت أن

$$x = \frac{w \cdot u_1}{\|u_1\|^2} \qquad y = \frac{w \cdot u_2}{\|u_2\|^2} \qquad z = \frac{w \cdot u_3}{\|u_3\|^2}$$

▩ خذ الجداء النقطي لـ w و u_1، تتحصل على

$$w \cdot u_1 = (xu_1 + yu_2 + zu_3) \cdot u_1 = x(u_1 \cdot u_1) + y(u_2 \cdot u_1) + z(u_3 \cdot u_1)$$
$$= x(u_1 \cdot u_1) + y(0) + z(0) = x(u_1 \cdot u_1) = x\|u_1\|^2$$

ومنها $x = (w.u_1)/\|u_1\|^2$. بالمثل، خذ الجداء النقطي لـ w و u_2 لتحصل على $y = (w.u_2)/\|u_2\|^2$، وخذ الجداء النقطي لـ w و u_3 فتحصل على $z = (w.u_3)/\|u_3\|^2$.

95.1 بين أن $u_1 = (1,-2,3)$، $u_2 = (1,2,1)$، $u_3 = (-8,2,4)$ متعامدة كل منها مع الآخر.

▩ نحسب الجداء النقطي لكل زوج من المتجهات:

$$u_2.u_3 = -8 + 4 + 4 = 0 \qquad u_1.u_3 = -8 - 4 + 12 = 0 \qquad u_1.u_2 = 1 - 4 + 3 = 0$$

وبذلك، تكون المتجهات متعامدة ثنائياً.

96.1 اكتب $w = (13,-4,7)$ كتركيبة خطية للمتجهات u_1، u_2، u_3 في المسألة 95.1؛ أي، أوجد x، y، z بحيث أن $w = xu_1 + yu_2 + zu_3$.

▩ **طريقة 1:** إضرب في السلميات x، y، z ثم أجمع:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 8z \\ -2x + 2y + 2z \\ 3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

ثم ساو المركبات المتقابلة كل منها للآخر لتحصل على المنظومة:

$$x + y - 8z = 13 \qquad -2x + 2y + 2z = -4 \qquad 3x + y + 4z = 7$$

حل المنظومة لتحصل على $x = 3$، $y = 2$، $z = -1$.

طريقة 2: بما أن u_1، u_2، u_3 متعامدة كل منها للآخر، نستخدم صيغ المسألة 94.1:

$$w.u_1 = 13 + 8 + 21 = 42 \qquad \|u_1\|^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \qquad x = 42/14 = 3$$

$w.u_2 = 13 - 8 + 7 = 12 \qquad \|u_2\|^2 = 1 + 4 + 1 = 6 \qquad y = 12/6 = 2$

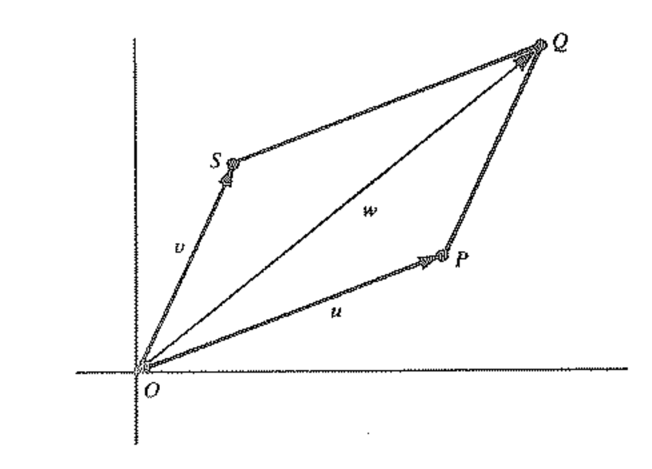
$w.u_3 = -104 - 8 + 28 = -84 \qquad \|u_3\|^2 = 64 + 4 + 16 = 84 \qquad z = -84/84 = -1$

(الطريقة 2، التي تستخدم التعامد، أبسط كثيراً من الطريقة 1].

8.1 فوق المستويات والمستقيمات في R^n

يميز هذا القسم بين النونية $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv P(a_i)$ منظوراً إليها كنقطة في R^n، والنونية $v = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ منظوراً إليها على أنها متجه (سهم) من نقطة الأصل O إلى النقطة $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

97.1 لتكن $P(a_i)$ و $Q(b_i)$ نقطتين في R^n. تُعَرَّف القطعة المستقيمة الموجهة من P إلى Q، والتي تكتب $\overrightarrow{PQ}$، بأنها المتجه $v = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n]$. بين هندسياً أن $\overrightarrow{PQ}$ و v لهما نفس المقدار والاتجاه.



شكل 8-1

■ ننظر في النقطتين $P(a_1, a_2)$ و $Q(b_1, b_2)$ في مستوٍ بنقطة أصل O، كما هو موضح في شكل 8-1. لتكن S النقطة بحيث أن OPQS يشكل متوازي أضلاع. لتكن u، w و v المتجهات من O إلى النقط P و Q و S على الترتيب. باستخدام قانون متوازي الأضلاع لجمع المتجهات، يكون لدينا $u + v = w$، أو

$$v = w - u = [b_1, b_2] - [a_1, a_2] = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$

ولكن، وبما ان OPQS متوازي أضلاع، فإن المتجه v الذي حصلنا عليه يتطابق مع $\overrightarrow{PQ}$ مقداراً واتجاهاً.

98.1 أوجد المتجه v المتطابق مع $\overrightarrow{PQ}$ من أجل النقطتين $P(2,5)$ و $Q(-3,4)$.

■ $v = [-3-2, 4-5] = [-5, -1]$.

99.1 أوجد المتجه v المتطابق مع $\overrightarrow{PQ}$ من أجل النقطتين $P(1,-2,4)$ و $Q(6,0,-3)$.

■ $v = [6-1, 0+2, -3-4] = [5, 2, -7]$

100.1 لتكن النقطتان $P(3,k,-2)$ و $Q(5,3,4)$ في R^3. أوجد k بحيث يكون $\overrightarrow{PQ}$ متعامداً مع المتجه $u = [4,-3,2]$.

■ نوجد أولاً $v = \overrightarrow{PQ} = [5-3, 3-k, 4+2] = [2, 3-k, 6]$ ؛ ثم نحسب $u.v = (4)(2) - (3)(3-k) + (2)(6) = 8 - 9 + 3k + 12 = 3k + 11$. أخيراً، نضع $u.v = 0$ ونحلّ من أجل k، لنحصل على $k = -11/3$.

101.1 يعرّف فوق مستوٍ H في R^n بأنه مجموعة النقط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي تحقق معادلة خطية:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

حيث يُسَمَّى $\alpha = [a_1, \ldots, a_n] \neq 0$ ناظما على H. برز هذا الاصطلاح بأن تبين أن كل قطعه مستقيمة موجهة $\overrightarrow{PQ}$، حيث P,Q∈H، متعامدة مع α.

■ ليكن $u = \overrightarrow{OP}$، $w = \overrightarrow{OQ}$؛ وبالتالي، $v = w - u = \overrightarrow{PQ}$. من (1)، $\alpha \cdot u = b$ و $\alpha \cdot w = b$. إذن، $\alpha \cdot v = \alpha \cdot (w - u) = \alpha \cdot w - \alpha \cdot u = 0$.

102.1 إرجع إلى المسألة 101.1. أثبت أن المسافة من نقطة الأصل O إلى فوق ـ المستوى (1) معطاة بواسطة $|b|/\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

■ ليكن $u = \overrightarrow{OP} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ متجها من O إلى النقطة $p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ على المستوى؛ نريد أن نجعل u.u أصغريا [وهو نفس الشيء كجعل ‖u‖ أصغريا] فوق $H: \alpha \cdot u = b$. نستخدم المسألة 94.1، فنمثل u بواسطة تركيبة خطية للمتجهين α و v، حيث v متعامدة مع α (ويمكن لذلك اعتباره كسهم واقع في فوق ـ المستوى):

$$u = \frac{u \cdot \alpha}{\|\alpha\|^2} \alpha + \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{b}{\|\alpha\|^2} \alpha + v^*$$

حيث $\alpha \cdot v^* = 0$. إذن، وباستخدام المسألة 57.1

$$u \cdot u = \frac{b^2}{\|\alpha\|^4} \alpha \cdot \alpha + v^* \cdot v^* + 2\frac{b}{\|\alpha\|^2} \alpha \cdot v^* = \left(\frac{|b|}{\|\alpha\|}\right)^2 + \|v^*\|^2$$

من الواضح أن القيمة الصغرى تحدث من أجل $v^* = 0$، وتكون المسافة المرغوبة:

$$\|u\|_{\text{صغرى}} = \frac{|b|}{\|\alpha\|} = \frac{|b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

103.1 أوجد معادلة المستوى H في R^3 الذي يمر بـ P(2,−7,1) وعمودي على $\alpha = [3, 1, -11]$.

■ إن معادلة H تكون في الشكل $3x + y - 11z = k$، حيث أن α عمودي على H. نعوض بـ P(2,−7,1) في هذه المعادلة لنحصل على

$$(3)(2) + (1)(-7) - (11)(1) = k \qquad \text{أو} \qquad k = -12$$

وبذلك تكون معادلة H في الشكل $3x + y - 11z = -12$.

104.1 أوجد معادلة لفوق ـ المستوى H في R^4 الذي يمر عبر P(3,−2,1,−4) ويكون عمودياً على $\alpha = [2, 5, -6, -2]$.

■ إن معادلة لـ H تكون في الشكل $2x + 5y - 6z - 2w = k$. عوض بـ P في هذه المعادلة، فتحصل على $k = -2$.

105.1 أوجد معادلةً للمستوى H في R^3 الذي يحتوي P(1,−5,2) ويكون موازياً للمستوى H′ المحدد بواسطة $3x - 7y + 4z = 5$.

■ يكون H و H′ متوازيين إذا وفقط إذا كان ناظماهما متوازيين أو لا ـ متوازيين (متضادي الاتجاه). وبالتالي، تكون معادلة لـ H في الشكل $3x - 7y + 4z = k$. نعوض بـ P(1,−5,2) في هذه المعادلة فنحصل على $K = 46$.

106.1 أوجد معادلة فوق بالمستوى H في R^n الذي يقطع المحور x_i- في $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

■ بما أن H لا يمر عبر نقطة الأصل، فإن معادلة لـ H تكون في الشكل

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n = 1$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$، نعوض بـ $P_i(0,\ldots,a_i,\ldots0)$ في المعادلة لنحصل على $k_i = 1/a_i$. وبالتالي، تكون المعادلة $x_1/a_1 + x_2/a_2 + \ldots + x_n/a_n = 1$.

107.1 أوجد الناظم (العمود) على المستوى H في R^3 الذي يقطع محاور الإحداثيات عند $x=3$، $y = -4$، $z = 6$.

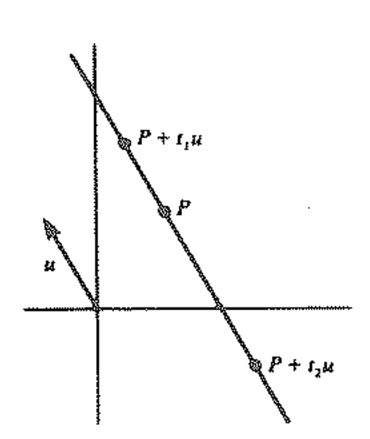
■ من المسألة 106.1، تكون معادلة H في الشكل $x/3 - y/4 + z/6 = 1$ أو $4x - 3y + 2z = 12$. بالتالي، يكون $\alpha = [4,-3,2]$ ناظما لـ H. [لاحظ أن أي مضاعف سلّمي لناظم يكون ناظماً أيضاً].

108.1 إن المستقيم L في $\mathbf{R}^n$ المار بالنقطة $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ وفي اتجاه المتجه غير الصفري $u = [u_1,u_2,\ldots,u_n]$ يتكون من النقط $X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ التي تحقق

$$X = P + tu \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t \\ x_2 = a_2 + u_2 t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n + u_n t \end{cases} \qquad (1)$$

حيث الوسيط t يأخذ كل الأعداد العقدية. [أنظر شكل 1-9]. أوجد تمثيلا وسيطياً (1) للمستقيم في $\mathbf{R}^4$ الذي يمر بـ $P(4,-2,3,1)$ في الاتجاه $u = [2,5,-7,11]$.

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 7t \\ w = 1 + 11t \end{cases} \quad \text{أو} \quad (4 + 2t, -2 + 5t, 3 - 7t, 1 + 11t)$$



شكل 1-9

109.1 أوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم في $\mathbf{R}^2$ المار بالنقطة $P(2,5)$ وفي الاتجاه $u = [-3,4]$.

■ استخدم (1) في المسألة 108.1 لتحصل على $x = 2 - 3t$، $y = 5 + 4t$.

110.1 أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم في $\mathbf{R}^3$ الذي يمر عبر النقطتين $P(5,4,-3)$ و $Q(1,-3,2)$.

■ نحسب أولاً $u = \overrightarrow{PQ} = [1 - 5, -3 - 4, 2 - (-3)] = [-4, -7, 5]$ ؛ ثم نستخدم (1) في المسألة 108.1: $x = 5-4t$، $y = 4-7t$، $z = -3+5t$.

111.1 أعط معادلات غير وسيطية للمستقيمات في (أ) المسألة 109.1 (ب) المسألة 110.1.

■ نحل كل معادلة إحداثية من أجل t ثم نساوي بين النتائج:

(أ) $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-5}{4}$ أو $4x - 8 = -3y + 15$ أو $4x + 3y = 23$

(ب) $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-4}{-7} = \dfrac{z+3}{5}$

أو زوج المعادلتين الخطيتين $7x - 4y = 19$ و $5x + 4z = 13$.

112.1 أوجد المعادلة الوسيطية للمستقيم في $\mathbf{R}^3$ العمودي على المستوى $2x - 3y + 7z = 4$ ويقطع هذا المستوى في النقطة $P(6,5,1)$.

■ بما أن المستقيم عمودي على المستوى، فلا بد أن يكون في اتجاه المتجه الناظم، $\alpha = [2,-3,7]$. إذن، $z = 1 + 7t$، $y = 5-3t$، $x = 6+2t$.

9.1 الأعداد العقدية

في مجموعة المسائل التالية، ترمز C إلى مجموعة الأعداد العقدية؛ z و w يرمزان لعددين عقديين (عنصرين في C)؛ a، b، x، y أعداد حقيقية (عناصر في R)؛ و $i=\sqrt{-1}$ (بمعنى أن $i^2=-1$).

113.1 إذا $z=2+3i$ و $w=5-2i$ أوجد (أ) $z+w$، (ب) $z-w$، (ج) zw.

■ استخدام قواعد الجبر العادية بالإضافة إلى $i^2=-1$ للحصول على نتيجة في الشكل النمطي $a+bi$.
(أ) $z+w=2-3i+4+5i=6+2i$؛ (ب) $z-w=(2+3i)-(5-2i)=2+3i-5+2i=\ \ 3+5i$؛
(ج) $zw=(2-3i)(4+5i)=8-12i+10i-15i^2=23-2i$.

114.1 بسّط (أ) i^0, i^3, i^4؛ (ب) i^5, i^6, i^7, i^8.

■ (أ) $i^0=1$، $i^3=i^2(i)=(-1)(i)=-i$، $i^4=(i^2)(i^2)=(-1)(-1)=1$.
(ب) $i^5=(i^4)(i)=(1)(i)=i$، $i^6=(i^4)(i^2)=(1)(i^2)=i^2=-1$، $i^7=i^3=-i$، $i^8=i^4=1$.

115.1 بسّط (أ) $(5+3i)(2-7i)$، (ب) $(4-3i)^2$، (ج) $(1+2i)^3$.

■ (أ) $(4-3i)^2=16-24i+9i^2=7-24i$؛ (ب) $(5+3i)(2-7i)=10+6i-35i-21i^2=31-29i$؛
(ج) $(1+2i)^3=1+6i+12i^2+8i^3=1+6i-12-8i=-11-2i$.

116.1 بسّط: (أ) i^{39}، (ب) i^{174}، (ج) i^{252}، (د) i^{317}.

■ (أ) $i^{39}=i^{4\cdot 9+3}=(i^4)^9 i^3=1^9 i^3=i^3=-i$؛ (ب) $i^{174}=i^2=-1$؛ (ج) $i^{252}=i^0=1$؛ (د) $i^{317}=i^1=i$.

117.1 ليكن $z=a+bi$. إذن، $a=\text{Re } z$ و $b=\text{Im } z$ يسميان على الترتيب الجزئين الحقيقي والتخيلي لـ z. يعرّف المرافق العقدي لـ z ويرمز له بواسطة

$$\bar{z}=a-bi=\text{Re } z-i\,\text{Im } z \quad \text{أو} \quad \text{Im }\bar{z}=-\text{Im } z \qquad \text{Re }\bar{z}=\text{Re } z$$

أوجد المرافقات العقدية لـ (أ) $6+4i$، (ب) $7-5i$، (ج) $4+i$، (د) $-3-i$.

■ (أ) $6-4i$؛ (ب) $7+5i$؛ (ج) $4-i$؛ (د) $-3-i$.

118.1 أثبت أن z عدد حقيقي إذا وفقط إذا $z=\bar{z}$.

■ $\text{Im } z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ يتلاشى إذا فقط إذا $z=\bar{z}$.

119.1 أثبت أن $z\bar{z}$ عدد حقيقي غير سالب.

■ $z\bar{z}=(\text{Re } z+i\,\text{Im } z)(\text{Re } z-i\,\text{Im } z)=(\text{Re } z)^2+(\text{Im } z)^2\ge 0$

120.1 تعرّف القيمة المطلقة لعدد عقدي z بواسطة $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$. إحسب قيمة $|z|$ عندما (أ) $z=3+4i$، (ب) $z=5-2i$، (ج) $z=-7+i$، (د) $z=-1-4i$.

■ استخدم تعبير المسألة 119.1.
(أ) $z\bar{z}=3^2+4^2=25,\quad |z|=\sqrt{25}=5$.
(ب) $z\bar{z}=5^2+(-2)^2=29,\quad |z|=\sqrt{26}$.
(ج) $z\bar{z}=(-7)^2+1^2=50,\quad |z|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.
(د) $z\bar{z}=(-1)^2+(-4)^2=17,\quad |z|=\sqrt{17}$.

121.1 أثبت أن $|\bar{z}|=|z|$.

▩ يتضح من المسألة 117.1 أن $\bar{\bar{z}} = z$. إذن،

$$|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$$

122.1 عبّر في الشكل a + bi عن:

(أ) $\frac{1}{3-4i}$ (ب) $\frac{2-7i}{5+3i}$

▩ لتبسيط كسر z/w لعددين عقديين، نضرب البسط والمقام معاً في $\bar{w}$ ، وهو مرافق المقام.

(أ) $$\frac{1}{3-4i} = \frac{(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

(ب) $$\frac{2-7i}{5+3i} = \frac{(2-7i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{-11-41i}{34} = -\frac{11}{34} - \frac{41}{34}i$$

123.1 إحسب $\text{Im}\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2$.

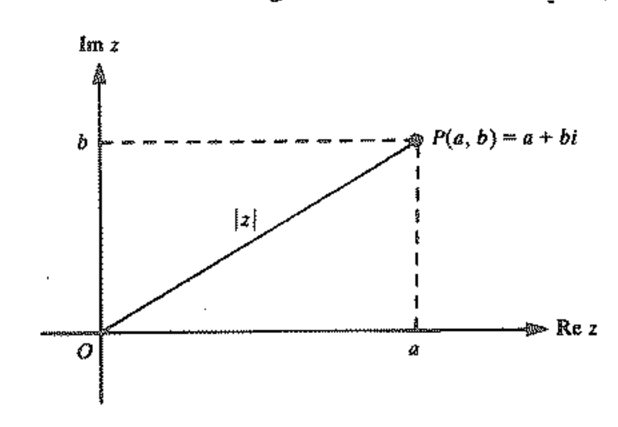
▩ $$\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2 = \frac{1}{-5-12i} = \frac{(-5+12i)}{(-5-12i)(-5+12i)} = \frac{-5+12i}{169} = -\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$$

وبذلك

$$\text{Im}\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2 = \frac{12}{169}$$

124.1 صف التمثيل الهندسي لمنظومة الأعداد العقدية C. [يسمى مثل هذا التمثيل المستوى العقدي].

▩ يطابق كل عدد عقدي z = a + bi على النقطة P(a,b) في المستوى الديكارتي، وبالعكس. [أنظر شكل 1-10]. المحور x- [المحور الأفقي] يسمى المحور الحقيقي، لأن نقطةً تقابل الأعداد العقدية z = a + 0i = a وهي أعداد حقيقية؛ أما محور y- (المحور الرأسي) فيسمى المحور التخيلي لأن نقطةً تقابل تلك الأعداد العقدية z = 0 + bi = bi، والتي هي تخيلية بحتة. أيضاً، $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$. يساوي المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة z = P(a,b).



شكل 1-10

125.1 صف العلاقة الهندسية بين النقطتين z و $\bar{z}$ للمستوى العقدي.

▩ هما صورتا مرآة كل منهما للأخرى.

126.1 أعد المسألة 125.1 من أجل النقطتين z و $i\bar{z}$.

▩ إذا $z = a + bi$، فإن $i\bar{z} = i(a - bi) = ia - bi^2 = b + ai$. وبذلك، فإن النقطتين الممثلتين، P(a,b) و Q(b,a)، هما صورتا مرآة في المستقيم Re z = Im z الذي زاويه ميله 45°.

127.1 لنفترض ان $z \neq 0$. بين أن $\bar{z} = z^{-1}$ إذا وفقط إذا كانت z تقع على دائرة الوحدة في المستوى العقدي C.

■ $\bar{z} = z^{-1}$ إذا وفقط $z\bar{z} = 1$ إذا وفقط إذا $|z| = 1$، وهذا يعطي النتيجة المعطاة.

في المسائل 128.1-130.1، $z = a + bi$ و $w = c + di$.

128.1 اثبت أن $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

■
$$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$$
$$= a + c - bi - di = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$$

129.1 اثبت أن $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$.

■
$$\overline{zw} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$$
$$= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}\,\bar{w}$$

130.1 اثبت أن $\bar{\bar{z}} = z$.

■
$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$$

131.1 بين أن $|\bar{z}| = |z|$.

■ $|\bar{z}|^2 = \bar{z}\,\bar{\bar{z}} = \bar{z}\,z = z\,\bar{z} = |z|^2$ ؛ وبالتالي، $|\bar{z}| = |z|$.

132.1 اثبت أن: $|zw| = |z|\,|w|$.

■ من المسألة 129.1، نجد أن
$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z}\,\bar{w}) = (z\,\bar{z})(w\,\bar{w}) = |z|^2\,|w|^2$$
خذ الآن الجذور التربيعية لطرفي المعادلة.

133.1 اثبت أن $zw = 0$ إذا وفقط إذا $z = 0$ أو $w = 0$. [يعني هذا أنه ليس لـ C قواسم للصفر.]

■ استخدم المسألة 132.1 [وحقيقة أن $ab = 0$ إذا وفقط إذا $a = 0$ و $b = 0$ في R]:
$zw = 0$ إذا وفقط إذا $|zw| = 0$ إذا وفقط إذا $|z| = 0$ أو $|w| = 0$ إذا وفقط إذا $z = 0$ أو $w = 0$.

134.1 اثبت أنه من أجل أي عددين عقديين $z,w \in C$, $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

■ ليكن $z = a + bi$ و $w = c + di$، حيث $a,b,c,d \in R$. أنظر في المتجهين $u = (a,b)$ و $v = (c,d)$ في R^2.
لاحظ أن
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|u\|, \quad |w| = |w| = \sqrt{c^2 + d^2} = \|v\|$$
و
$$|z + w| = |(a + c) + (b + d)i| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = \|(a + c, b + d)\| = \|u + v\|$$
نستخدم متباينة منكوفسكي (المسألة 71.1)، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ وبالتالي، يكون لدينا
$$|z + w| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = |z| + |w|$$

10.1 المتجهات C^n

في المسائل 135.1-138.1، $u = (3-2i, 4i, 1 + 6i)$ و $v = (5 + i, 2-3i, 5)$ في C^3.

135.1 أوجد $u + v$.

■ اجمع المركبات المتقابلة: $u + v = (8-i, 2+i, 6+6i)$.

136.1 أوجد $4iu$.

■ نضرب كل مركبة لـ u في العدد السلمي $4i$: $4iu = (8 + 12i, -16, -24+4i)$.

137.1 أوجد $(1 + i)v$.

■ إضرب كل مركبة لـ v في العدد السلمي $1 + i$:

$$(1+i)v = (5+6i+i^2,\ 2-i-3i^2,\ 5+5i) = (4+6i,\ 5-i,\ 5+5i)$$

138.1 أوجد $(1-2i)u + (3+i)v$.

■ ننجز أولاً عمليات الضرب السلمية ثم الجمع المتجهي:

$$(1-2i)u + (3+i)v = (-1-8i, 8+4i, 13+4i) + (14+8i, 9-7i, 15+5i) = (13, 17-3i, 28+9i)$$

المسائل 139.1-142.1 ترجعان إلى المتجهين $u = (7-2i, 2+5i)$ و $v = (1+i, -3-6i)$ في C^2.

139.1 أوجد $u + v$.

■ $u+v = (7-2i+1+i, 2+5i-3-6i) = (8-i, -1-i)$.

140.1 أوجد $2iu$.

■ $2iu = (14i-4i^2, 4i+10i^2) = (4+14i, -10+4i)$.

141.1 أوجد $(3-i)v$.

■ $(3-i)v = (3+3i-i-i^2, -9-18i+3i+6i^2) = (4+2i, -15-15i)$.

142.1 أوجد $(1+i)u+(2-i)v$.

■ $(1+i)u+(2-i)v = (9+5i, -3+6i)+(3+i, -12-3i) = (12+6i, -15+3i)$.

11.1 الجداء النقطي (الداخلي) في C^n

143.1 لنفترض أن $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ و $v = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ متجهان في C^n. يعرف الجداء النقطي أو الداخلي لـ u و v بأنه

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k$$

بيّن أن هذا التعريف يختزل إلى ذلك التعريف في R^n عندما تكون كل المركبات حقيقية.

■ من المسألة 118.1 تكون w_k حقيقية إذا وفقط إذا $\bar{w}_k = w_k$. وبالتالي، وعندما تكون كل الـ z_k و w_k حقيقية، يكون لدينا

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k$$

وهو نفس العدد الحقيقي المعطى في المسألة 45.1.

144.1 ليكن $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ متجهان في C^n. يعرّف نظيم أو طول u بواسطة

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

اثبت أن $\|u\|$ عدد حقيقي غير سالب.

■ من المسألة 119.1، يكون كل $z_k\bar{z}_k$ حقيقيا وغير سالب. وبالتالي يكون المجموع حقيقياً وغير سالب، وكذلك الجذر التربيعي يكون حقيقياً وغير سالب.

145.1 أوجد u.v و v.u، حيث $u=(1-2i,3+i)$ و $v=(4+2i,5-6i)$ متجهي في C^2.

■ تذكر أن مرافقات مركبات المتجه الثاني تظهر في الجداء النقطي.

$$u\cdot v=(1-2i)(\overline{4+2i})+(3+i)(\overline{5-6i})$$
$$=(1-2i)(4-2i)+(3+i)(5+6i)=-10i+9+13i$$
$$v\cdot u=(4+2i)(\overline{1-2i})+(5-6i)(\overline{3+i})$$
$$=(4+2i)(1+2i)+(5-6i)(3-i)=10i+9-23i=9-13i$$

لاحظ أن $v\cdot u=\overline{u\cdot v}$ وهذا صحيح بوجه عام، كما تبينه المسألة 152.1.

146.1 أوجد $u\cdot v$ و $v\cdot u$ ، إذا كان $u=(3-2i,4i,1+6i)$ و $v=(5+i,2-3i,7+2i)$ متجهين في C^3.

$$u\cdot v=(3-2i)(\overline{5+i})+(4i)(\overline{2-3i})+(1+6i)(\overline{7+2i})$$
$$=(3-2i)(5-i)+(4i)(2+3i)+(1+6i)(7-2i)=20+35i$$
$$v\cdot u=(5+i)(\overline{3-2i})+(2-3i)(\overline{4i})+(7+2i)(\overline{1+6i})$$
$$=(5+i)(3+2i)+(2-3i)(-4i)+(7+2i)(1-6i)=20-35i=\overline{u\cdot v}$$

147.1 أوجد $\|u\|$ من أجل $u=(3+4i,5-2i,1-3i)$ في C^3.

■ $\|u\|^2=u\cdot u=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_3\bar{z}_3=[(3)^2+(4)^2]+[(5)^2+(-2)^2]+[(1)^2+(-3)^2]=64$ ؛ وبذلك $\|u\|=8$.

148.1 أوجد $\|u\|$ من أجل $u=(4-i,2i,3+2i,1-5i)$ في C^4.

■ $\|u\|^2=[4^2+(-1)^2]+[2^2]+[3^2+2^2]+[1^2+(-5)^2]=60$ أو $\|u\|=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$.

149.1 من أجل $u=(7-2i,2+5i)$ و $v=(1+i,-3-6i)$ في C^2، أوجد (أ) $u\cdot v$ ، (ب) $\|u\|$ ، (ج) $\|v\|$.

■ (أ)
$$u\cdot v=(7-2i)(\overline{1+i})+(2+5i)(\overline{-3-6i})$$
$$=(7-2i)(1-i)+(2+5i)(-3+6i)=5-9i-36-3i=-31-12i$$

(ب) $\|u\|=\sqrt{7^2+(-2)^2+2^2+5^2}=\sqrt{82}$

(ج) $\|v\|=\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2+(-6)^2}=\sqrt{47}$

150.1 أوجد $u\cdot v$ من أجل $u=(2+3i,4-i,2i)$ و $v=(3-2i,5,4-6i)$ في C^3.

■
$$u\cdot v=(2+3i)(\overline{3-2i})+(4-i)(\bar{5})+(2i)(\overline{4-6i})$$
$$=(2+3i)(3+2i)+(4-i)(5)+(2i)(4+6i)=13i+20-5i-12+8i=8+16i$$

151.1 أوجد $u\cdot u$ و $\|u\|$ إذا كان $u=(2+3i,4-i,2i)$ في C^3.

■
$$u\cdot u=(2+3i)(\overline{2+3i})+(4-i)(\overline{4-i})+(2i)(\overline{2i})$$
$$=(2+3i)(2-3i)+(4-i)(4+i)+(2i)(-2i)=13+17+4=34$$

وبذلك $\|u\|=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{34}$.

152.1 اثبت أن $u\cdot v=\overline{v\cdot u}$ ، من أجل u، v إختياريين في C^n.

■ طبق المسائل 128.1-130.1 على تعريف المسألة 143.1:

$$\overline{u\cdot v}=\overline{\sum z_k\bar{w}_k}=\sum \bar{z}_k w_k=\sum w_k\bar{z}_k=v\cdot u$$

الآن، بادل بين u و v [أو خذ مرافقي الطرفين].

153.1 اثبت أن $(zu)\cdot v = z(u\cdot v)$، من أجل u و v إختياريين في C^n، و z عدد إختياري في C.

■ بما أن

$$zu = (zz_1, zz_2, \ldots, zz_n)\,,$$
$$(zu)\cdot v = zz_1\bar{w}_1 + zz_2\bar{w}_2 + \cdots + zz_n\bar{w}_n = z(z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n) = z(u\cdot v)$$

أو في ترميز المسألة 143.1،

$$(zu)\cdot v = \sum (zz_k)\bar{w}_k = z\left(\sum z_k\bar{w}_k\right) = z(u\cdot v)$$

154.1 اثبت أن $u\cdot(zv) = \bar{z}(u\cdot v)$.

■ نجد، من المسألتين 152.1 و 153.1 أن

$$u\cdot(zv) = \overline{(zv)\cdot u} = \overline{z(v\cdot u)} = \bar{z}(\overline{v\cdot u}) = \bar{z}(u\cdot v)$$

155.1 ليكن $u_1 = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ، $u_2 = (z_1', z_2', \ldots, z_n')$، و $v = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ اثبت أن:

$$(u_1 + u_2)\cdot v = u_1\cdot v + u_2\cdot v$$

■ لأن $u_1 + u_2 = (z_1 + z_1', z_2 + z_2', \ldots, z_n + z_n')$

$$(u_1 + u_2)\cdot v = \sum_{k=1}^{n}(z_k + z_k')\bar{w}_k = \sum_{k=1}^{n}(z_k\bar{w}_k + z_k'\bar{w}_k) = \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k + \sum_{k=1}^{n} z_k'\bar{w}_k = u_1\cdot v + u_2\cdot v$$

156.1 من أجل u و v_1 و v_2 في C^n، اثبت أن $u\cdot(v_1 + v_2) = u\cdot v_1 + u\cdot v_2$.

■
$$u\cdot(v_1 + v_2) = \overline{(v_1 + v_2)\cdot u} = \overline{v_1\cdot u + v_2\cdot u} = \overline{v_1\cdot u} + \overline{v_2\cdot u} = u\cdot v_1 + u\cdot v_2$$

157.1 لنفترض أن $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$ ينتمون إلى C^n وأن $z_1, z_2, \ldots, z_p, w_1, w_2, \ldots, w_p$ ينتمون إلى C. اثبت أن:

$$\left(\sum_{j=1}^{p} z_j u_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{q} w_k v_k\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} z_j\bar{w}_k(u_j\cdot v_k)$$

(خطائية الجداء الداخلي).

■ لدينا، في R^n، أن $u\cdot kv = k(u\cdot v)$ ؛ في حين أنه في C^n يكون لدينا $u\cdot kv = \bar{k}(u\cdot v)$. القانونان التوزيعيان متطابقان في الفضائين. ينتج عن ذلك أن صيغة الخطائية في المسألة 57.1 تتحقق في C^n إذا استبدلنا b_k في المجموع المزدوج بمرافقاتها $\bar{b}_k$.

12.1 الجداء التقاطعي (الخارجي أو المتجهي):

يعرّف الجداء المتجهي من أجل متجهات في R^3 فقط.

158.1 احسب قيمة محددات المرتبة الثانية التالية:

(أ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

■ (أ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = (3)(9) - (4)(5) = 7$ (ب) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$ (ج) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$

159.1 احسب سالب محددات المرتبة الثانية التالية:

(أ) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$

[إرشاد: $-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc) = bc - ad$ ، يسمى ناتج طرح الجداء ad للعنصرين القطريين من الجداء bc للعنصريين غير القطريين بـ «أخذ المحددة إرتدادياً».]

■ (أ) $-\begin{vmatrix}3 & 6\\4 & 2\end{vmatrix} = (6)(4)-(3)(2) = 18$ (ب) $-\begin{vmatrix}7 & -5\\3 & 2\end{vmatrix} = -15-14 = -29$

(ج) $-\begin{vmatrix}4 & -1\\8 & -3\end{vmatrix} = -8+12 = 4$ (د) $-\begin{vmatrix}-4 & -3\\2 & -2\end{vmatrix} = -18-8 = -26$

160.1 ليكن $u=(a_1, a_2, a_3)$ و $v=(b_1, b_2, b_3)$ متجهين في $\mathbf{R}^3$. عرِّف الجداء المتجهي (التقاطعي) لـ u و v، والذي يرمز له بـ $u \times v$.

■ الجداء المتجهي (أو التقاطعي أو الخارجي) هو المتجه $u \times v = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. ويمكن التعبير عن مركبات $u \times v$ كمحددات، وذلك كما يلي. ضع المتجه $v=(b_1, b_2, b_3)$ تحت المتجه $u=(a_1, a_2, a_3)$، لتكوين الصفيفة

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$$

إذن
$$u \times v = \left(\begin{vmatrix}\boxed{a_1} & a_2 & a_3\\ \boxed{b_1} & b_2 & b_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_1 & \boxed{a_2} & a_3\\ b_1 & \boxed{b_2} & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \boxed{a_3}\\ b_1 & b_2 & \boxed{b_3}\end{vmatrix}\right)$$

أي، غطِّ العمود الأول في الصفيفة واحسب المحددة لتحصل على المركبة الأولى لـ $u \times v$؛ وغطِّ العمود الثاني واحسب المحددة إرتدادياً للحصول على المركبة الثانية؛ ثم غطِّ العمود الثالث واحسب المحددة لتحصل على المركبة الثالثة.

161.1 أوجد $u \times v$، حيث $u = (1,2,3)$ و $v = (4,5,6)$.

■ $$u \times v = \left(\begin{vmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ \boxed{4} & 5 & 6\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & \boxed{2} & 3\\ 4 & \boxed{5} & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2 & \boxed{3}\\ 4 & 5 & \boxed{6}\end{vmatrix}\right) = (12-15, 12-6, 5-8) = (-3, 6, -3)$$

162.1 أوجد $u \times v$، حيث $u = (7,3,1)$ و $v = (1,1,1)$.

■ $$u \times v = \left(\begin{vmatrix}\boxed{7} & 3 & 1\\ \boxed{1} & 1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}7 & \boxed{3} & 1\\ 1 & \boxed{1} & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}7 & 3 & \boxed{1}\\ 1 & 1 & \boxed{1}\end{vmatrix}\right) = (3-1, 1-7, 7-3) = (2, -6, 4)$$

163.1 أوجد $u \times v$، حيث $u = (-4,12,2)$ و $v = (6,-18,-3)$.

■ $$u \times v = \left(\begin{vmatrix}\boxed{-4} & 12 & 2\\ \boxed{6} & -18 & -3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-4 & \boxed{12} & 2\\ 6 & \boxed{-18} & -3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 12 & \boxed{2}\\ 6 & -18 & \boxed{-3}\end{vmatrix}\right) = (-36-(-36), 12-12, 72-72)$$
$$= (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

لاحظ هنا أن $v = -\frac{3}{2}u$ ؛ إرجع إلى المسالة 171.1.

في المسائل 164.1-169.1، تكون $u=(a_1, a_2, a_3)$، $v=(b_1, b_2, b_3)$، و $w=(c_1, c_2, c_3)$ متجهات في $\mathbf{R}^3$، ويكون $k \in \mathbf{R}$.

164.1 اثبت أن: $u \times v = -(v \times u)$.

■ $$u \times v = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

إذن $$-(v \times u) = -(b_2a_3 - b_3a_2, b_3a_1 - b_1a_3, b_1a_2 - b_2a_1) = (b_3a_2 - b_2a_3, b_1a_3 - b_3a_1, b_2a_1 - b_1a_2) = u \times v$$

165.1 اثبت أن: $(ku) \times v = k(u \times v) = u \times (kv)$.

■ $ku = (ka_1, ka_2, ka_3)$؛ وبالتالي،
$$(ku) \times v = (ka_1b_2 - ka_2b_1, ka_3b_1 - ka_1b_3, ka_1b_2 - ka_2b_1) = k(a_1b_2 - a_2b_1, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2, -a_2b_1) = k(u \times v)$$

وبالمثل، يكون لدينا $u \times (kv) = k(u \times v)$.

166.1 اثبت أن: $u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w)$.

■ ينتج البرهان مباشرة من تعريف الجمع المتجهي وحقيقة أن مركبات جداء متجهي خطية بالنسبة لمركبات أي واحد من المتجهين.

167.1 اثبت أن: $(v+w)\times u = (v\times u) + (w\times u)$.

■ من المسألتين 164.1 و 166.1، نجد أن

$$(v+w)\times u = -[u\times(v+w)] = -[(u\times v)-(u\times w)] = -(u\times v)-(u\times w) = (v\times u)+(w\times u)$$

168.1 اثبت أن: $(u\times v)\times w = (u.w)v-(v.w)u$.

■ لدينا هنا، $u.w = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$ و $v.w = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$. ليكن $(u.w)v-(v.w)u = (x_1,x_2,x_3)$؛ إذن

$$x_1 = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a21 = (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)a_1$$

وبالمثل،

$$x_2 = (a_1c_1 + a_3c_3)b_2 - (b_1c_1 + b_3c_3)a_2 \qquad x_3 = (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2)a_3$$

نكتب $(u\times v)\times w = (y_1,y_2,y_3)$؛ إذن

$$y_1 = (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 = a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2$$
$$= (b_1(a_3c_3 + a_2c_2) - a_1(b_3c_3 + b_2c_2)$$

وبذلك، يكون لدينا $y_1 = x_1$، وبالمثل، $y_2 = x_2$ و $y_3 = x_3$.

169.1 اثبت أن $u\times v$ متعامد مع u و v.

■

$$u.(u\times v) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

إذن، $u\times v$ متعامد مع u وبالمثل، $u\times v$ متعامد مع v.

170.1 بين أن $u\times u = \mathbf{0}$ من أجل أي متجه u.

■ نجد من المسألة 164.1 أن $u\times u = -(u\times u)$، وبالتالي، $u\times u = \mathbf{0}$.

171.1 بيِّن أن متجهين في $\mathbf{R}^3$ يكونان مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا كان الجداء المتجهي لهما متجهاً صفرياً.

■ أن الارتباط الخطي بين متجهين u و v يعني إما $u = kv$ من أجل عدد سلمي k، أو $v = lu$ من أجل عدد سلمي l. لنفترض، إذن، أن $u = kv$. لدينا، من المسألتين 165.1 و 170.1، أن $u\times v = (kv)\times v = k(v\times v) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$، ونحصل على نتيجة مماثلة إذا $v = lu$. وبالعكس، لنفترض أن $u\times v = \mathbf{0}$. إذا $u = \mathbf{0}$، إذن $u = kv$ من أجل $k = 0$. إذا $u \neq \mathbf{0}$، نضع $w = u$ في المسألة 168.1 لنحصل على

$$\mathbf{0} = (u\cdot u)v - (v\cdot u)u \qquad \text{أو} \qquad v = \frac{v\cdot u}{u\cdot u}u = lu$$

172.1 أوجد متجه وحدة u يكون متعامداً مع $v = (1,3,4)$ و $w = (2,-6,5)$.

■ تأسيسا على المسألة 169.1، احسب أولاً $v\times w$. الصفيفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{تعطي} \quad v\times w = (-15+24, 8+5, -6-6) = (9,13,-12)$$

الآن، ناظم $v\times w$ يعطي $u = (9/\sqrt{394}, 13/\sqrt{394}, -12/\sqrt{394})$

المسائل 173.1-176.1 تستخدم النقط $P_1(1,2,3)$، $P_2(2,5,-1)$، و $P_3(5,3,1)$ في $\mathbf{R}^3$.

173.1 أوجد القطعة المستقيمة الموجهة (المتجه) u من P_1 إلى P_2.

■ $u = P_2-P_1 = (2,5,-1)-(1,2,3) = (1,3,-4)$.

174.1 أوجد القطعة المستقيمة الموجهة (المتجه) v من P_1 إلى P_3.

■ $v = P_3-P_1 = (5,3,1) - (1,2,3) = (4,1,-2)$.

175.1 أوجد متجها w يكون ناظميا على المستوى H الذي يحتوي النقط P_1 و P_2 و P_3.

■ يحتوي H على المتجهين u و v المحددين أعلاه، وبالتالي، يكون u×v ناظميا على H. الصفيفة

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ تعطي $w = u \times v = (-6+4, -16+2, 1-12) = (-2, -14, 11)$.

176.1 أعط معادلةً للمستوى H في المسألة 175.1.

■ استخدم النقطة $P_1(1,2,3)$ والاتجاه الناظمي w للحصول على

$$-2(x-1)-14(y-2)-11(z-3)=0 \quad \text{أو} \quad 2x+14y+11z=63$$

177.1 اثبت متطابقة لاجرانج/ Lagrange's identity، $\|u\times v\|^2 = (u.u)(v.v)-(u.v)^2$.

■ إذا $u=(a_1,a_2,a_3)$ و $v=(b_1,b_2,b_3)$، إذن

$$\|u\times v\|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 \qquad (1)$$

$$(u.u)(v.v) - (u.v)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \qquad (2)$$

يفك الطرف الأيمن لكل من (1) و (2)، نحصل على المتطابقة المطلوبة.

178.1 بين أن $\|u\cdot v\| = \|u\|\,\|v\| \sin\theta$، حيث θ الزاوية بين u و v.

■ لدينا، من المسألة 79.1، $u\cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$. إذن، وبواسطة المسألة 177.1، يكون لدينا

$$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta = \|u\|^2\|v\|^2(1-\cos^2\theta) = \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta$$

نأخذ الجذور التربيعية، فنحصل على نتيجتنا.

الفصل 2
جبر المصفوفات

يستخدم هذا الفصل الحروف A، B، C... لترمز للمصفوفات، والحروف الصغيرة a، b، c، x، y،... لترمز للأعداد السلمية. وستكون الأعداد السلمية حقيقية، إلا إذا ذكر غير ذلك، بمعنى أن المصفوفات تكون معرّفة فوق $\mathbb{R}$.

1.2 المصفوفات

1.2 أوجد صفوف وأعمدة وحجم المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

■ الصفوف هي السطور الأفقية للأعداد؛ يوجد صفان: $(1\ 2\ 3)$ و $(4\ 5\ 6)$. والأعمدة هي الخطوط الرأسية للأعداد؛ يوجد ثلاثة أعمدة:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

أما حجم A فهو 2×3 [تقرأ: 2 في 3]، أي عدد الصفوف في عدد الأعمدة.

2.2 يستخدم الترميز $A = (a_{ij})_{m.n}$ [أو ببساطة $A = (a_{ij})$] لترمز للمصفوفة $m\times n$. ما الذي يعنيه الدليل السفلي الأول i، والدليل السفلي الثاني j؟

■ السلمي a_{ij} هو عنصر A الذي يقع في الصف i والعمود j. وبذلك، يخبرنا الدليل الأول عن صف العنصر، والدليل الثاني عن عموده.

3.2 إذا أعطينا المصفوفة $A = (a_{ij})$، أوجد موضع (أ) a_{35} (ب) $a_{4,12}$ (ج) $a_{0,11}$ (د) $a_{13,-4}$.

■ (أ) a_{35} تقع في الصف الثالث والعمود الخامس. (ب) $a_{4,12}$ يظهر في الصف 4 والعمود 12. [لاحظ أننا نحتاج هنا إلى فاصلة للتمييز بين الدليلين]. (ج) و (د): العددان السلميان لا يمكن أن يكونا عنصريين في A، لأن الأدلة في مصفوفة يجب أن تكون، بالاتفاق، أعداداً صحيحة موجبة.

4.2 إذا أعطينا مصفوفتين A و B، متى يكون $A = B$؟

■ تكون مصفوفتان متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الحجم، وكانت المداخل المتقابلة متساوية.

5.2 أوجد x، y، z، w إذا $\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

■ ساوِ بين المداخل المتقابلة:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$$

إن حل منظومة المعادلات هو: $x=2$، $y=1$، $z=3$، $w=-1$.

6.2 أي المصفوفات التالية متساوية (إن وجدت)؟

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

■ بالرغم من أن كل المصفوفات الأربع 2×2 وتحتوي السلميات 1، 2، 3، 4، إلا أنه لا يتساوى فيها إثنان، عنصرا عنصرا.

7.2 المصفوفة الصفرية $m\times n$، التي يرمز لها بـ $0_{m.n}$ أو ببساطة 0، هي المصفوفة التي كل عناصرها أصفار. أوجد x، y، z، t إذا

$$\begin{pmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

■ ساو كل المداخل للصفر، لتحصل على المنظومة

$$x+y=0 \qquad z+3=0 \qquad y-4=0 \qquad z+w=0$$

ويكون حلّها $x=-4$، $y=4$، $z=-3$، $w=3$.

8.2 يعرّف سالب مصفوفة $m\times n$، $A=(a_{ij})$، بأنها مصفوفة $m\times n$ $-A\equiv(-a_{ij})$. أوجد سالب كل مصفوفة من المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ خذ سالب كل عنصر:

$$-A=\begin{pmatrix} -1 & -(-3) & -4 & -7 \\ -2 & -(-5) & -0 & -(-8) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & -7 \\ -2 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad -\mathbf{0}=\begin{pmatrix} -0 & -0 & -0 \\ -0 & -0 & -0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

9.2 بيّن أن $-(-A)=A$، من أجل أي مصفوفة A.

■ $-(-A)=-(-a_{ij})_{m.n}=(-(-a_{ij}))_{m.n}=(a_{ij})_{m.n}=A$

10.2 نقول عن مصفوفة A ذات صف واحد فقط بأنها «مصفوفة صفية» أو «متجه صفي» ويرمز لها غالباً بواسطة $A=(a_1\ a_2 \ldots\ a_n)$؛ ونحذف الدليل السفلي الأول لها لأنه يجب أن يكون واحداً. بالمثل، نقول عن مصفوفة B ذات عمود واحد فقط بأنها «مصفوفة عمودية» أو «متجه عمودي» ونرمز لها غالباً بواسطة

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ناقش الفرق، إن وجد، بين الشيئين التاليين:

$$v=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad u=(1\ 2\ 3)$$

■ إذا نظرنا إلى المتجهين بأنها في $\mathbf{R}^3$، u و v يمكن اعتبارهما متساويين. ولكنهما، بصفتهما مصفوفتين، لا يمكن أن يتساويا، لأن لهما حجمين مختلفين.

2.2 جمع المصفوفات والضرب السلمي

11.2 إذا كانت $A=(a_{ij})_{m.n}$ و $B=(b_{ij})_{m.n}$ مصفوفتين لهما نفس الحجم، فإن مجموعهما يعرّف بـ $A+B\equiv(a_{ij}+b_{ij})_{m.n}$. أوجد مجموع

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

■ اجمع المداخل المتقابلة:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

12.2 أوجد A+B إذا $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

■ المجموع ليس معرّفا، لأن حجمي المصفوفتين مختلفان.

13.2 أوجد A+B إذا $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}$

■ إجمع المداخل المتقابلة:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 2+(-1) & 3+2\\ 4+0 & 5+3 & 6+(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

14.2 إجمع $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -5 & 1 & -1\end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix}3 & -5 & 6 & -1\\ 2 & 0 & -2 & -3\end{pmatrix}$

■ $$C+D=\begin{pmatrix}1+3 & 2+(-5) & (-3)+6 & 4+(-1)\\ 0+2 & (-5)+0 & 1+(-2) & (-1)+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 3 & 3\\ 2 & -5 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

15.2 عرّف من جديد سالب مصفوفة [المسألة 8.2] بدلالة الجمع المصفوفي.

■ ان سالب مصفوفة معطاة A هو المصفوفة [الوحيدة] التي يكون مجموعها مع A يساوي المصفوفة الصفرية، أي أن $A+(-A)=0$. [لاحظ أن التعريف بهذه الطريقة لِـ $-A$ يتفادى الإشارة إلى عناصر A].

16.2 إذا $A=(a_{ij})_{m.n}$ و k عدد سلمي، فإن المصفوفة $kA\equiv(ka_{ij})_{m.n}$ تسمى «جداء» A بالعدد السلمي k. أوجد 3A و $-5A$، حيث

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

■ نضرب كل مدخل في العدد السلمي المعطى:

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot3\\ 3\cdot4 & 3\cdot5 & 3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 12 & 15 & -18\end{pmatrix}$$

$$-5A=\begin{pmatrix}-5\cdot1 & -5\cdot(-2) & -5\cdot3\\ -5\cdot4 & -5\cdot5 & -5\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10 & -15\\ -20 & -25 & 30\end{pmatrix}$$

17.2 احسب: (أ) $3\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ (ب) $-2\begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

■ (أ) $$3\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2 & 3\cdot4\\ 3\cdot(-3) & 3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 12\\ -9 & 3\end{pmatrix}$$

(ب) $$-2\begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot1 & (-2)\cdot7\\ (-2)\cdot2 & (-2)\cdot(-3)\\ (-2)\cdot0 & (-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -14\\ -4 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

18.2 يعرّف «الفرق»، A−B، بين مصفوفتين A و B لهما حجم واحد، بواسطة $A-B\equiv A+(-B)$. أوجد $A-B$ إذا

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8\\ 1 & -2 & -6\end{pmatrix}$$

■ $$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3 & -8\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

19.2 أوجد 2A−3B، حيث $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}$

■ ننجز أولاً عمليات الضرب السلمي، ثم نجمع مصفوفياً

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 0 & -6\\ 21 & -3 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}$$

[لاحظ اننا نضرب B في −3 ثم نجمع، بدلاً من ضرب B في 3 ثم نطرح. يجعلنا هنا نتفادى الأخطاء عادة]

20.2 إذا $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ أوجد 3A + 4B−2C.

■ ننجز أولا عمليات الضرب السلمي، ثم نجمع مصفوفياً:

$$3A+4B-2C=\begin{pmatrix}6 & -15 & 3\\ 9 & 0 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -8 & -12\\ 0 & -4 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -25 & -5\\ 7 & -2 & 10\end{pmatrix}$$

21.2 أوجد x، y، z، و w إذا $3\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{pmatrix}$.

■ أولا، نكتب كل طرف كمصفوفة واحدة:

$$\begin{pmatrix}3x & 3y\\ 3z & 3w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4 & x+y+6\\ z+w-1 & 2w+3\end{pmatrix}$$

ثم نساوي بين المداخل المتقابلة لنحصل على منظومة من أربع معادلات:

$$\begin{aligned}3x&=x+4\\ 3y&=x+y+6\\ 3z&=z+w-1\\ 3w&=2w+3\end{aligned}\qquad \text{أو}\qquad \begin{aligned}2x&=4\\ 2y&=6+x\\ 2z&=w-1\\ w&=3\end{aligned}$$

الحل هو: x = 2، y = 4، z = 1، w = 3.

22.2 لتكن $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -3\end{pmatrix}$. أوجد $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ بحيث أن 2A = 3B−2C.

■ **طريقة 1**: نحسب أولاً 3B−2C:

$$3B-2C=\begin{pmatrix}15 & -6\\ 12 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -10\\ 0 & 27\end{pmatrix}$$

ثم نضع 2A = 3B−2C:

$$\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2z & 2w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -10\\ 0 & 27\end{pmatrix}$$

نساوي بين المداخل المتقابلة: 2x = 13، 2y = − 10، 2z = 0، 2w = 27. وبالتالي، x = 13/2، y = −5، z = 0، و w = 27/2؛ أي أن

$$A=\begin{pmatrix}13/2 & -5\\ 0 & 27/2\end{pmatrix}$$

طريقة 2: طبق المبرهنة 1.2 [برهنت في المسائل 24.2-31.2] للحصول مباشرة على A = (3/2)B−C.

23.2 أوجد 2A + 5B، حيث $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & -6\\ 3 & 7 & -8\end{pmatrix}$.

■ رغم أن 2A و 5B معرفتان، إلا أن المجموع 2A+5B ليس معرّفا لأن 2A و 5B لهما حجمان مختلفان.

المبرهنة 1.2: لتكن مجموعة كل المصفوفات m×n فوق حقل K من السلّميات. إذن، من أجل أي مصفوفات $A=(a_{ij})$، $B=(b_{ij})$، و $C=(c_{ij})$، وأي عددين سلميين k_1، k_2 في K، يكون لدينا

(i) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ii) $A+0=A$ (iii) $A+(-A)=0$ (iv) $A+B=B+A$

(v) $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$ (vi) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$ (vii) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$ (viii) $1A=A$

24.2 اثبت (i) في المبرهنة 1.2.

■ إن المدخل -ij في A+B هو $a_{ij} + b_{ij}$؛ وبالتالي، يكون $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$ المدخل -ij لـ (A+B)+C. أما المدخل -ij لـ B+C فهو $b_{ij} + c_{ij}$؛ وبذلك يكون $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ المدخل -ij لـ A+(B+C). ولكن، وتأسيسا على القانون التوزيعي للجمع فوق K، يكون لدينا

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

وبالتالي، يكون لـ (A+B)+C و A+(B+C). نفس المداخل -ij؛ إذن، $(A+B)+C = A+(B+C)$.

25.2 اثبت (ii) في المبرهنة 1.2.

■ المدخل -ij لـ A+0 هو $a_{ij} + 0 = a_{ij}$. وبذلك يكون لـ A+0 و A نفس المداخل -ij، وبالتالي $A+0 = A$.

26.2 اثبت (iii) في المبرهنة 1.2.

■ انظر المسألة 15.2.

27.2 اثبت (iv) في المبرهنة 1.2.

■ إن المدخل -ij لـ A+B هو $a_{ij} + b_{ij}$، والمدخل -ij لـ B+A هو $b_{ij} + a_{ij}$. ولكننا، بواسطة القانون التوزيعي في K، نجد أن $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. وبذلك، يكون لـ A + B و B + A نفس المداخل -ij، وبالتالي $A + B = B + A$.

28.2 اثبت (v) في المبرهنة 1.2.

■ ان المدخل -ij لـ A+B هو $a_{ij} + b_{ij}$؛ وبالتالي، $k_1(a_{ij} + b_{ij})$ يكون المدخل -ij لـ $k_1(A+B)$. أما المدخلان -ij لـ k_1A و k_1B فهما k_1a_{ij}، و k_1b_{ij}؛ على الترتيب؛ وبالتالي، يكون $k_1a_{ij} + k_1b_{ij}$ المدخل -ij لـ $k_1A + k_1B$. ولكن لدينا، من القانون التوزيعي في K، $k_1(a_{ij} + b_{ij}) = k_1a_{ij} + k_1b_{ij}$. وبذلك، يكون لـ $k_1A + k_1B$ و $k_1(A + B)$ نفس المداخل -ij؛ وبالتالي، $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$.

29.2 اثبت (vi) في المبرهنة 1.2.

■ يتم البرهان، كما في المسألة 28.2، باستخدام القانون التوزيعي في K.

30.2 اثبت (vii) في المبرهنة 1.2.

■ المدخل -ij لـ $(k_1k_2)A$ هو $(k_1k_2)a_{ij}$. والمدخل -ij لـ k_2A هو k_2a_{ij}، وبذلك يكون $k_1(k_2a_{ij})$ المدخل -ij لـ $k_1(k_2A)$. ولكن لدينا، من القانون التجميعي للضرب في K، أن $(k_1k_2)a_{ij} = k_1(k_2a_{ij})$. وبذلك، يكون لـ $(k_1k_2)A$ و $k_1(k_2A)$ نفس المداخل -ij، وبالتالي $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$.

31.2 اثبت (viii) في المبرهنة 1.2.

■ المدخل -ij لـ 1.A هو $1.a_{ij} = a_{ij}$. بما أن 1.A و A لهما نفس المداخل -ij، فهما إذن متساويان.

32.2 علق على الفرق، إن وجد، بين العلامات + في (vi) من المبرهنة 1.2.

■ تدل علامة + ، في الطرف الأيسر، على جمع الاعداد السلمية في K؛ أما في الطرف الأيمن، فتدل على جمع المصفوفات في M.

33.2 اثبت أن $0A = \mathbf{0}$، من أجل أي مصفوفة A.

■ من (viii) و (vi) و (ii)، في المبرهنة 1.2، نجد أن

$$A + 0A = 1A + 0A = (1 + 0)A = 1A = A$$

ويتبع البرهان من إضافة $-A$ إلى الطرفين.

34.2 بيّن أن $(-1)A = -A$.

■ لدينا $A + (-1)A = 1A + (-1)A = (1 + (-1))A = 0A = 0$، حيث تنتج الخطوة الأخيرة من المسألة 33.2. الآن، أضف $-A$ إلى الطرفين.

35.2 بيّن أن $A+A = 2A$ و $A+A+A = 3A$.

■ نستخدم (vi) و (viii) في المبرهنة 3.2، $2A = (1+1)A = 1A + 1A = A + A$. بالمثل، $3A = (2+1)A = 2A + 1A = A+A+A$.

36.2 اثبت أن $\sum_{k=1}^{n} A = A + A + \cdots + A = nA$ من أجل أي عدد موجب n.

■ يتم البرهان بالاستقراء. تظهر الحالة $n = 1$ في المبرهنة 1.2(viii). نفترض أن $n>1$، وأن المبرهنة تتحقق من أجل $n-1$. إذن

$$\sum_{k=1}^{n} A = \sum_{k=1}^{n-1} A + A = (n-1)A + 1A = [(n-1)+1]A = nA$$

3.2 الضرب المصفوفي

37.2 إن «جداء» مصفوفة صفية ومصفوفة عمودية، لهما نفس العدد من العناصر، هو الجداء الداخلي لهما كما هو معرّف في المسألة 45.1:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

إحسب:

(أ) $(8, -4, 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ب) $(6, -1, 7, 5)\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ج) $(3, 8, -2, 4)\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

و (د) $(1,8,3,4)(6,1,-3,5)$.

■ (أ) نضرب المداخل المتقابلة ثم نجمعها:

$$(8, -4, 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (8)(3) + (-4)(2) + (5)(-1) = 24 - 8 - 5 = 11$$

(ب) نضرب المداخل المتقابلة ثم نجمعها:

$$(6, -1, 7, 5)\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 24 + 9 - 21 + 10 = 22$$

(ج) لا يكون الجداء معرّفا عندما لا يكون للمصفوفتين الصفية والعمودية نفس العدد من العناصر. (د) جداء مصفوفتين صفيتين ليس معرّفا.

38.2 لنرمز بـ $(r\times s)$ إلى مصفوفة حجمها $r\times s$. أوجد حجم كل جداء، عندما يكون الجداء معرّفا:

(أ) $(2\times3)(3\times4)$ (ج) $(1\times2)(3\times1)$ (هـ) $(3\times4)(3\times4)$

(ب) $(4\times1)(1\times2)$ (د) $(5\times2)(2\times3)$ (و) $(2\times2)(2\times4)$

▩ إن مصفوفة $m\times p$ تكون قابلة للضرب من اليمين في مصفوفة $q\times n$ عندما يكون $p=q$ فقط، ويكون الجداء عندئذ مصفوفة $m\times n$. (أ) 2×4؛ (ب) 4×2؛ (ج) غير معرّف؛ (د) 5×3؛ (هـ) غير معرّف؛ (و) 2×4.

39.2 لنفترض أن $A=(a_{ik})$ مصفوفة $m\times p$ و $B=(b_{kj})$ مصفوفة $p\times n$. نعرّف الجداء $AB\equiv(c_{ij})$ بأنه المصفوفة $m\times n$ بحيث أن

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

أي أن المدخل -ij لـ AB هو جداء المتجه الصفي i في A والمتجه العمودي j في B. أوجد الجداء AB من أجل

$$B=\begin{pmatrix}2&0&-4\\3&-2&6\end{pmatrix}\qquad و \qquad A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

▩ بما أن A تكون 2×2 و B تكون 2×3، فإن الجداء AB يعرّف بأنه مصفوفة 2×3. للحصول على المداخل في الصف الأول لـ AB، نضرب الصف الأول $(1\ 3)$ في A بالأعمدة $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ في B على الترتيب:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 3}\\2\quad -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-4\\6\end{matrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1)(2)+(3)(3)&(1)(0)+(3)(-2)&(1)(-4)+(3)(6)\\ & & \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+9&0-6&-4+18\\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-6&14\\ & & \end{pmatrix}$$

وللحصول على المداخل في الصف الثاني في AB، نضرب الصف الثاني $(2,-1)$ لـ A في أعمدة B، على الترتيب:

$$\begin{pmatrix}1\quad 3\\\boxed{2\quad -1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-4\\6\end{matrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-6&14\\(2)(2)+(-1)(3)&(2)(0)+(-1)(-2)&(2)(-4)+(-1)(6)\end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون لدينا

$$AB=\begin{pmatrix}11&-6&14\\1&2&-14\end{pmatrix}$$

40.2 أوجد الجداء BA للمصفوفتين A و B في المسألة 39.2.

▩ لاحظ أن B تكون 2×3 و A تكون 2×2. بما أن العددين الداخليين 3 و 2 غير متساويين، فإن الجداء BA لا يكون معرّفاً.

41.2 أوجد الجداء AB، حيث $A=(2,1)$ و $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&5&-3\end{pmatrix}$

▩ بما أن A تكون 1×2 و B تكون 2×3، فإن الجداء AB معرّف على أنه مصفوفة 1×3، أو مصفوفة صفية ذات 3 مركبات. للحصول على مركبات AB، نضرب صف A في كل عمود لـ B:

$$AB=(\boxed{2\quad 1})\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}}\end{pmatrix}=((2)(1)+(1)(4),(2)(-2)+(1)(5),(2)(0)+(1)(-3))=(6,1,-3)$$

42.2 أوجد الجداء AB، إذا

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}$$

▩ بما أن A مصفوفة 3×2 و B مصفوفة 2×3، فإن الجداء AB معرّف بأنه مصفوفة 3×3. للحصول على الصف الأول لـ AB، نضرب الصف الأول في A في كل عمود لـ B على الترتيب:

$$\begin{pmatrix}\boxed{2\quad -1}\\1\quad 0\\-3\quad 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3&-4-4&-10+0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-8&-10\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

وللحصول على صف AB الثاني، نضرب صف A الثاني في كل عمود لـ B على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

ولكي نحصل على الصف الثالث في AB، نضرب الصف الثالث لـ A في كل عمود لـ B على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

43.2 أوجد الجداء BA، حيث A و B المصفوفتين في المسألة 42.2.

■ بما أن B مصفوفة 2×3 و A مصفوفة 3×2، فإن الجداء BA يعرّف بأنه مصفوفة 2×2. للحصول على صف BA الأول، نضرب صف B الأول في كل واحد من أعمدة A على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad -5} \\ 3 \quad 4 \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\-3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \end{pmatrix}$$

أما الحصول على الصف الثاني لـ BA، فنضرب الصف الثاني لـ B في كل عمود من أعمدة A على الترتيب:

$$\begin{pmatrix} 1 \quad -2 \quad -5 \\ \boxed{3 \quad 4 \quad 0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\\-3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون لدينا

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

44.2 أوجد حجم الجداء AB، حيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

■ بما أن A مصفوفة 2×3 و B مصفوفة 3×4 فإن الجداء AB يكون مصفوفة 2×4.

45.2 لنفترض أن $AB = (c_{ij})$ من أجل المصفوفتين A و B في المسألة 44.2. أوجد (أ) c_{23}، (ب) c_{14}، (ج) c_{21}، (د) c_{32}.

■ إن العنصر c_{ij}، في المدخل ij- لـ AB، هو جداء الصف i لـ A في العمود j لـ B.

(أ)
$$c_{23} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(3) + (-3)(-2) = 0 + 0 + 6 = 6$$

(ب)
$$c_{14} = (2, -1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2)(1) + (-1)(-1) + (0)(0) = 2 + 1 + 0 = 3$$

(ج)
$$c_{21} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1)(1) + (0)(2) + (-3)(4) = 1 + 0 - 12 = -11$$

(د) العنصر c_{32} ليس موجوداً، لأن A وكذلك AB لهما صفان إثنان فقط.

46.2 أوجد AB، حيث

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 6\\ 1 & 3 & -5 & 1\\ 4 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

■ بما أن A مصفوفة 2×3 و B مصفوفة 3×4، فإن الجداء يكون مصفوفة 2×4. نضرب صفوف A في أعمدة B، لنحصل على:

$$AB=\begin{pmatrix}4+3-4 & -2+9-1 & 0-15+2 & 12+3-2\\ 8-2+20 & -4-6+5 & 0+10-10 & 24-2+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & -13 & 13\\ 26 & -5 & 0 & 32\end{pmatrix}.$$

47.2 إرجع إلى المسألة 46.2. لنفترض أن العمود الثالث وحده في الجداء AB هو الذي يهمنا فقط. كيف يمكن حسابه بشكل مستقل؟

■ إن قاعدة ضرب المصفوفات تخبرنا بأن العمود رقم j في الجداء يساوي العامل الأول مضروباً في المتجه العمودي j للثاني. وبذلك، يكون لدينا

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -5\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-15+2\\ 0+10-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\ 0\end{pmatrix}$$

وبالمثل، يكون الصف i للجداء مساوياً للمتجه الصفي i للعامل الأول مضروباً في العامل الثاني.

48.2 أوجد $\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -7\end{pmatrix}$.

■ إن العامل الأول يكون 2×2، والثاني يكون 2×1، وبذلك يكون الجداء مصفوفة 2×1:

$$\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-42\\ -6-35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\ -41\end{pmatrix}$$

49.2 أوجد $\begin{pmatrix}6\\ 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & -3\end{pmatrix}$.

■ الجداء ليس معرّفاً، لأن العامل الأول مصفوفة 2×1 والعامل الثاني مصفوفة 2×2.

50.2 أوجد $(2,-7)\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

■ العامل الأول 1×2 والعامل الثاني 2×2، فيكون الجداء مصفوفة (صفية) 1×2.

$$(2,-7)\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}=(2+21,\ 12-35)=(23,-23)$$

51.2 أوجد $\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}(2,-7)$.

■ الجداء ليس معرّفاً، لأن العامل الأول 2×2 والعامل الثاني 1×2.

52.2 لتكن A مصفوفة $m\times n$، حيث $m>1$ و $n>1$. بافتراض أن u و v متجهان، ناقش الشروط التي تعرّف وفقها (أ) Au، (ب) vA.

■ (أ) يكون الجداء Au معرّفاً فقط عندما يكون u متجهاً عمودياً بـ n من المركبات؛ أي مصفوفة $n\times1$. وفي هذه الحالة، يكون Au متجهاً عمودياً له m من المركبات. (ب) أما الجداء vA فيكون معرّفاً فقط عندما يكون v متجهاً صفياً له m من المركبات؛ أي مصفوفة $1\times m$. وفي حالة مثل هذه، يكون vA متجهاً صفياً بـ n مركبة.

53.2 إحسب $\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}(6\quad -4\quad 5)$.

■ العامل الأول هو 3×1 والعامل الثاني هو 1×3، فيكون الجداء مصفوفة 3×3.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}(6 \quad -4 \quad 5) = \begin{pmatrix} (2)(6) & (2)(-4) & (2)(5) \\ (3)(6) & (3)(-4) & (3)(5) \\ (-1)(6) & (-1)(-4) & (-1)(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 10 \\ 18 & -12 & 15 \\ -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

54.2 إحسب $(6, -4, 5)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

■ العامل الأول 1×3 والعامل الثاني 3×1، فيكون الجداء مصفوفة 1×1، والتي نكتبها غالباً كعدد سلمي:

$$(6, -4, 5)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (12 - 12 - 5) = (-5) = -5$$

المسائل 55.2-58.2 تثبت المبرهنة التالية، حيث نفترض أن الجداءات معرّفة.

المبرهنة 2.2: لنفترض أن A، B، C مصفوفات وأن k عدداً سلمياً. إذن:

(i) $(AB)C = A(BC)$ **القانون التجميعي**

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ **قانون التوزيع من اليسار**

(iii) $(B+C)A = BA + CA$ **قانون التوزيع من اليمين**

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kb)$

55.2 اثبت (i) في المبرهنة 2.2.

■ لتكن $A = (a_{ij})$، $B = (b_{jk})$، و $C = (c_{kl})$. ليكن، إضافة إلى ذلك، $AB = S = (S_{ik})$ و $BC = T = (t_{jt})$.

إذن

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \qquad t_{jl} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}$$

الآن، نضرب S في C، أي (AB) في C، فيكون العنصر في الصف i والعمود l للمصفوفة (AB)C:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

من جهة أخرى، نضرب A في T، أي A في (BC)، فيكون العنصر في الصف i والعمود l في المصفوفة A(BC):

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_{jl} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

وينتج عن القانون التجميعي في حقل السلميات، أن المجموعين المزدوجين متساويان؛ وهذا يثبت (i).

56.2 اثبت (ii) في المبرهنة 2.20.

■ لتكن المصفوفات $A = (a_{ik})$، $B = (b_{kj})$، و $C = (c_{kj})$. [بما أن AB و AC معرّفتان، فإنه يمكننا استخدام نفس الدليل k من أجل أعمدة A وصفوف B و C]. لتكن $D = B + C = (d_{kj})$، $E = AB = (e_{ij})$، و $F = AC = (f_{ij})$. إذن

$$d_{kj} = b_{kj} + c_{kj} \qquad e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad f_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}$$

وبالتالي، يكون المدخل ij- للمصفوفة AB + AC هو

$$e_{ij} + f_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \tag{1}$$

من جهة أخرى، يكون المدخل ij- للمصفوفة AD = A(B+C)

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kk} + c_{kj}) \tag{2}$$

الطرفان الأيمنان في (1) و (2) متساويان، تأسيسا على القانون التوزيعي في الحقل السلمي؛ وهذا يثبت (ii).

57.2 اثبت (iii) في المبرهنة 2.2.

■ البرهان كما في المسألة 56.2. [ليس هناك تمييز بين الضرب من اليمين أو من اليسار في حقل السلّميات].

58.2 اثبت (iv) في المبرهنة 2.2.

■
$$k\left(\sum_r a_{ir} b_{rj}\right) = \sum_r (ka_{ir})b_{rj} = \sum_r a_{ir}(kb_{rj})$$

59.2 أعط مثالاً لمصفوفتين A و B بحيث أن AB و BA تكونان معرفتين، ولهما نفس الحجم، ولكن $AB \neq BA$.

■ لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. إذن

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

إن ضرب المصفوفات لا يخضع لقانون التجميع.

60.2 بيّن أن $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$ [إذا لم تكن A مصفوفة مربعة فإن للمصفوفتين الصفريتين حجمين مختلفين].

■ كل مدخل في $\mathbf{0}A$ يكون الجداء الداخلي لصف صفري لـ $\mathbf{0}$ وعمود في A، ويكون بالتالي العدد السلمي 0. وبذلك، $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$.

61.2 بيّن أن $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

■ كل مدخل لـ $A\mathbf{0}$ جداء داخلي لصف في A وعمود صفري في $\mathbf{0}$، ويكون بالتالي العدد السلمي 0. وبذلك، $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

62.2 بيّن أنه يمكن أن يكون $AB = \mathbf{0}$، حيث $A \neq \mathbf{0}$ و $B \neq \mathbf{0}$.

■ لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ إذن

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 & 2-2 \\ 12-12 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[بتعبير آخر، يكون للضرب المصفوفي قواسم للصفر].

63.2 بيّن أن $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$.

■ **طريقة 1:** نستخدم قانوني التوزيع الأيسر ثم الأيمن،

$$(A + B)(C + D) = (A + B)C + (A + B)D = AC + BC + AD + BD = AC + AD + BC + BD$$

طريقة 2: نستخدم قانوني التوزيع الأيمن ثم الأيسر،

$$(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

4.2 منقول مصفوفة

64.2 يُعرف «منقول» مصفوفة A، ونرمز له بـ A^T، بأنه مصفوفة يتحصل عليها بكتابة صفوف A، على الترتيب، كأعمدة. بتعبير آخر، إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة $m \times n$، إذن تكون $A^T = (a^T_{ij})$ مصفوفة $n \times m$ حيث $a^T_{ij} = a_{ji}$، من أجل كل i و j.
أوجد A^T من أجل

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -6\end{pmatrix}$$

■ الصفان الاول والثاني في A يصبحان العمودين الأول والثاني في A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -5\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

أو، بشكل مكافىء، الأعمدة الأول والثاني والثالث في A تصبح الصفوف الأول والثاني والثالث للمصفوفة A^T.

65.2 أوجد منقول المصفوفات:

(أ) $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$

■ (أ) $\begin{pmatrix}a_1 & a_4\\ a_2 & a_3\\ a_3 & a_2\\ a_4 & a_1\end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -4 & 7\end{pmatrix}$

66.2 أوجد u^T، v^T، w^T من المتجهات الصفية $u=(2,4)$، $v=(1,3,5)$، $w=(6,6,6)$.

■ يكون منقول متجه صفي متجهاً عمودياً:

$$u^T=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}\qquad v^T=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}\qquad w^T=\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 6\end{pmatrix}$$

67.2 أوجد المنقول المصفوفي للمتجهات العمودية التالية:

$$u=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\qquad v=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}\qquad w=\begin{pmatrix}-5\\ -6\\ 7\end{pmatrix}$$

■ إن منقول متجه عمودي سيكون متجهاً صفياً: $u^T=(1,1)$، $v^T=(2,4,6)$، $w^T=(-5,-6,7)$.

68.2 إذا أعطيت $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 6 & -7 & -8\end{pmatrix}$ ، أوجد A^T و $(A^T)^T$.

■ أعد كتابة صفوف A كأعمدة لتحصل على A^T، ثم أعد كتابه صفوف A^T كأعمدة لتحصل على $(A^T)^T$:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 3 & -7\\ 5 & -8\end{pmatrix}\qquad (A^T)^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 6 & -7 & -8\end{pmatrix}$$

لاحظ أن $(A^T)^T=A$؛ أنظر المسألة 76.2.

69.2 بيّن أن المصفوفتين AA^T و A^TA معرّفتان من أجل أي مصفوفة A.

■ إذا A مصفوفة m×n، فإن A^T تكون مصفوفة n×m. وبالتالي، تعرّف AA^T مصفوفة m×m، وتعرّف A^TA مصفوفة n×n.

70.2 أوجد AA^T، حيث $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

■ تحصل على A^T بإعادة كتابة صفوف A كأعمدة:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\quad \text{ومنها}\quad AA^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{pmatrix}$$

71.2 أوجد A^TA، حيث A المصفوفة في المسألة 70.2.

■ $$A^TA=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2-3&0+12\\2-3&4+1&0-4\\0+12&0-4&0+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-1&12\\-1&5&-4\\12&-4&16\end{pmatrix}$$

72.2 أوجد $(AB)^T$، إذا $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}5&0\\-6&7\end{pmatrix}$.

■ $AB=\begin{pmatrix}5-12&0+14\\15+24&0-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&14\\39&-28\end{pmatrix}$ وبذلك $(AB)^T=\begin{pmatrix}-7&39\\14&-28\end{pmatrix}$

73.2 أوجد A^TB^T من أجل المصفوفتين في المسألة 72.2.

■ لدينا $B^T=\begin{pmatrix}5&-6\\0&7\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\end{pmatrix}$

إذن $$A^TB^T=\begin{pmatrix}5+0&-6+21\\10+0&-12-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15\\10&-40\end{pmatrix}$$

لاحظ من المسألة 72.2 أن $(AB)^T\neq A^TB^T$.

74.2 أوجد B^TA^T، من أجل المصفوفتين في المسألة 72.2.

■ $$B^TA^T=\begin{pmatrix}5&-6\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-12&15+24\\0+14&0-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&39\\14&-28\end{pmatrix}$$

من المسألة 72.2 نجد أن $(AB)^T=B^TA^T$؛ انظر المسألة 78.2.

المبرهنة 3.2: إن عملية إيجاد المنقول المصفوفي تحقق

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T$ (iii) $(kA)^T=kA^T$ (k عدد سلمي)

(ii) $(A^T)^T=A$ (iv) $(AB)^T=B^TA^T$

75.2 اثبت المبرهنة 3.2 (i).

■ إذا $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$، إذن يكون $a_{ij}+b_{ij}$ المدخل -ij لـ A+B؛ وبالتالي، يكون $a_{ij}+b_{ij}$ المدخل -ji (بترتيب معكوس) لـ $(A+B)^T$. من جهة أخرى، يكون a_{ij} المدخل -ji لـ A^T و b_{ij} المدخل -ji لـ B^T؛ وبذلك يكون $a_{ij}+b_{ij}$ المدخل -ji لـ A^T+B^T. ينتج عن ذلك أن $(A+B)^T=A^T+B^T$، لأن المداخل المتقابلة متساوية.

76.2 اثبت المبرهنة 3.2 (ii).

■ من الواضح أن تبادلاً لا مزدوجا للصفوف والأعمدة يكافىء عدم وجود تبادل.

77.2 اثبت المبرهنة 3.2 (iii).

■ إذا $A=(a_{ij})$، فإن ka_{ij} يكون المدخل -ij لـ kA، وبذلك يكون ka_{ij} المدخل -ji [بترتيب معكوس] لـ $(kA)^T$. من جهة أخرى، يكون a_{ij} المدخل -ji لـ A^T، وبالتالي يكون ka_{ij} المدخل -ji لـ kA^T. ينتج عن ذلك أن $(kA)^T=kA^T$، لأن المداخل المتقابلة متساوية.

78.2 اثبت المبرهنة 3.2 (iv).

■ إذا $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{kj})$، فإن المدخل -ij لـ AB يكون

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj} \qquad (1)$$

وبذلك، يكون (1) المدخل -ji (بترتيب معكوس) لـ $(AB)^T$.

من جهة أخرى، العمود j لـ B يصبح الصف j لـ B^T، والصف i لـ A يصبح العمود i لـ A^T. نتيجة لذلك، فإن المدخل ji- لـ B^TA^T يكون

$$(b_{1j} \quad b_{2j} \quad \cdots \quad b_{mj})\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{im} \end{pmatrix} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im}$$

ينتج عن ذلك أن $(AB)^T = B^TA^T$، لأن المداخل المتقابلة متساوية.

5.2 العمليات الصفية الأولية، مرتكزات

79.2 بيّن أن كل واحدة من العمليات الصفية الأولية التالية لها عملية عكسية من نفس النوع:

$[E_1]$: تبادل الصفين i و j: $R_i \longleftrightarrow R_j$.

$[E_2]$: ضرب الصف i في سلمي غير صفري k: $R_i \to kR_i$، $k \neq 0$.

$[E_3]$: نبدل بالصف i الصف j بعد ضربه في k مضافا إليه الصف i: $R_i \to kR_j + R_i$.

■ (أ) تبادل الصفين i و j نفسهما مرتين، يعطينا المصفوفة الأصلية؛ أي أن هذه العملية تكون معكوس نفسها. (ب) ضرب الصف i في k ثم ضرب الناتج في k^{-1}، أو في k^{-1} ثم في k، يعطينا المصفوفة الأصلية. بتعبير آخر، العمليتان $R_i \to kR_i$ والعملية $R_i \to k^{-1}R_i$، أو نطبق العملية $R_i \to -kR_j + R_i$ ثم العملية $R_i \to kR_j + R_i$، فنتحصل على المصفوفة الأصلية. بتعبير آخر، تكون العمليتان $R_i \to kR_j + R_i$ و $R_i \to -kR_j + R_i$ عكسيتين.

80.2 عبر عن العملية الصفية التالية بدلالة العمليات الصفية الأولية في المسألة 79.2:

[E]: نستبدل بالصف i الصف j مضروباً في k' مضافاً إليه الصف i مضروباً في k (غير صفري): $R_i \to k'R_j + kR_i$، $k \neq 0$.

■ E مكافئة لـ E_2 [بوسيط k] متبوعة بـ E_3 [بوسيط k'].

81.2 طبق العملية $R_2 \longleftrightarrow R_3$ على

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

■ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

82.2 طبق العملية $R_1 \to 3R_1$ على المصفوفة في المسألة 81.2.

■ $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

83.2 طبق العملية $R_3 \to -3R_1 + R_3$ على المصفوفة في المسألة 81.2.

■ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -10 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

84.2 نقول عن مصفوفة A أنها «مكافئة صفياً» لمصفوفة B، ونكتبها $A \sim B$، إذا أمكن الحصول على B بإجراء متتالية من العمليات الصفية الأولية على A. بيّن أن التكافؤ الصفي هو علاقة تكافؤ. أي، بيّن أن (أ) $A \sim A$؛ (ب) إذا $A \sim B$، إذن $B \sim A$؛ (ج) إذا $A \sim B$ و $B \sim C$، إذن $A \sim C$.

▩ (أ) يمكن الحصول على A من A بتطبيق E_2 مع $k = 1$. (ب) إذا أمكن الحصول على B بتطبيق متتالية من العمليات الصفية الأولية على A، فإن تطبيق العمليات العكسية، بترتيب معكوس، على B يعطينا A. [نعرف، من مسألة 79.2 أن عكس عملية صفية أولية يكون عملية صفية أولية]. (ج) إذا كان يمكن الحصول على B بتطبيق متتالية من العمليات الصفية الأولية على A، ويمكن الحصول على C بتطبيق متتالية من العملية الصفية الأولية على B، فإن تطبيق المتتاليتين، الواحدة بعد الأخرى، على A يعطينا C.

85.2 لنفترض أن a_{ij} عنصر غير صفري في A. بيّن أن كل واحدة من العمليتين الصفيتين الأوليتين، واللتين تغيران الصف k في A، تعطيان 0 في الموضع -kj لـ A:

$$R_k \to (-a_{kj}/a_{ij})R_i + R_k \quad \text{(أ)} \qquad R_k \to -a_{kj}R_i + a_{ij}R_k \quad \text{(ب)}$$

[العنصر a_{ij} أعلاه، والذي استخدم للحصول على الأصفار فوق و/أو تحت هذا العنصر، يسمى «مرتكز/أو محور» العمليتين].

▩ إن السلمى الجديد في الموضع -kj لـ A هو

$$(-a_{kj}/a_{ij})a_{ij} + a_{kj} = 0 \quad \text{(أ)} \qquad (-a_{kj})a_{ij} + (a_{ij})a_{kj} = 0 \quad \text{(ب)}$$

86.2 ارجع إلى المسألة 85.2. ناقش الميزات، إن وجدت الناتجة عن استخدام (ب) بدلاً من (أ).

▩ رغم أن (أ) تتضمن عمليات حسابية أقل (المسألة 91.2)، إلا أنه قد ينتج عنها كسور حتى إذا كانت كل الـ a_{ij} أعداداً صحيحة.

العملية (ب) والتي تتضمن عمليات الجمع والضرب فقط لن ينتج عنها كسور إذا كانت كل المداخل a_{ij} أعداداً صحيحة.

87.2 ناقش فائدة استخدام $a_{ij} = 1$ كمرتكز.

▩ في هذه الحالة، تكون العمليتان (أ) و (ب) متماثلتين، ولن تنتج كسور إذا كانت كل الـ a_{ij} أعداداً صحيحة.

88.2 أوجد أصفاراً فوق وتحت المرتكز [داخل المربع]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

▩ بما أن الصف الثاني R_2 [الذي يحتوي المرتكز] لن يتغير، فنكتب R_2 أولاً:

$$\begin{pmatrix} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

للحصول على 0 في R_1 فوق المرتكز، نضرب الصف الثاني R_2 في -3 ثم نضيفه إلى R_1؛ أي، نطبق العملية $R_1 \to -3R_2 + R_1$:

$$\begin{pmatrix} 0+1 & -3+3 & -6-4 & 3+5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \\ \end{pmatrix}$$

وللحصول على 0 في R_3 تحت المرتكز، نضرب R_2 في 2 ونضيفه إلى R_3؛ أي، نطبق العملية $R_3 \to 2R_2 + R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0+0 & 2-2 & 4+3 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

وهذه هي المصفوفة المطلوبة.

89.2 أوجد أصفاراً تحت المركز [داخل المربع]:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

■ أولاً، نكتب R_1، لأنه لن يتغير:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

للحصول على 0 في R_2 تحت المرتكز، طبق العملية $R_2 \to -3R_1 + 2R_2$: أي إحسب:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -6+6 & -3+8 & 9+2 & -12-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

وللحصول على 0 في R_3 تحت المرتكز، طبق العملية $R_3 \to -5R_1 + 2R_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & -16 \\ -10+10 & -5-4 & 15+6 & -20+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & -16 \\ 0 & -9 & 21 & -20 \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة المطلوبة.

90.2 أوجد أصفاراً تحت المرتكز [داخل المربع]:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

■ بما أن العنصر المذكور [داخل المربع] صفري، فإنه لا يمكن استخدامه كمرتكز.

91.2 لنفترض أن A مصفوفة $m\times n$. أوجد عدد عمليات الضرب في (أ) $R_k \to (-a_{kj}/a_{ij})R_i + R_k$، (ب) $R_k \to -a_{kj}R_i + a_{ij}R_k$. [في التطبيقات الحاسوبية، نعد فقط عمليات الضرب، ولا نعد عمليات الجمع، وذلك عند تحديد مدى تعقيد أسلوب ما].

■ (أ) بعد حساب المضروب فيه $-a_{kj}/a_{ij}$ ، سوف نجد عدد n فقط من عمليات الضرب. [كل صف يحتوي عدد n من العناصر]. (ب) سيكون هنا عدد 2n من عمليات الضرب.

6.2 المصفوفات الدرجية، الاختزال الصفي، الارتكاز (التمحور)

92.2 أوجد المداخل غير الصفرية الأمامية في المصفوفات التالية:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ المداخل غير الصفرية الأمامية هي المداخل غير الصفرية الأولى في صفوف المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -3 & 4 & 6 \\ \boxed{4} & 0 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

93.2 ما هو عدد المداخل غير الصفرية الأمامية التي يمكن أن تحتويها مصفوفة $m\times n$؟

■ يتراوح العدد بين 0 و m، بحيث يوجد مدخل غير صفري أمامي واحد لكل صف غير صفري.

94.2 نقول عن مصفوفة A أنها «مصفوفة درجية»، أو نقول أنها في «شكل درجي»، إذا (i) كانت كل الصفوف الصفرية في نهاية المصفوفة؛ (ii) وكان كل مدخل غير صفري أمامي في صف معين على يمين المدخل غير الصفري الأمامي للصف السابق له. اذكر أي المصفوفات في المسألة 92.2، إن وجدت، تكون في شكل درجي.

■ المصفوفات الثلاث ليست في شكل درجي. [في المصفوفة الثالثة، الـ 3 ليست على يمين الـ 2].

95.2 أعط خوارزمية تختزل صفياً مصفوفة إختيارية $A = (a_{ij})$ إلى الشكل الدرجي. [نقصد بالمصطلح «يختزل صفياً» أو «يختزل» فقط تحويل مصفوفة بواسطة عمليات صفية].

■ خطوة 1: أوجد العمود الأول الذي به مدخل غير صفري؛ سمه العمود - j_1.

خطوة 2: بادل بين الصفوف بحيث تجعل مدخلاً غير صفري يظهر في الصف الأول للعمود- j_1، أي، بحيث يكون $a_{1j_1} \neq 0$.

خطوة 3: استخدم a_{1j_1} كمرتكز للحصول على أصفار تحت a_{1j_1}؛ أي، طبق من أجل كل $i > 1$ العملية الصفية $R_i \to (-a_{ij_1}/a_{1j_1})R_1 + R_i$ أو $R_i \to -a_{ij_1}R_1 + a_{1j_1}R_i$.

خطوة 4: أعد الخطوات 1، 2، 3 على المصفوفة الجزئية المكونة من كل الصفوف باستثناء الأول.

خطوة 5: واصل الأسلوب السابق حتى تصبح المصفوفة في شكل درجي.

96.2 إختزل صفياً

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

إلى الشكل الدرجي.

■ استخدم $a_{11} = 1$ كمرتكز للحصول على أصفار تحت هذا العنصر؛ أي، طبق العمليتين الصفيتين $R_2 \to -2R_1 + R_2$ و $R_3 \to -3R_1 + R_3$ للحصول على المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

الآن استخدم $a_{23} = 4$ كمرتكز للحصول على أصفار تحت هذا المدخل؛ أي ، طبق العملية $R_3 \to -5R_2 + 4R_3$ لتحصل على المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

وهي في شكل درجي.

97.2 إختزل صفياً

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

إلى شكل درجي.

■ طبق العمليتين $R_2 \to -2R_1 + R_2$ و $R_3 \to -3R_1 + R_3$، ثم العملية $R_3 \to -7R_2 + 3R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

الآن، تكون المصفوفة في شكل درجي.

98.2 إختزل صفياً

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

إلى شكل درجي.

■ نبادل أولاً بين R_1 و R_2 لنحصل على مرتكز غير صفري في الصف الأول؛ ثم نطبق $R_3 \to -R_1 + R_3$؛ وأخيراً $R_3 \to -2R_2 + R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفة الآن في شكل درجي.

99.2 إختزل صفياً

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

إلى شكل درجي.

■ إن الحسابات اليدوية تكون عادة أسهل عندما يكون العنصر المرتكز يساوي 1. لذلك، نبادل أولاً R_1 و R_2؛ ثم نطبق $R_2 \to 4R_1 + R_2$ و $R_3 \to -6R_1 + R_3$؛ ثم نطبق بعد ذلك $R_3 \to R_2 + R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبذلك تصبح المصفوفة في شكل درجي.

100.2 إن الخوارزمية في المسألة 95.2 تصبح «خوارزمية تمركزية» إذا اخترنا، في الخطوة 2، المدخل في العمود j الذي له أكبر قيمة مطلقة كمرتكز، a_{1j_1}، وإذا حددنا في الخطوة 3 العملية $R_i \to (-a_{ij_1}/a_{1j_1})R_1 + R_i$. استخدم الخوارزمية التمركزية لاختزال المصفوفة التالية A إلى شكل درجي:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

■ نبادل أولاً بين R_1 و R_2 بحيث يمكن استخدام -3 كمرتكز، ثم طبق $R_2 \to (2/3)R_1 + R_2$ و $R_3 \to (1/3)R_1 + R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1/3 \\ 0 & -5 & 10 & 5/3 \end{pmatrix}$$

الآن، نبادل بين R_2 و R_3، بحيث يمكن استخدام -5 كمرتكز، ثم طبق $R_3 \to (2/5)R_2 + R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 5/3 \\ 0 & 2 & 2 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 5/3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

وهكذا، تم وضع المصفوفة في شكل درجي.

101.2 صف الفوائد، إن وجدت، لاستخدام الخوارزمية التمركزية.

■ تتضمن العملية $R_i \to (-a_{ij_1}/a_{1j_1})R_1 + R_i$ القسمة على المرتكز (الحالي) a_{1j_1}. ولكن الأخطاء التدويرية، على الحاسوب، يمكن إختزالها بشكل كبير عندما تكون القسمة على عدد تكون قيمته المطلقة أكبر ما يمكن

102.2 إذا كانت A و B مصفوفتين درجيتين، لهما نفس الحجم، بيّن أن $A + B$ لا ضرورة لأن تكون مصفوفة درجية.

■
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

103.2 بيّن أنه إذا كانت A مصفوفة درجية، فإن kA تكون أيضاً مصفوفة درجية، من أجل أي عدد سلمي k.

▩ إذا $k = 0$، تكون kA المصفوفة الصفرية، وهي في شكل درجي. إذا $k \neq 0$، فإن ضرب مداخل A في k لا يغير من مواضع الصفوف الصفرية، ولا يغيّر من مواضع المداخل غير الصفرية الأمامية.

7.2 الشكل الصفي القانوني، حذف جاوس

104.2 نقول عن مصفوفة A أنها في الشكل الصفي القانوني إذا (i) كانت A في شكل درجي؛ (ii) كل مدخل غير صفري أمامي يساوي 1؛ (iii) كل مدخل غير صفري أمامي يكون المدخل غير الصفري الوحيد في عموده. أي المصفوفات التالية، والتي وضعت مداخلها غير الصفرية الأمامية داخل مربعات، تكون في الشكل الصفي القانوني؟

$$\text{(أ)}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ب)}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ج)}\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

▩ (أ) المصفوفة ليست في الشكل الصفي القانوني لأن المداخل غير الصفرية الأمامية لا تساوي 1. (ب) المدخل غير الصفري الأمامي في الصف الثاني ليس المدخل غير الصفري الوحيد في عموده. (ج) المصفوفة تكون في الشكل الصفي القانوني.

105.2 أي المصفوفات، في المسألة 92.2، تكون في الشكل الصفي القانوني؟

▩ هذه المصفوفات ليست في أشكال درجية، وبالتالي لا يمكن أن تكون في أشكال صفية قانونية.

106.2 أي المصفوفات تكون في الشكل الصفي القانوني؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

▩ المصفوفتان الثانية والثالثة.

107.2 أعط «خوارزمية حذف جاوس» من أجل إختزال مصفوفة إختيارية A إلى شكل صفي قانوني.

▩ تتكون الخوارزمية من خطوتين رئيسيتين:

الخطوة 1: إختزل المصفوفة A إلى شكل درجي[المسألة 95.2]؛ ارمز للمداخل غير الصفرية الأمامية بـ $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$

خطوة 2: إذا $a_{rj_r} \neq 1$، إضرب آخر صف غير صفري، R_r في $1/a_{rj_r}$. ثم استخدم $a_{rj_r} = 1$ كمرتكز للحصول على أصفار فوق المرتكز. كرر العملية مع $R_{r-1}, R_{r-2}, \ldots, R_2$. أخيراً، وإذا كان ذلك ضرورياً، إضرب R_1 في $1/a_{1j_1}$ لكي تجعل $a_{1j_1} = 1$.

المصفوفة الآن في الشكل الصفي القانوني. الخطوة 2 تسمى أحياناً «التعويض المرتد»، لأن المداخل غير الصفرية الأمامية تستخدم كمرتكزات في ترتيب عكسي، من أسفل إلى أعلى.

108.2 ضع المصفوفة الدرجية التالية في شكل صفي قانوني:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

▩ نضرب R_3 في 1/4 بحيث يصبح المدخل غير الصفري الأمامي، a_{35}، يساوي 1. نوجد أصفاراً فوق a_{35} بتطبيق العمليتين $R_2 \to -5R_3 + R_2$ و $R_1 \to -6R_3 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضرب R_2 في 1/3 بحيث نجعل المدخل غير الصفري الأمامي، a_{23}، يساوي 1. نوجد أصفاراً فوق a_{23} بواسطة العملية $R_1 \to -4R_2 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أخيراً، نضرب R_1 في 1/2 لنحصل على الشكل الصفي القانوني:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

109.2 اختزل المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{pmatrix}$$

إلى الشكل الصفي القانوني.

■ أولاً، نختزل B إلى شكل درجي بتطبيق $R_2 \to -2R_1 + R_2$، و $R_3 \to -3R_1 + R_3$، ثم $R_3 \to -R_2 + R_3$:

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

نطبق الآن خطوة 2 في خوارزمية جاوس. نضرب R_3 في 1/4 لكي يصبح المرتكز $b_{34} = 1$، ثم نطبق $R_2 \to 2R_3 + R_2$ و $R_1 \to -6R_3 + R_1$:

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

الآن، نضرب R_2 في 1/3 لنجعل المرتكز $b_{23} = 1$، ونطبق $R_1 \to R_2 + R_1$:

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

أخيراً، نضرب R_1 في 1/2 لنحصل على الشكل الصفي القانوني:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

110.2 إختزل إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

■ نختزل أولاً A إلى شكل درجي بتطبيق $R_2 \to -R_1 + R_2$ و $R_3 \to -2R_1 + R_3$، ثم نطبق $R_3 \to -3R_2 + R_3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

نستخدم الآن التعويض المرتد. نضرب R_3 في 1/2 لنحصل على المرتكز $a_{34} = 1$، ثم نطبق $R_2 \to 2R_3 + R_2$ و $R_1 \to -R_3 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

الآن، نضرب R_2 في 1/3 لنحصل على المرتكز $a_{22} = 1$، ثم نطبق $R_1 \to 2R_2 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/3 & 0 & 17/6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

بما أن $a_{11} = 1$، فإن المصفوفة الأخيرة تكون الشكل الصفي القانوني المطلوب.

111.2 صف «خوارزمية الحذف لجاوس ـ جوردان»، والتي تختزل مصفوفة إختيارية A إلى شكلها الصفي القانوني.

■ إن هذه الخوارزمية مشابهة لخوارزمية المسألة 95.2 باستثناء أن الخوارزمية هنا تناظم أولا أحد الصفوف للحصول على مرتكز وحدة، ثم نستخدم هذا المرتكز لوضع أصفار تحت وفوق المرتكز قبل الحصول على المرتكز التالي.

112.2 نتكلم عن «شكل درجي/ بدون (أل) التعريف» لمصفوفة A، وعن «الشكل الصفي القانون/بـ (أل) التعريف» للمصفوفة A. لماذا؟

■ ان مصفوفة إختيارية A يمكن أن تكون مكافئة صفياً لمصفوفات درجية عديدة. من جهة أخرى، وبغض النظر عن الخوارزمية المستخدمة، فإن مصفوفة A تكون مكافئة صفياً لمصفوفة وحيدة تكون في شكل صفي قانون. [إن المصطلح «قانوني» يوحي عادة بالوحدانية].

113.2 استخدم حذف جاوس ـ جوردان للحصول على الشكل الصفي القانوني للمصفوفة في المسألة 110.2.

■ نستخدم المدخل غير الصفري الأساسي $a_{11} = 1$ كمرتكز لوضع أصفار تحته، بتطبيق $R_2 \to -R_1 + R_2$ و $R_3 \to -2R_1 + R_3$: يقود هذا إلى:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

نضرب R_2 في 1/3 نحصل على المرتكز $a_{22} = 1$، ثم نوجد أصفاراً تحت وفوق a_{22} بتطبيق $R_3 \to -9R_2 + R_3$ و $R_1 \to 2R_2 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 9 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أخيراً، نضرب R_3 في 1/2 للحصول على المرتكز $a_{34} = 1$، ثم نوجد أصفاراً فوقه بتطبيق $R_2 \to (2/3)R_3 + R_2$ و $R_1 \to (1/3)R_3 + R_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/3 & 0 & 17/6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

114.2 اكتب كل الأشكال الصفية القانوني للمصفوفات 2×2.

■
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث k عدد سلمي اختياري.

115.2 إختزل المصفوفة الدرجية

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

إلى الشكل الصفي القانوني.

■ نستخدم التعويض المرتد للحصول على:

$$C\sim\begin{pmatrix}5&-9&6\\0&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&-9&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&-9&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

116.2 أعطينا مصفوفة درجية $n\times n$ في شكل مثلثاتي

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3,n-1}&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&a_{nn}\end{pmatrix}$$

حيث كل الـ $a_{ii}\neq 0$. أوجد الشكل الصفي القانوني لـ A (تعميم المسألة 115.2).

■ بضرب R_n في $1/a_{nn}$، ثم استخدام $a_{nn}=1$ الجديد كمرتكز، نتحصل على المصفوفة

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1,n-1}&0\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3,n-1}&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن العمود الأخير لـ A تم تحويله إلى متجه وحده. كل تعويض ـ مرتد لاحق يعطينا متجه وحدة عمودياً جديداً، فتكون النتيجة النهائية

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة A يكون شكلها الصفي القانوني «المصفوفة المتطابقة» I.

8.2 المصفوفات المركبة

117.2 يمكن تجزئة مصفوفة A إلى منظومة من مصفوفات أصغر، تسمى مصفوفات جزئية، بواسطة مجموعة من الخطوط الأفقة والرأسية. تسمى المصفوفة A عندئذ «مصفوفة مركبة». أعط حجم كل واحدة من المصفوفات المركبة التالية:

(أ) $\left(\begin{array}{cc|cc|c}1&-2&0&1&3\\2&3&5&7&-2\\\hline 3&1&4&5&9\end{array}\right)$ (ب) $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&1&3\\\hline 2&3&5&7&-2\\\hline 3&1&4&5&9\end{array}\right)$

(وهما جزءان لمصفوفة واحدة).

■ (أ) يكون للمصفوفة المركبة صفين $\left(\begin{array}{cc|cc|c}1&-2&0&1&3\\2&3&5&7&-2\end{array}\right)$ و $\left(\begin{array}{cc|cc|c}3&1&4&5&9\end{array}\right)$، وثلاثة أعمدة،

$$\left(\begin{array}{cc}1&-2\\2&3\\\hline 3&1\end{array}\right)\qquad\left(\begin{array}{cc}0&1\\5&7\\\hline 4&5\end{array}\right)\qquad\left(\begin{array}{c}3\\-2\\\hline 9\end{array}\right)$$

لذلك، فإن حجم المصفوفة 2×3. [هناك أربعة أحجام مركبة: 2×2، 2×1، 1×2، و 1×1]. (ب) 3×2.

118.2 لنفترض أن المصفوفتين A و B جُزِّئتا إلى مصفوفتين مركبتين، مثلا $A=(A_{ij})$ و $B=(B_{ij})$، حيث يكون للمصفوفات الجزئية المتقابلة A_{ij} و B_{ij} نفس الأحجام. أوجب المجموع $A+B$.

■ يمكن الحصول على المجموع $A+B$ بجمع المصفوفات الجزئية المتقابلة:

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&\cdots&A_{1n}+B_{1n}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&\cdots&A_{2n}+B_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{m1}+B_{m1}&A_{m2}+B_{m2}&\cdots&A_{mn}+B_{mn}\end{pmatrix}$$

بتلخص التبرير في أن جمع المصفوفات الجزئية المتقابلة يجمع العناصر المتقابلة في A و B.

119.2 لتكن A مصفوفة مجزأة في مصفوفات جزئية؛ مثلاً، $A = (A_{ij})$. أوجد المضاعف السلمي kA.

■ $$kA = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{pmatrix}$$

لأن ضرب كل مصفوفة جزئية في k ينتج عنه ضرب كل عنصر لـ A في k.

120.2 لنجزىء المصفوفتين U و V إلى مصفوفات جزئية كما يلي:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1p} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \cdots & U_{mp} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{p1} & V_{22} & \cdots & V_{pn} \end{pmatrix}$$

حيث يكون عدد أعمدة كل مصفوفة جزئية U_{ik} مساوٍ لعدد صفوف كل مصفوفة جزئية V_{kj}. أوجد الجداء UV.

■ يمكن الحصول على الجداء UV بضرب المصفوفات الجزئية المتقابلة؛ أي أن

$$UV = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj}$$

لكي تقنع نفسك بصلاحية الضرب المركب، انظر في العملية التالية لحساب العنصر ـ (1,1) لـ UV:

$$w_{11} = \overbrace{u_{11}v_{11} + u_{12}v_{21} + u_{13}v_{31} + \cdots}^{\text{العنصر -(1,1) في } U_{11}V_{11}} + \overbrace{u_{1r}v_{r1} + v_{1,r+1} + u_{1,r+1}v_{r+1,1} + \cdots}^{\text{العنصر -(1,1) في } U_{12}V_{21}} + \overbrace{\cdots}$$

وبذلك، فإن تجزئة U و V يعني تجزئة المجاميع المعرّفة لعناصر UV.

121.2 احسب AB باستخدام الضرب المركب، حيث

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{و} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

■ هنا $A = \begin{pmatrix} E & F \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & G \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} R & S \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & T \end{pmatrix}$ حيث E، F، G، R، S، T المصفوفات الجزئية المعطاة. وبالتالي.

$$AB = \begin{pmatrix} ER & ES + FT \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & GT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \quad 0 \quad 0) & (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

122.2 احسب CD باستخدام الضرب المركب، حيث

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \text{و} \quad D = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

■ $$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(4, 5, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 12 \\ 12 & 15 & 19 \end{pmatrix}$$

123.2 احسب EF باستخدام الضرب المركب، حيث

$$E=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\\hline 0&0&5&1&2\\0&0&3&4&1\end{array}\right) \quad \text{و} \quad F=\left(\begin{array}{cc|cc}3&-2&0&0\\2&4&0&0\\\hline 0&0&1&2\\0&0&2&-3\\0&0&-4&1\end{array}\right)$$

$$EF=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix} & \mathbf{0}_{2\times2}\\ \mathbf{0}_{2\times2} & \begin{pmatrix}5&1&2\\3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\-4&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3+4&-2+8\\9+8&-6+16\end{pmatrix} & \mathbf{0}_{2\times2}\\ \mathbf{0}_{2\times2} & \begin{pmatrix}5+2-8&10-3+2\\3+8-4&6-12+1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$ ■

$$=\begin{pmatrix}7&6&0&0\\17&10&0&0\\0&0&-1&9\\0&0&7&-5\end{pmatrix}$$

124.2 اضرب

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&0&0\\-2&1&0&0\\\hline 0&0&6&-4\\0&0&2&-3\end{array}\right) \quad \text{و} \quad B=\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&4&1\\0&0&-3&-1\\\hline 1&2&0&0\\-5&3&0&0\end{array}\right)$$

$$AB=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{2\times2} & \begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-3&-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}6&-4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-5&3\end{pmatrix} & \mathbf{0}_{2\times2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&9&2\\0&0&-11&-3\\26&0&0&0\\-17&-5&0&0\end{pmatrix}$$ ■

125.2 كم عدد الطرق التي يمكن أن تجزأ بها مصفوفة 5×8 إلى مصفوفة مركبة 3×4؟

■ يتطلب الأمر عدد $3-1=2$ خطوط مقسمة أفقية، وعدد $4-1=3$ خطوط مقسمة رأسية. الآن، لدينا $5-1=4$ موضعاً لوضع الخطوط الأفقية، وعدد $8-1=7$ موضعاً من أجل الخطوط الرأسية. يمكن وضع الخطين الأفقيين في 4 أماكن بعدد $\binom{4}{2}=6$ من الطرق، ويمكن وضع الخطوط الرأسية الثلاثة في 7 أماكن بعدد $\binom{7}{3}=35$ من الطرق. وبالتالي، هناك $6.35=210$ طريقة لإنجاز التجزئة.

126.2 كم عدد الطرق التي يمكن أن تجزأ بها مصفوفة $m\times n$ إلى مصفوفة مركبة $r\times s$؟

■ $\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{s-1}$ طريقة (تعميم للمسألة 125.2).

الفصل 3
منظومات المعادلات الخطية

1.3 الخطية، الحلول

1.3 متى يقال عن معادلة، في عدد n من المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$، أنها «خطية»؟

■ عندما يكون لها الشكل النمطي التالي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \quad (1)$$

في (1)، يسمى الثابت a_k «معامل» x_k، أما b فيسمى ثابت المعادلة. سنفترض أن كل الثوابت، في مسائل هذا الفصل، تنتمي إلى **R**.

2.3 حدّد عما إذا كانت المعادلة $5x+7y-8yz=16$ خطية.

■ لا، لأن الجداء yz لمجهولين يكون من الدرجة الثانية.

3.3 هل المعادلة $x+\pi y+ez = \log 5$ خطية؟

■ نعم، لأن π، e، log 5 ثوابت.

4.3 حدّد عما إذا كانت المعادلة $\frac{y+8}{x-2} = x+6$ مكافئة لمعادلة خطية.

■ افترض $x \neq z$، وتخلص من الكسر:

$$y+8 = (x-2)(x+6) = x^2+4x-12 \quad \text{أو} \quad x^2+4x-y = 20$$

لا، لأن x^2 من الدرجة الثانية.

5.3 حدّد عما إذا كانت المعادلة التالية خطية: $3x + ky - 8z = 16$.

■ المعادلة في وضعها الحالي لها أربعة مجاهيل: x، y، z، k. والمعادلة ليست خطية بسبب الحد، ky. ولكن، إذا افترضنا أنّ k عدد ثابت، فإن المعادلة تكون خطية في المجاهيل x، y، z.

6.3 هل $x = 3$، $y = 2$، $z = 1$ حل للمعادلة الخطية: $x+2y-3z = 4$؟

■ عموماً، تكون النونية [متجه في R^n] $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ حلاً للمعادلة $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (أو نحققها) إذا $F(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$. وبذلك، نعوض في المعادلة المعطاة لنحصل على:

$$3+2(2)-3(1) \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{أو} \quad 3+4-3 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{أو} \quad 4 \stackrel{?}{=} 4$$

نعم، هي حل للمعادلة.

7.3 هل $x = 1$، $y = 2$، $z = 3$ حلّ للمعادلة في المسألة 6.3؟

■ نعوض في المعادلة، فنحصل على:

$$1+2(2)-3(3) \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{أو} \quad 1+4-9 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{أو} \quad -4 \stackrel{?}{=} 4$$

لا، ليست حلاً.

8.3 هل يكون $u = (8,1,2)$ حلاً للمعادلة $x+2y-3z=4$؟

■ بما أن x، y، z هو ترتيب المجاهيل، فإن $u = (8,1,2)$ اختصار من أجل $z = 2$، $y = 1$، $x = 8$. نعوض في المعادلة، لنحصل على:

$8+2(1)-3(2)\stackrel{?}{=}4$ أو $8+2-6\stackrel{?}{=}4$ أو $4\stackrel{?}{=}4$

نعم، انها حلّ للمعادلة.

9.3 هل $v=(2,-1,5)$ حلّ للمعادلة في المسألة 8.3؟

■ نعوض في المعادلة، للحصول على:

$2+2(-1)-3(5)\stackrel{?}{=}4$ أو $2-2-15\stackrel{?}{=}4$ أو $-15\stackrel{?}{=}4$

لا، ليس حلاّ.

10.3 هل $w=(3,-1,2,5)$ حل للمعادلة في المسألة 8.3؟

■ لا، يمكن لمتجه ذي ثلاث مركبات فقط أن يكون حلاّ، لأن للمعادلة ثلاثة مجاهيل فقط.

11.3 هل $u=(3,2,1,0)$ حلّ للمعادلة $x_1+2x_2-4x_3+x_4=3$؟

■ عوّض لتحصل على $3+2(2)-4(1)+0\stackrel{?}{=}3$ أو $3\stackrel{?}{=}3$؛ نعم، انه حل.

12.3 هل $v=(1,2,4,5)$ حلّ للمعادلة في المسألة 11.3؟

■ عوّض لتحصل على $1+2(2)-4(4)+5\stackrel{?}{=}3$ ، أو $-6\stackrel{?}{=}3$ ؛ ليس حلاّ.

13.3 هل $u=(3,-5,2)$ حلّ للمعادلة $y+2x=z-1$؟

■ سوف نفترض أن x,y,z هو ترتيب المجاهيل في u، بغض النظر عن ترتيبها في المعادلة لذلك، فإن $u=(3,-5,2)$ اختصار من أجل $z=2$، $y=-5$، $x=3$. نعوّض في المعادلة، فنحصل على:

$-5+2(3)\stackrel{?}{=}2-1$ أو $-5+6\stackrel{?}{=}2-1$ أو $1\stackrel{?}{=}1$

نعم، انه حل للمعادلة.

14.3 هل $u=(6,4,-2)$ حلّ للمعادلة $3x_2+x_3-x_1=4$؟

■ المتفق عليه، أن مركبات u مرتبة وفق الأدلة السفلية للمجاهيل. وبذلك، فإن $u=(6,4,-2)$ اختصار من أجل $x_1=6$ ، $x_2=4$، $x_3=-2$. نعوض في المعادلة، للحصول على: $3(4)-2-6\stackrel{?}{=}4$، أو $4\stackrel{?}{=}4$. نعم، انه حلّ.

المبرهنة 1.3: انظر في المعادلة الخطية المتفسخة $0x_1+0x_2+...+0x_n=b$. (i) إذا كان الثابت $b\neq0$، فإنه ليس للمعادلة حل، (ii) إذا كان الثابت $b=0$، فإن كل متجه في $\mathbf{R}^n$ يكون حلاّ.

15.3 اثبت (i) في المبرهنة 1.3.

■ ليكن $u=(k_1,k_2,...,k_n)$. أي متجه. بما أن $0k_i=0$، من أجل i، فإننا نحصل بعد التعويض على:

$0k_1+0k_2+...+0k_n=b$ أو $0+0+...+0=b$ أو $0=b$

وهذه ليست عبارة صحيحة، لأن $b\neq0$؛ وبذلك، لا يمكن لأي متجه أن يكون حلاّ للمعادلة.

16.3 اثبت (ii) في المبرهنة 1.3.

■ لدينا من أجل أي متجه $u=(k_1,k_2,...,k_n)$ في $\mathbf{R}^n$، $0k_1+0k_2+...+0k=0$؛ وبذلك، يكون u حلاّ.

17.3 صف حلول المعادلة $x+3y+x-3=2y+2x+y$.

■ أعد كتابة المعادلة في شكل نمطي بتجميع الحدود ونقلها:

$2x+3y-3=2x+3y$ أو $2x+3y-2x-3y=3$ أو $0x+0y=3$

المعادلة متفسخة بثابت غير صفري؛ وبذلك، لا يوجد لها حلول.

18.3 صف حلول المعادلة $4y-x-3y+3=2+x-2x+y+1$.

$y - x + 3 = y - x + 3$ أو $y - x - y + x = 3 - 3$ أو $0x + 0y = 0$

المعادلة متفسخة بثابت صفري؛ وبذلك فإن كل متجه $u = (a,b)$ في $\mathbb{R}^2$ يكون حلاً.

2.3 المعادلات الخطية في مجهول واحد

المبرهنة 2.3: لتكن المعادلة الخطية $ax = b$. (i) إذا $a \neq 0$، إذن يكون $x = b/a$ الحل الوحيد. (ii) إذا $a = 0$ ولكن $b \neq 0$، فلا نوجد حلول. (iii) إذا $a = 0$ و $b = 0$، فكل عدد سلمي k يكون حلاً.

19.3 اثبت (i) في المبرهنة 2.3.

■ بما أن $a \neq 0$، فإن السلّمي b/a يكون موجوداً. نعوض بـ b/a في $ax = b$ يعطينا $a(b/a) = b$ أو $b = b$؛ وبالتالي، يكون b/a حلاً. من جهة أخرى، لنفترض أن x_0 حل لـ $ax = b$، بحيث أن $ax_0 = b$. بضرب الطرفين في $1/a$ نحصل على $x_0 = b/a$. وبالتالي، فإن b/a هو الحل الوحيد لـ $ax = b$.

20.3 اثبت (ii) في المبرهنة 2.3.

■ مثبتة بواسطة المبرهنة 1.3 (i).

21.3 اثبت (iii) في المبرهنة 2.3.

■ مثبتة بواسطة المبرهنة 1.3 (ii).

22.3 حل $4x = -12$.

■ نضرب في $1/4$، فنحصل على الحل الوحيد $x = -12/4 = -3$.

23.3 حل $5x = 0$.

■ نضرب في $1/5$، فنحصل على الحل الوحيد $x = 0/5 = 0$.

24.3 حل $kx = \pi$.

■ بافتراض أن k ثابت، وأن $k \neq 0$، فإن π/k يكون الحل الوحيد. إذا $k = 0$، فليست هناك حلول

25.3 حل $4x - 1 = x + 6$.

■ انقل ثم أعد كتابة المعادلة في شكل نمطي: $4x - x = 6 + 1$، أو $3x = 7$. إضرب في $1/3$ لنحصل على الحل الوحيد $x = 7/3$.

26.3 حلّ $2x - 5 - x = x + 3$.

■ أعد كتابة المعادلة في شكل نمطي: $x - 5 = x + 3$، أو $x - x = 3 + 8$، أو $0x = 8$. ليس للمعادلة حلول [المبرهنة 2.3 (iii)].

27.3 حل $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$.

■ أعد كتابة المعادلة في شكل نمطي: $x + 1 = x + 1$ أو $x - x = 1 - 1$ أو $0x = 0$. إن كل سلمي k يكون حلاً [المبرهنة 2.3 (iii)].

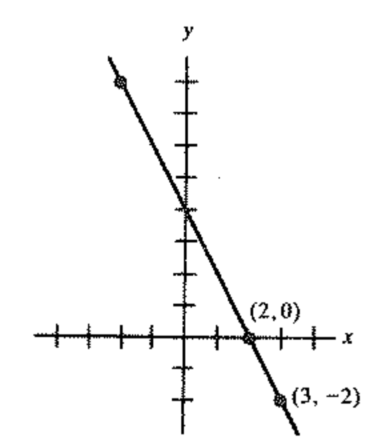
3.3 معادلات خطية في مجهولين

28.3 حدد ثلاثة حلول مختلفة لـ $2x + y = 4$.

■ اختر أي قيمة لأحد المتغيرين، $x = -2$ مثلاً. عوض بـ $x = -2$ في المعادلة لنحصل على $2(-2) + y = 4$ أو $-4 + y = 4$ أو $y = 8$. وبذلك، يكون $x = -2$، $y = 8$ أو - بتعبير آخر - تكون النقطة $(-2,8)$ في $\mathbb{R}^2$ حلاً. عوض الآن بـ $x = 3$ في المعادلة للحصول على $2(3) + y = 4$ أو $6 + y = 4$ أو $y = -2$؛ والتالي، يكون $(3,-2)$ حلاً. أخيراً، عوض بـ $y = 0$ في المعادلة لتحصل على $2x + 0 = 4$، أو $2x = 4$، أو $x = 2$؛ وبذلك، يكون $(2,0)$ حلاً.

29.3 ارسم بيان المعادلة $2x + y = 4$ في المسألة 28.3.

■ ارسم الحلول الثلاثة $(-2,8)$، $(3,-2)$، $(2,0)$، في المستوى الديكارتي R^2، كما هو موضح في الشكل 3-1. ارسم الخط المستقيم $\mathcal{L}$ المحدّد بحلين ـ مثلاً، $(-2,8)$ و $(2,0)$ ـ ثم لاحظ أن الحل الثالث يقع أيضاً على $\mathcal{L}$. فعلاً، فإن $\mathcal{L}$ هو مجموعة كل الحلول؛ اي أنّه بيان الدالة المعطاة.



شكل 3-1

30.3 أوجد ثلاثة حلول مختلفة لـ $2x - 3y = 14$.

■ إختر اي قيمة لاحد المتغيرين. [نجد، عادة، حلين باختيار $x = 0$ للحصول على محصورة -x، ثم $y = 0$ للحصول على محصورة -y]. نعوض بـ $x = 0$ في المعادلة لنحصل على

$$2(0) - 3y = 14 \quad \text{أو} \quad -3y = 14 \quad \text{أو} \quad y = -14/3$$

وبذلك يكون $x = 0$ و $y = -14/3$، أو بتعبير آخر الزوج $(0,-14/3)$، حلاً.

نعوض بـ $y = 0$ في المعادلة للحصول على

$$2x-3(0) = 14 \quad \text{أو} \quad 2x = 14 \quad \text{أو} \quad x = 7$$

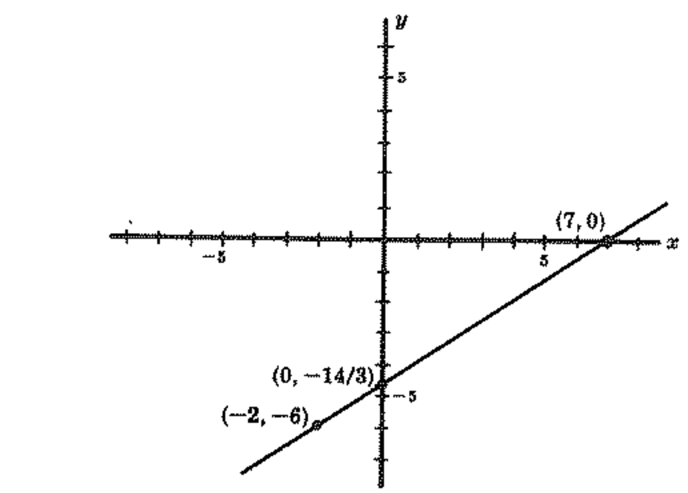
وبالتالي، يكون $(7,0)$ حلاً آخر. نعوض بـ $x = -2$ للحصول على

$$2(-2)-3y = 14 \quad \text{أو} \quad -4-3y = 14 \quad \text{أو} \quad -3y = 18 \quad \text{أو} \quad y = -6$$

وبذلك، يكون $x = -2$ و $y = -6$، أو بتعبير آخر الزوج $(-2,-6)$، حلاً.

31.3 ارسم بيان المعادلة $2x - 3y = 14$ في المسألة 30.3.

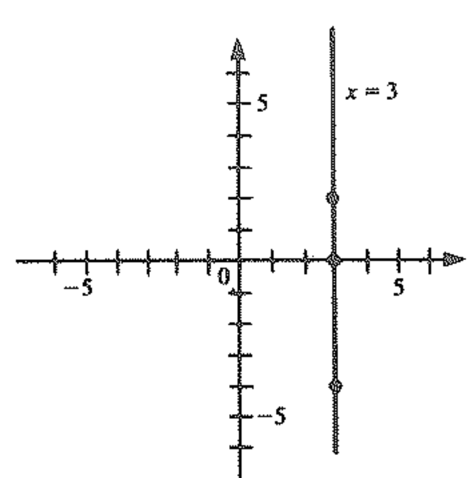
■ عيّن مواضع الحلول الثلاثة على المستوى الديكارتي R^2، كما موضح في الشكل 3-2، ويكون المستقيم [راجع مسألة 29.3] المار بهذه النقط الثلاث هو بيان المعادلة.



شكل 3-2

32.3 أوجد ثلاثة حلول مختلفة في $\mathbb{R}^2$ لـ $x = 3$، ثم ارسم بيان المعادلة.

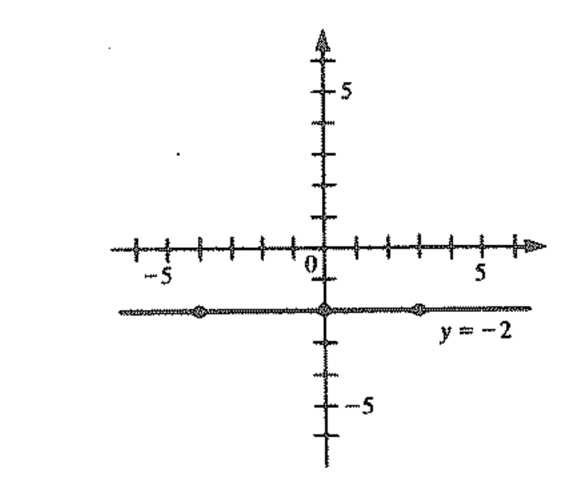
▩ إن $x = 3$، باعتبارها معادلة في $\mathbb{R}^2$، إختصار من أجل $x + 0y = 3$. هنا، أي قيمة لـ y تعطينا $x = 3$؛ مثلاً، $(3,0)$، $(3,-4)$، $(3,2)$ حلول لهذه المعادلة. ويكون بيان $x = 3$ خطاً رأسياً يقطع محور x، عند $x = 3$، كما موضح بالشكل 3-3.



شكل 3-3

33.3 أوجد ثلاثة حلول مختلفة في $\mathbb{R}^2$ لـ $y = -2$، ثم ارسم بيان المعادلة.

▩ إن $y = -2$، باعتبارها معادلة في $\mathbb{R}^2$، إختصار من اجل $0x + y = -2$. وبذلك، فإن أي قيمة لـ x تعطينا $y = -2$؛ مثلاً، $(3,-2),(-4,-2),(0,-2)$ حلول لهذه المعادلة. ويكون بيان $y = -2$ خطا افقياً يقطع محور y، عند $y = -2$، كما موضح بالشكل 4-3.



شكل 4-3

34.3 لتكن منظومة من معادلتين خطيتين، ولنسمِهما L_1 و L_2، في مجهولين x و y. يعرّف حلٌ للمنظومة بأنه زوج $u = (k_1, k_2)$ يحقق المعادلتين معاً.

(أ) صف هندسياً الحالة التي لا يكون فيها للمنظومة حل وحيد، وأعط مثالاً.

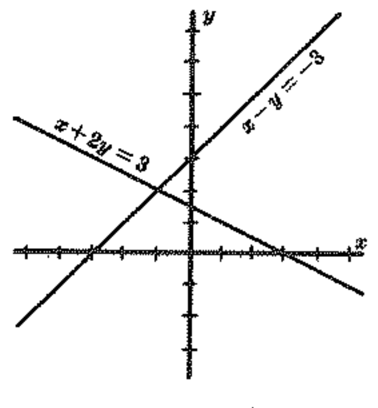
(ب) صف هندسياً الحالة التي لا يكون فيها للمنظومة حلول، وأعط مثالاً.

(ج) صف هندسياً الحالة التي يكون فيها للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول، وأعط مثالاً.

▩ (أ) المستقيمان المقابلان للمعادلتين الخطيتين L_1 و L_2 يتقاطعان في نقطة واحدة، كما في الشكل 5-3.

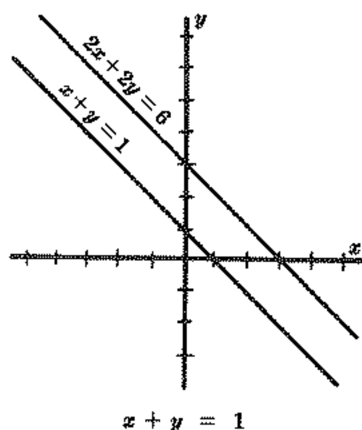
(ب) المستقيمان المقابلان للمعادلتين الخطيتين L_1 و L_2 متوازيان، كما في الشكل 6-3.

(ج) المستقيمان المقابلان للمعادلتين الخطيتين L_1 و L_2 متطابقان، كما في الشكل 7-3.



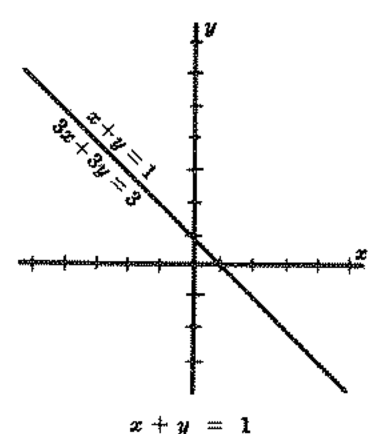
$$x - y = -3$$
$$x + 2y = 3$$

شكل 3-5



$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 6$$

شكل 3-6



$$x + y = 1$$
$$3x + 3y = 3$$

شكل 3-7

35.3 حلّ المنظومة

$$3x - 2y = 7 \quad :L_1$$
$$x + 2y = 1 \quad :L_2$$

■ بما أن احد معاملي y هو سالب المعامل الآخر، نجمع المعادلتين

$$3x - 2y = 7$$
$$\underline{x + 2y = 1}$$
الجمع: $4x = 8$ أو $x = 2$

نعوض بـ $x = 2$ في المعادلة الثانية لنحصل على $2 + 2y = 1$ أو $y = -1/2$. وبذلك، يكون $x = 2$ و $y = -1/2$، أو بتعبير آخر الزوج $(2, -1/2)$، حلاً للمنظومة.

36.3 حلّ

$$2x + 5y = 8 \quad :L_1$$
$$3x - 2y = -7 \quad :L_2$$

■ لحذف x، نضرب L_1 في 3، ونضرب L_2 في -2، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين:

$$6x + 15y = 24 \quad :3L_1$$
$$\underline{-6x + 4y = 14} \quad :-2L_2$$
الجمع: $19y = 38$ أو $y = 2$

نعوض بـ $y = 2$ في واحدة من المعادلتين الأصليتين، L_1 مثلاً، لنحصل على $2x + 5(2) = 8$، أو $2x + 10 = 8$، أو $2x = -2$، أو $x = -1$. وبالتالي، يكون $x = -1$ و $y = 2$، أو بتعبير آخر الزوج $(-1,2)$ الحل الوحيد للمنظومة.

37.3 حل مسالة 36.3 بحذف y أولا.

■ نضرب L_1 في 2 لنحصل على $4x + 10y = 16$؛ ونضرب L_2 في 5 لنحصل على $15x - 10y = -35$؛ ثم نجمع للحصول على $19x = -19$ أو $x = -1$. نعوض بـ $x = -1$ في L_1 للحصول على $2(-1) + 5y = 8$، أو $-2+5y = 8$، أو $5y = 10$ أو $y = 2$. مرة أخرى، نحصل على الحل $(-1,2)$.

38.3 حل

$$5x - 2y = 8 \quad :L_1$$
$$3x + 4y = 10 \quad :L_2$$

▩ لحذف y، نضرب L_1 في 2 لنحصل على $10x - 4y = 16$؛ ثم نضيفها إلى L_2 للحصول على $13x = 26$، أو $x = 2$. نعوض بـ $x = 2$ في L_2 لنحصل على $3(2) + 4y = 10$، أو $6 + 4y = 10$، أو $4y = 4$، أو $y = 1$. وبذلك، يكون الزوج $(2,1)$ حلاً للمنظومة.

39.3 حل

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x - 2y = 5 \\ L_2: &\quad -3x + 6y = -10 \end{aligned}$$

▩ لحذف x، نضرب L_1 في 3 فنحصل على $3x - 6y = 15$؛ ثم نضيفها إلى L_2 لنحصل على $0x + 0y = 5$. وهذه منظومة متفسخة لها ثابت غير صفري؛ وبالتالي، لا يكون للمنظومة حلول. [هندسياً، يكون المستقيمان متوازيين].

40.3 حلّ

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x - 2y = 5 \\ L_2: &\quad -3x + 6y = -15 \end{aligned}$$

▩ لحذف x، نضرب L_1 في 3 لنحصل على $3x - 6y = 15$؛ ثم نضيفها إلى L_2 فنحصل على $0x + 0y = 0$. وهذه معادلة متفسخة، حيث الحد الثابت صفري. وبالتالي، يكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول، والتي تقابل حلول كلتا المعادلتين. [هندسياً، نقول أن المستقيمين متطابقان] لإيجاد «الحل العام» الذي يتضمن هذا العدد اللانهائي من الحلول الخاصة، نضع $y = a$ ونعوض في L_1 فنحصل على $x - 2y = 5$ أو $x = 5 + 2a$. وبذلك، يكون $(5 + 2a,a)$ الحل العام، حيث a أي عدد حقيقي.

41.3 لنفترض أن $ad-bc \neq 0$ من أجل المنظومة

$$\begin{aligned} L_1: &\quad ax + by = e \\ L_2: &\quad cx + dy = f \end{aligned}$$

بيّن أن للمنظومة حلاً وحيداً $x = (de - bf)/(ad-bc),\ \ y = (af-ce)/(ad-bc)$.

▩ نضرب L_1 في d، ونضرب L_2 في $-b$، ثم نجمع فنحصل على $(ab-bc)x = de - bf$. بما أن $ad-bc \neq 0$، فإننا نحصل على القيمة الوحيدة $x = (de-bf)/(ad-bc)$. الآن، نضرب L_1 في $-c$، ونضرب L_2 في a، ثم نجمع فنحصل على $(ad-bc)y = af-ce$. بما أن $ad-bc \neq 0$، فإننا نحصل على القيمة الوحيدة $y = (af-ce)/(ad-bc)$.

42.3 أعط تفسيراً هندسيا لنتيجة المسألة 41.3. افترض للتبسيط أن $bd \neq 0$.

▩ يمكن كتابه الشرط $ad-bc \neq 0$ في الشكل

$$ad \neq bc \qquad \text{أو} \qquad \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \qquad \text{أو} \qquad -\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{d}$$

ولكن $-(a/b)$ هو ميل $\mathcal{L}_1:\ y = -(a/b)x + (e/b)$ و $-(c/d)$ ميل $\mathcal{L}_2:\ y = -(c/d)x + (f/d)$. عندما يكون الميلان مختلفين، فلا بد للمستقيمين أن يتقاطعا في نقطة واحدة.

وبالعكس، نرى أنه، عندما $ad-bc = 0$، يكون المستقيمان متوازيين أو متطابقين، وبذلك لا يكون للمنظومة في المسألة 3.41 أية حلول، أو يكون لها عدد لا نهائي من الحلول.

4.3 معادلة واحدة في مجاهيل عديدة

يتعامل هذا القسم مع المعادلة الخطية (1) في المسألة 1.3.

43.3 أوجد «المجهول المقدَّم» وموضعه p في المعادلة

$$0x_1 + 0x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 0x_5 - 7x_6 = 2$$

▩ نقصد بـ «المجهول المقدّم»، في معادلة خطية، أول مجهول بمعامل غير صفري. وبالتالي، فإن موضعه p يكون أصغر قيمة صحيحة لـ j بحيث أن $a_j \neq 0$. هنا، يكون x_3 المجهول المقدم، لأن $a_1 = 0$، $a_2 = 0$، ولكن $a_3 \neq 0$. وبذلك، يكون $p = 3$.

44.3 أوجد «المجهول المقدّم» وموضعه p في المعادلة $0x - 7y + 2z = 4$.

■ y هو المجهول المقدم و $p = 2$.

45.3 أوجد المجهول المقدّم وموضعه p في المعادلة $4y - 7z = 6$.

■ إذا كانت المجاهيل هي z، y، x فإن y هو المجهول المقدّم و $p = 2$. ولكن إذا كان y و z هما المجهولين فقط، فإن $p = 1$.

46.3 أوجد المجهول المقدّم وموضعه في المعادلة $0x + 0y + 0z = 6$.

■ المعادلة متفسخة، وبالتالي، ليس لها مجهول مقدّم.

المبرهنة 3.3: لتكن المعادلة $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$، حيث $n > 1$؛ وليكن x_p المجهول المقدّم.

(i) أية مجموعة من القيم من أجل المجاهيل x_j حيث $j \neq p$ سوف تعطى حلاً وحيداً للمعادلة. [تسمى المجاهيل x_j «متغيرات حرة»، لأنه يمكن إعطاؤها أي قيم].

(ii) كل حل للمعادلة يتحصل عليه من (i). [تسمى مجموعة كل الحلول بـ «الحل العام» للمعادلة].

47.3 اثبت (i) في المبرهنة 3.3.

■ نضع $x_j = k_j$ من أجل $j \neq p$. بسبب أن $a_j = 0$ من أجل $j < p$، فإن التعويض في المعادلة يعطينا

$$a_px_p + a_{p+1}k_{p+1} + \ldots + a_nk_n = b \quad \text{أو} \quad a_px_p = b - a_{p+1}k_{p+1} - \ldots - a_nk_n$$

حيث $a_p \neq 0$. من المبرهنة 2.3 (i)، تتحدد x_p بشكل وحيد بواسطة

$$x_p = \frac{1}{a_p}(b - a_{p+1}k_{p+1} - \cdots - a_nb_n)$$

48.3 اثبت (ii) في المبرهنة 3.3.

■ لنفترض أن $u = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ حلّ. إذن

$$a_pk_p + a_{p+1}k_{p+1} + \cdots + a_nk_n = b \quad \text{أو} \quad k_p = \frac{1}{a_p}(b - a_{p+1}k_{p+1} - \cdots - a_nk_n)$$

ولكن هذا هو تماماً الحل

$$u = \left(k_1, \ldots, k_{p-1}, \frac{b - a_{p+1}k_{p+1} - \cdots - a_nb_n}{a_p}, k_{p+1}, \ldots, k_n\right)$$

المتحصل عليه في المسألة 47.3.

49.3 أوجد ثلاثة حلول خاصة للمعادلة $2x - 4y + z = 8$.

■ x، هنا، المجهول المقدّم. وبالتالي، خصص أي قيمة للمتغيرين الحرين y و z، ثم حل المعادلة من أجل x لتحصل على حلّ. مثلاً: (1) ضع $y = 1$ و $z = 1$. التعويض في المعادلة يعطينا $2x - 4(1) + 1 = 8$ أو $2x - 4 + 1 = 8$ أو $2x = 11$ أو $x = 11/2$؛ وبذلك يكون $u_1 = (11/2, 1, 1)$ حلاً. (2) ضع $y = 1$ و $z = 0$. التعويض يعطينا $x = 6$، وبالتالي يكون $u_2 = (6, 1, 0)$ حلاً. (3) ضع $y = 0$، $z = 1$. نعوض في المعادلة فنحصل على $x = 7/2$؛ وبذلك، يكون $u_3 = (7/2, 0, 1)$ حلاً.

50.3 أوجد الحل العام للمعادلة في المسألة 49.3.

■ لإيجاد الحل العام، نعطي قيماً إختيارية للمتغيرات الحرة. مثلاً $y = a$ و $z = b$. [نطلق على a و b اسم وسيطي الحل]. ثم نعوض في المعادلة للحصول على $2x - 4a + b = 8$، أو $2x = 8 + 4a - b$ أو $x = 4 + 2a - 1/2\, b$. وبذلك، يكون $u = (4 + 2a - 1/2b, a, b)$ الحل العام.

51.3 أوجد ثلاثة حلول خاصة للمعادلة $0x + 3y - 4z = 5$ أو ببساطة $3y - 4z = 5$.

■ y، هنا، هو المجهول المقدم، x و z المتغيران الحرّان. (1) نضع $x = 1$ و $y = 1$. يعطينا التعويض $y = 1/3$؛ وبالتالي يكون $u_1 = (1,1/3,1)$ حلاً. (2) نضع $x = 0$ و $y = 1$، يعطينا التعويض $y = 1/3$؛ وبالتالي يكون $u_2 = (0,1/3,1)$ حلاً. (3) نضع $x = 1$ و $y = 0$، فيعطينا التعويض $y = 5/3$؛ وبالتالي، يكون $u_3 = (1,5/3,0)$ حلاً.

52.3 أوجد الحل العام للمعادلة في المسألة 51.3

■ نضع $x = a$ و $z = b$ [حيث a و b وسيطان]. نعوض لنحصل على $3y - 4b = 5$، أو $3y = 5 + 4b$، أو $y = (5 + 4b)/3$. وبذلك، يكون $u = (a,(5 + 4b)/3,b)$ الحل العام.

5.3 m معادلات في n مجاهيل

سوف ننظر في المعادلات في الشكل النمطي

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad : L_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_b \quad : L_2 \\
&\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \quad : L_m
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

53.3 أوجد عدد المجاهيل في المنظومة

$$x + 2z = 7$$
$$3x - 5y = 4$$

■ رغم أن كل معادلة تبين مجهولين فقط، إلا أن للمنظومة 3 مجاهيل، x و y و z. [نفترض أنه لا يوجد مجهول بمعاملات صفرية فقط.]

54.3 حدد عما إذا كان $x_1 = -8$، $x_2 = 4$، $x_3 = 1$، $x_4 = 2$ حلاً للمنظومة

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$$
$$2x_2 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

■ عوض في كل معادلة لتحصل على

(1) $-8 + 2(4) - 5(1) + 4(2) \stackrel{?}{=} 3$ أو $-8 + 8 - 5 + 8 \stackrel{?}{=} 3$ أو $3 \stackrel{?}{=} 3$

(2) $2(-8) + 3(4) + 1 - 2(2) \stackrel{?}{=} 1$ أو $-16 + 14 + 1 - 4 \stackrel{?}{=} 1$ أو $-5 \stackrel{?}{=} 3$

لا، المعادلة الثانية غير متحققة.

55.3 هل يكون $u = (-8,6,1,1)$ حلاً للمنظومة في المسألة 54.3؟

■ نعوض بـ u في كل معادلة لنحصل على:

(1) $-8 + 2(6) - 5(1) + 4(1) \stackrel{?}{=} 3$ أو $-8 + 12 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 3$ أو $3 \stackrel{?}{=} 3$

(2) $2(-8) + 3(6) + 1 - 2(1) \stackrel{?}{=} 1$ أو $-16 + 18 + 1 - 2 \stackrel{?}{=} 1$ أو $1 \stackrel{?}{=} 1$

نعم، لأنه حل لكلتا المعادلتين.

56.3 هل يكون $v = (1,2,3,4,5)$ حلاً للمنظومة في المسألة 54.3؟

■ لا، إن متجها بـ 5 مركبات لا يمكن أن يحل منظومة بـ 4 مجاهيل فقط.

57.3 أعد كتابة المنظومة التالية في شكل نمطي:

$$2x+2y-z=7$$
$$z+3x-y=4$$

■ كما هو دائماً، نرتب المجاهيل هكذا (x,y,z). وبالتالي، فإن الشكل النمطي للمنظومة يكون

$$2x+2y-z=7$$
$$3x-y+z=4$$

58.3 هل يكون $u=(1,6,7)$ حلاً للمنظومة في المسألة 57.3؟

■ نعم، بالتعويض يكون حلاً.

المسائل 59.3-63.3 تتعلق بالعمليات الأولية على المنظومة (1.3):

$[E_1]$ نبادل بين المعادلة i والمعادلة j: $L_i \longleftrightarrow L_j$.

$[E_2]$ نضرب المعادلة i في سلّمي غير صفري: $(k\neq0)$ $L_i \to kL_i$.

$[E_3]$ نستبدل بالمعادلة i المعادلة j في مضروبة في k مضافاً إليها المعادلة i: $L_i \to kL_j + L_i$.

$[E_3]$ نستبدل بالمعادلة i المعادلة j مضروبة في k مضافاً إليها المعادلة i: $L_i \to kL_j + L_i$.

[E4] نستبدل بالمعادلة i المعادلة j في مضروبه في k' مضافاً إليها المعادلة i مضروبه في k: $(k\neq0)$ $L_i \to k'L_j + kL_i$.

59.3 بيّن أن لـ $[E_1]$ عملية عكسية من نفس النوع.

■ ان تبادل نفس المعادلتين مرتين، يعطينا المنظومة الأصلية؛ أي أن $L_i \to L_j$ هي معكوس نفسها.

60.3 بيّن أن $[E_2]$ لها عملية عكسية من نفس النوع.

■ بضرب المعادلة i في $k\neq0$ ثم في k^{-1}، أو بضربها في $k\neq0$ ثم في k، نتحصل على المنظومة الأصلية. بتعبير آخر، العمليتان $L_i \to kL_i$ و $L_i \to k^{-1}L_i$ متعاكستان.

61.3 بيّن أن لـ $[E_3]$ عملية عكسية من نفس النوع.

■ ان تطبيق العملية $L_i \to kL_j + L_i$ ثم العملية $L_i \to -kL_j + L_i$، وبالعكس، يعطينا المنظومة الأصلية. بتعبير آخر، تكون العمليتان $L_i \to kL_j + L_i$ و $L_i \to k^{-1}L_i$ متعاكستين.

62.3 بيّن أن تأثير تطبيق [E] يمكن الحصول عليه بتطبيق $[E_2]$ و $[E_3]$.

■ ان تطبيق $L_i \to kL_i$ ثم تطبيق $L_i \to k'L_j + L_i$ له نفس نتيجة تطبيق العملية $L_i \to k'L_j + kL_i$.

63.3 بين أن لـ [E] عملية عكسية من نفس النوع.

■ من المسائل 60.3-62.3، يكون تطبيق عكس [E] مكافئاً لتطبيق عكس $[E_3]$، $L_i \to k'L_j + L_i$، ثم تطبيق عكس $[E_2]$، $L_i \to k^{-1}L_i$. وبذلك، فإن العملية المطلوبة تكون

$$L_i \to k^{-1}(-k'L_j + L_i)=(-k^{-1}k')L_j + k^{-1}L_i \quad (k^{-1}\neq0)$$

وهي في شكل [E].

64.3 طبق العملية $L_2 \longleftrightarrow L_3$ على

$$x-2y+3z=5 \;:\; L_1$$
$$2x+y-4z=1 \;:\; L_2$$
$$3x+2y-7z=3 \;:\; L_3$$

■

$$x-2y+3z=5 \;:\; L_1$$
$$3x+2y-7z=3 \;:\; L_2$$
$$2x+y-4z=1 \;:\; L_3$$

65.3 طبق العملية $L_2 \to 3L_2$ على المنظومة الأصلية في المسألة 64.3.

■

$$x-2y+3z=5 \;:\; L_1$$
$$6x+3y-12z=3 \;:\; 3L_2$$
$$3x+2y-7z=3 \;:\; L_3$$

66.3 طبق العملية $L_3 \rightarrow -3L_1+L_3$ على المنظومة الأصلية في المسألة 64.3.

■ اضرب L_1 في -3 وأضفها إلى L_3:

$$\begin{array}{rl} -3x+6y-9z=-15 & : -3L_1 \\ 3x+2y-7z=3 & : \quad L_3 \\ \hline 8y-16z=-12 & : \text{الجمع} \end{array}$$

تحل هذه المعادلة الأخيرة محل المعادلة الثالثة في المنظومة الأصلية لتعطي

$$\begin{array}{rl} x-2y+3z=\ \ 5 & : \quad L_1 \\ 2x+y-4z=\ \ 1 & : \quad L_2 \\ 8y-16z=-12 & : 3L_1+L_3 \end{array}$$

[لاحظ أن المجهول x حذف من المعادلة الثالثة].

67.3 لنفترض أن كل معادلة L_i في المنظومة (1.3) ضربت في ثابت c_i، وأن المعادلات الناتجة جمعت معا لتعطي

$$(c_1a_{11}+\dots+c_ma_{m1})x_1+\dots+(c_1a_{1n}+\dots+c_ma_{mn})x_n=c_1b_1+\dots+c_mb_m \qquad (1)$$

يطلق على مثل هذه المعادلة مصطلح «تركيبة خطية» للمعادلات L_i. بين أن أي حلّ للمنظومة (1.3) هو حلّ أيضاً للتركيبة الخطية (1).

■ لنفترض أن $u=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ حلّ لـ (1.3):

$$a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\dots+a_{in}k_n=b_i \quad (i=1,\dots,m) \qquad (2)$$

لكن نبين أن u حل لـ (1)، لا بد أن نحقق المعادلة

$$(c_1a_{11}+\dots+c_ma_{m1})k_1+\dots+(c_1a_{1n}+\dots+c_ma_{mn})k_n=c_1b_1+\dots+c_mb_m$$

ولكن هذه يمكن بإعادة ترتيبها في الشكل

$$c_1(a_{11}k_1+\dots+a_{1n}k_n)+\dots+c_m(a_{m1}+\dots+a_{mn}k_n)=c_1b_1+\dots+c_mb_m$$

أي، بواسطة (2)،

$$c_1b_1+\dots+c_mb_m=c_1b_1+\dots+c_mb_m$$

والتي من الواضح أنها قضية صحيحة.

68.3 لنفترض أن منظومة (#) من معادلات خطية يتحصل عليها من منظومة (*) من معادلات خطية بتطبيق عملية أولية واحدة ـ $[E_1]$ أو $[E_2]$ أو $[E_3]$. وبيّن أن كل حلول (#) و (*) مشتركة. [المنظومتان «متكافئتان»].

■ كل معادلة في (#) تركيبة خطية للمعادلات في (*). وبالتالي، وبواسطة المسألة 67.3، أي حل لـ (*) سيكون حلاً لكل المعادلات في (#). بتعبير آخر، مجموعة الحل لـ (*) محتواة في مجموعة الحل لـ (#). من جهة أخرى، وبما أن للعمليات $[E_1]$ و $[E_2]$ و $[E_3]$ عمليات عكسية أولية، فإنه يمكن الحصول على المنظومة (*) من (#) بواسطة عملية أولية واحدة. وبالتالي، فإن مجموعة الحل لـ (#) محتواة في مجموعة الحل لـ (*). وبذلك، يكون لـ (#) و (*) نفس الحلول.

69.3 بيّن أنه إذا كان يتحصل على منظومة (#) لمعادلات خطية من منظومة (*) لمعادلات خطية، بواسطة متتالية منتهية من العمليات الأولية، فإن (#) و (*) منظومتان متكافئتان.

■ ينتج، عن مسألة 68.3، أن كل خطوة تحافظ على المجموعة الحلّية. إذن، فإن المنظومة الأصلية (*) والمنظومة النهائية (#) [وأي منظومة بينهما] منظومتان متكافئتان. [تشكل هذه النتيجة أساساً لأساليب الحل في القسمين 6.3 و 7.3].

70.3 إذا كانت منظومة معادلات خطية محتوية على المعادلة المتفسخة

$$0x_1+0x_2+\dots+0x_n=b : \ L \qquad (b\neq 0)$$

فما الذي يمكن قوله حول المجموعة الحلّية للمنظومة؟

■ ليس لـ L أي حل، وبالتالي لا يكون للمنظومة أية حلول؛ فتكون المجموعة الحلّية فارغة.

71.3 إذا كانت منظومة معادلات خطية محتوية على المعادلة المتفسخة

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 : L$$

فما الذي يمكن قوله حول المجموعة الحلّية للمنظومة؟

■ كل متجه في R^n يحقق L. وبالتالي، يمكننا حذف L من المنظومة دون تغيير مجموعتها الحلّية.

6.3 منظومات في الشكلين المثلثاتي والدرجي

72.3 ما المقصود بـ «شكل مثلثاتي»؟

■ تكون منظومة معادلات خطية في شكل مثلثاتي، إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، وإذا كان المجهول x_k المقدم في المعادلة رقم k. والنموذج هو:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (2.3)$$

حيث كل الـ $a_{kk} \neq 0$.

73.3 صف «خوارزمية التعويض المرتد» من أجل الحل الوحيد لمنظومة مثلثاتية لمعادلات خطية.

■ إن اسلوب التعويض المرتد كما يلي: نحل، أولاً، المعادلة الأخيرة في (2.3) من أجل المجهول الأخير x_n:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

ثانياً، نعوض بهذه القيمة لـ x_n في المعادلة قبل ـ الأخيرة ونحلها من أجل المجهول قبل ـ الأخير، x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}(b_n/a_{nn})}{a_{n-1,n-1}}$$

ثالثاً، نعوض بقيمتي x_n و x_{n-1} هاتين في المعادلة الثالثة ـ من الأسفل، ونحلها من أجل المتغير الثالث ـ من الأسفل، x_{n-2}:

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - (a_{n-2,n-1}/a_{n-1,n-1})[b_{n-1} - a_{n-1,n}(b_n/a_{nn})] - (a_{n-2,n}/a_{nn})b_n}{a_{n-2,n-2}}$$

وعموماً، نحدد x_k بالتعويض بالقيم المتحصل عليها $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ في المعادلة رقم k:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{m=k+1}^{n} a_{km}x_m}{a_{kk}}$$

يتوقف العمل على تحديد قيمة المجهول الأول x_1. ويكون الحل وحيداً لأن كل خطوة في الخوارزمية تحدد لنا قيمة وحيدة لـ x_k.

74.3 أوجد حل المنظومة

$$\begin{aligned} 2x + 4y - z &= 11 \\ 5y + z &= 2 \\ 3z &= -9 \end{aligned}$$

■ المنظومة لها شكل مثلثاتي، وبذلك نحلها بواسطة التعويض المرتد. (i) المعادلة الأخيرة تعطي $z = -3$. (ii) نعوض في المعادلة الثانية لنحصل على $5y - 3 = 2$ أو $5y = 5$ أو $y = 1$. (iii) نعوض بـ $z = -3$ و $y = 1$ في المعادلة الأولى فنحصل على $2x + 4(1) - (-3) = 11$، أو $2x + 4 + 3 = 11$، أو $2x = 4$، أو $x = 2$. وبذلك، يكون المتجه $u = (2, 1, -3)$ الحل الوحيد للمنظومة.

75.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 1 \\ 2y - 5z &= 2 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$$

▩ المنظومة لها شكل مثلثاتي؛ وبالتالي، نحلها بواسطة التعويض المرتد. (i) المعادلة الأخيرة تعطي $z = 2$. (ii) نعوض في المعادلة الثانية فنحصل على $2y - 5(2) = 2$ أو $2y - 10 = 2$ أو $2y = 12$ أو $y = 6$. (iii) نعوض بـ $z = 2$ و $y = 6$ في المعادلة الأولى فنحصل على $5x - 3(6) + 2(2) = 1$ أو $5x - 18 + 4 = 1$ أو $5x = 15$ أو $x = 3$. وبذلك، فإن المنجه $(3,6,2)$ هو الحل الوحيد للمنظومة.

76.3 حلّ

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z - 2t &= 9 \\ 5y - z + 3t &= 1 \\ 7z - t &= 3 \\ 2t &= 8 \end{aligned}$$

▩ المنظومة لها شكل مثلثاتي؛ وبالتالي، نحل بالتعويض المرتد. (i) المعادلة الأخيرة تعطى $t = 4$. (ii) بالتعويض في المعادلة الثالثة نحصل على $7z - 4 = 3$ أو $7z = 7$ أو $z = 1$. (iii) نعوض بـ $z = 1$ و $t = 4$ في المعادلة الثانية فنحصل على $5y - 1 + 3(4) = 1$ أو $5y - 1 + 12 = 1$ أو $5y = -10$ أو $y = -2$. (iv) نعوض بـ $y = -2$ و $z = 1$ و $t = 4$ في المعادلة الأولى، فنحصل على $2x - 3(-2) + 5(1) - 2(4) = 9$ أو $2x + 6 + 5 - 8 = 9$ أو $2x = 6$ أو $x = 3$. وبذلك، يكون $x = 3$ و $y = -2$ و $z = 1$ و $t = 4$ الحل الوحيد للمنظومة.

77.3 ما هو المقصود بـ «شكل درجي»؟

▩ تكون منظومة معادلات خطية في شكل درجي إذا لم تكن أي معادلة منها متفسخة وإذا كان المجهول المقدم في كل معادلة على يمين المجهول المقدم في المعادلة التي تسبقها. النموذج هو:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \qquad (3.3)$$

حيث $1 < j_2 < \ldots < j_r$ وحيث $a_{11} \neq 0$، $a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$. لاحظ أن $r \leqslant n$.

78.3 حدد المتغيرات الحرة في المنظومة

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z - 6s + 2t &= 4 \\ z + 8s - 3t &= 6 \\ s - 5t &= 5 \end{aligned}$$

▩ يصطلح، في الشكل الدرجي، على تسمية كل مجهول لا يكون مجهولاً مقدماً بأنه متغير حر. هنا، y و t متغيرات حرّان.

79.3 حدد المتغيرات الحرة في المنظومة

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 7z &= 1 \\ 4y + 5z &= 6 \\ 4z &= 9 \end{aligned}$$

▩ المجاهيل المقدمة هي x و y و z. وبالتالي، لا توجد متغيرات حرة (في أي منظومة مثلثاتية).

80.3 حدّد المتغيرات الحرة في المنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ 5x - 4y - z &= 4 \end{aligned}$$

■ لا يطبق مفهوم المتغير الحر إلا على المنظومات التي لها شكل درجي.

المبرهنة 4.3: يكون لمنظومة المعادلات الخطية (3.3)، والتي في شكل درجي، حل وحيد إذا $r = n$، ويكون لها حل واحد من أجل كل تحديد تقيم المتغيرات الحرة الـ $n - r$، إذا $r < n$.

81.3 اثبت المبرهنة 4.3.

■ يكون البرهان بواسطة الاستقراء على العدد r لمعادلات المنظومة. إذا $r = 1$، فإنه يكون لدينا معادلة خطية واحدة غير متفسخة، والتي تطبق عليها المبرهنة 3.3 عندما $n > r = 1$، والمبرهنة 2.3 (i) عندما $n = r = 1$. وبذلك، تتحقق المبرهنة من أجل $r = 1$.

نفترض الآن $r > 1$ وأن المبرهنة صحيحة من أجل منظومة من أجل عدد $r - 1$ من المعادلات. ننظر إلى المعادلات الـ $r - 1$

$$a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r$$

بأنها منظومة في المجاهيل $x_{j_2}, \ldots, x_n$. لاحظ أن المنظومة لها شكل درجي. نستطيع، بواسطة الفرضية الاستقرائية، تخصيص قيم اختيارية للمتغيرات الحرة لـ $(n - j_2 + 1) - (r - 1)$ في المنظومة المختزنة للحصول على حل [مثلاً، $x_{j_2} = k_{j_2}, \ldots, x_n = k_n$]. وكما في الحالة $r = 1$، فإن هذه القيم والقيم الاختيارية من المتغيرات الحرة الـ $j_2 - 2$ الإضافية [مثلاً، $x_2 = k_2, \ldots, x_{j_2-1} = k_{j_2-1}$]، تعطى للمعادلة الأولى، حيث

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}k_2 - \cdots - a_{1n}k_n)$$

[لاحظ أن هناك $(n - j_2 + 1) - (r - 1) + (j_2 - 2) = n - r$ متغيرا حراً]. بالإضافة إلى ذلك، فإن هذه القيم من أجل $x_1, \ldots, x_n$ تحقق المعادلات الأخرى لأن المعاملات $x_1, \ldots, x_{j_2-1}$، في هذه المعادلات، تكون صفرية.

الآن، إذا $r = n$ فإن $j_2 = 2$ وبذلك، نحصل بالاستقراء على حل وحيد للمنظومة الجزئية، ثم على حل وحيد للمنظومة كلها. وهكذا، تكون المبرهنة قد أثبتت.

82.3 بين كيفية الحصول على «الشكل الوسيطي» للحل العام للمنظومة الدرجية (3.3) عندما $n > r$.

■ نستبدل بالمتغيرات الحرة الـ $(n - r)$ وسائط $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$، ثم نستخدم التعويض المرتد للحصول على قيم للمجاهيل المقدّمة بدلالة الوسائط. سوف يكون الحل في الشكل

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \cdots + c_{1,n-r}t_{n-r} \\ x_2 &= c_2 + c_{21}t_1 + c_{22}t_{22} + \cdots + c_{2,n-r}t_{n-r} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= c_n + c_{n1}t_1 + c_{n2}t_2 + \cdots + c_{n,n-r}t_{n-r} \end{aligned}$$

83.3 بيّن كيفية الحصول على «الشكل المتغير ـ الحر» للحل العام للمنظومة الدرجية (3.3) عندما $n > r$.

■ نفترض أن المتغيرات الحرة هي $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-r}}$ استخدم التعويض المرتد للحل من أجل المتغيرات غير الحرة $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ بدلالة المتغيرات الحرة. سوف يكون الحل في الشكل

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 + d_{11}x_{k_1} + d_{12}x_{k_2} + \cdots + d_{1,n-r}x_{k_{n-r}} \\ x_{j_2} &= d_2 + d_{21}x_{k_1} + d_{22}x_{k_2} + \cdots + d_{2,n-r}x_{k_{n-r}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r} &= d_r + d_{r1}x_{k_1} + d_{r2}x_{k_2} + \cdots + d_{r,n-r}x_{k_{n-r}} \end{aligned}$$

84.3 أوجد ثلاثة حلول خاصة للمنظومة

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z + 2t &= 5 \\ z - 4t &= 2 \end{aligned}$$

▩ المنظومة لها شكل درجي. المجهولان المقدمان هما x و z؛ وبالتالي، تكون y و t المتغيرين الحرين. وبذلك، نخصص أي قيمتين لـ y و t، ثم نحل بالتعويض المرتد من أجل x و z لنحصل على حل. مثلاً:

(1) لتكن $y = 1$ و $t = 1$. نعوض بـ $t = 1$ في المعادلة الأخيرة، فنحصل على $z - 4 = 2$ أو $z = 6$. نعوض بـ $y = 1$ و $z = 6$ و $t = 1$ في المعادلة الأولى، فنحصل على $x + 4(1) - 3(6) + 2(1) = 5$ أو $x + 4 - 18 + 2 = 5$ أو $x = 22$. وبذلك، يكون $u_1 = (22,1,6,1)$ حلاً خاصاً.

(2) لتكن $y = 1$ و $t = 0$. نعوض بـ $t = 0$ في المعادلة الأخيرة فنحصل على $z = 2$. نعوض بـ $y = 1$ و $z = 2$ و $t = 0$ في المعادلة الأولى، فنحصل على $x = 6$. وبذلك، يكون $u_2 = (6,1,2,0)$ حلاً خاصاً.

(3) لتكن $t = 1$، $y = 0$. نعوض بـ $t = 1$ في المعادلة الأخيرة فنحصل على $z = 6$. نعوض بـ $y = 0$ و $z = 6$ و $t = 1$ في المعادلة الأولى فنحصل على $x = 21$. وبذلك، يكون $u_3 = (21,0,6,1)$ حلاً خاصاً.

85.3 عبّر عن الحل العام للمنظومة في المسألة 84.3 (أ) في شكل المتغير ـ الحرّ (ب) في شكل وسيطي.

▩ (أ) استخدم التعويض المرتد للحل من أجل المجهولين المقدّمين x و z بدلالة المتغيرين الحرين y و t. المعادلة الأخيرة تعطي $z = 2 + 4t$. نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على $x + 4y - 3(2 + 4t) + 2t = 5$، أو $x + 4y - 6 - 12t + 2t = 5$، أو $x = 11 - 4y + 10t$، وبالتالي، تكون

$$x = 11 - 4y + 10t$$
$$z = 2 + 4t$$

الشكل المتغير ـ الحر للحل العام. (ب) في (أ)، نضع $y = a$ و $t = b$ فنحصل على الشكل الوسيطي

$$x = 11 - 4a + 10b$$
$$y = a$$
$$z = 2 + 4b$$
$$t = b$$

أي المتجه الحل $u = (11 - 4a + 10b, a, 2 + 4b, b)$.

86.3 أعد مسألة 85.3 من أجل المنظومة الدرجية

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z + 2s - 5t &= 3 \\ y - 4z + s \quad\quad &= 1 \\ s - 3t &= 2 \end{aligned}$$

▩ (أ) استخدم التعويض المرتد للحل من أجل المتغيرات المقدمة x و y و s بدلالة المتغيرين الحرين z و t. المعادلة الثالثة تعطي $s = 2 + 3t$. نعوض في المعادلة الثانية فنحصل على $y - 4z + (2 + 3t) = 1$ أو $y = -1 + 4z - 3t$. نعوض من أجل s و y في المعادلة الأولى، فنحصل على $2x - 3(-1 + 4z - 3t) + 6z + 2(2 + 3t) = 3$ أو $x = -2 + 3z - 5t$. وبذلك يكون الشكل المتغير ـ الحر للحل العام.

$$s = 2 + 3t \qquad y = -1 + 4z - 3t \qquad x = -2+3z-5t$$

(ب) نضع $z = a$ و $t = b$ في (أ) فنحصل على المتجه الحل

$$u = (-2 + 3a - 5b, -1 + 4a - 3b, a, 2 + 3b, b)$$

87.3 أوجد ثلاثة حلول خاصة للمنظومة في المسألة 86.3.

▩ نحدد قيماً خاصة لـ a و b في الحل الوسيطي. (1) لتكن $a = 2$ و $b = 1$، نحصل على $u_1 = (-1,4,2,5,1)$. (2) لتكن $a = 1$ و $b = 0$، نحصل على $u_2 = (1,3,1,2,0)$. (3) لتكن $a = 0$ و $b = 1$، نحصل على $u_3 = (-7,-4,0,5,0)$.

7.3 حذف جاوس

88.3 لتكن المنظومة (1.3) في عدد m من المعادلات وعدد n من المجاهيل [قسم 5.3]. صف خوارزمية الحذف الجاوسية التي تختزل المنظومة إلى شكل درجي [وربما مثلثاتي]، أو التي تحدد أنه ليس للمنظومة حل.

■ الخوارزمية هي كما يلي:

خطوة 1. بادل بين المعادلات بحيث أن المجهول الأول، x_1، يظهر في المعادلة الأولى بمعامل غير صفري؛ أي، رتب الأمور بحيث $a_{11} \neq 0$.

خطوة 2. استخدم a_{11} كمرتكز لحذف x_1 من كل المعادلات باستثناء المعادلة الأولى. أي، طبق العملية الأولية التالية، من أجل كل $i > 1$ [قسم 5.3]:

$$[E]: L_i \to -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i \qquad \text{أو} \qquad [E_3]: L_i \to -(a_{i1}/a_{11})L_1 + L_i$$

خطوة 3. إفحص كل معادلة جديدة L لرؤية عما إذا كانت متفسخة:

(أ) إذا كانت L في الشكل $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$، فاحذف L من المنظومة. [أنظر مسألة 71.3].

(ب) إذا كانت L في الشكل $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b \neq 0$، إذن أَخرُج من الخوارزمية لأن المنظومة ليس لها حل. [أنظر المسألة 70.3].

خطوة 4. كرّر الخطوات 1 و 2 و 3 مع المنظومة الجزئية المكونة من كل المعادلات، باستثناء المعادلة الأولى.

خطوة 5. تابع الأسلوب السابق حتى تصبح المنظومة في شكل درجي، أو تتحصل على معادلة متفسخة كما في الخطوة 3 (ب).

89.3 بيّن أن الخطوة 3 (أ) في الخوارزمية الجاوسية يمكن أن تحل محلها:

خطوة 3 (أ′). إذا كان لـ L الشكل $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ أو إذا كانت L مضاعفاً لمعادلة أخرى، فاحذف L من المنظومة.

■ إذا $L = kL'$ من أجل واحدة من المعادلات L' في المنظومة، فإن العملية $L \to -kL' + L$ نستبدل بالمعادلة L المعادلة $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$، والتي ستحذف تأسيساً على الخطوة 3 (أ). بتعبير آخر، يجب أن تحذف L في الحالتين.

90.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

■ اختزل إلى شكل درجي بحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة، طبق العمليتين $L_2 \to -3L_1 + 2L_2$ و $L_3 \to -5L_1 + 2L_3$:

$$\begin{array}{rl} -3L_1: & -6x - 3y + 6z = -30 \\ 2L_2: & 6x + 4y + 4z = 2 \\ \hline -3L_1 + 2L_2: & y + 10z = -28 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -5L_1: & -10x - 5y + 10z = -50 \\ 2L_3: & 10x + 8y + 6z = 8 \\ \hline -5L_1 + 2L_3: & 3y + 16z = -42 \end{array}$$

يعطينا هذا المنظومة التالية، حيث حذفت فيها y من المعادلة الثالثة بواسطة العملية $L_3 \to -3L_2 + L_3$:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ y + 10z &= -28 \\ 3y + 16z &= -42 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ y + 10z &= -28 \\ -14z &= 42 \end{aligned}\right.$$

المنظومة الآن في شكل مثلثاتي، وبالتالي يكون لها الحل الوحيد [بواسطة التعويض المرتد] $u = (1,2,-3)$.

91.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ 2x - y + 4z &= 17 \\ 3x - 2y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + L_3$ لحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة، ثم نطبق $L_3 \to -4L_2 + 3L_3$ لحذف y من المعادلة الثالثة. هذه العمليات تعطينا:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+\ z&=\ \ 7\\ 3y+2z&=\ \ 3\\ 4y-\ z&=-7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x-2y+\ \ z&=\ \ 7\\ 3y+\ 2z&=\ \ 3\\ -11z&=-33 \end{aligned}\right.$$

المنظومة في شكل مثلثاتي، وبالتالي لها الحل الوحيد $u = (2,-1,3)$. [بواسطة التعويض المرتد].

92.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x+2y-\ z&=\ 3\\ 2x+5y-4z&=\ 5\\ 3x+4y+2z&=12 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + L_3$، ثم $L_3 \to 2L_2 + L_3$، فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-\ z&=\ \ 3\\ y-2z&=-1\\ -2y+5z&=\ \ 3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} x+2y-\ z&=\ \ 3\\ y-2z&=-1\\ z&=\ \ 1 \end{aligned}\right.$$

المنظومة في شكل مثلثاتي، وبالتالي يعطينا التعويض المرتد الحل الوحيد $u = (2,1,1)$.

93.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} 2x+\ y-3z&=1\\ 5x+2y-6z&=5\\ 3x-\ y-4z&=7 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -5L_1 + 2L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + 2L_3$، ثم $L_3 \to -5L_2 + L_3$ فنحصل على

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y-3z&=\ 1\\ -\ y+3z&=\ 5\\ -5y+\ z&=11 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x+y-\ 3z&=\ \ 1\\ -y+\ 3z&=\ \ 5\\ -14z&=-14 \end{aligned}\right.$$

المنظومة في شكل درجي، وبالتالي يكون لها الحل الوحيد [بالتعويض المرتد] $u = (3,-2,1)$.

94.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} 2x+\ y-2z&=\ 8\\ 3x+2y-4z&=15\\ 5x+4y-\ z&=\ 1 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -3L_1 + 2L_2$ و $L_3 \to -5L_1 + 2L_3$، ثم $L_3 \to -3L_2 + L_3$ فنحصل على

$$\left.\begin{aligned} 2x+\ y-2z&=\ \ 8\\ y-2z&=\ \ 6\\ 3y+8z&=-38 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x+y-\ 2z&=\ \ 8\\ y-\ 2z&=\ \ 6\\ 14z&=-56 \end{aligned}\right.$$

المنظومة في شكل مثلثاتي، وبالتالي يكون لها [بالتعويض المرتد] الحل الوحيد $u = (1,-2,-4)$.

95.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x+2y-\ 3z&=1\\ 2z+5y-\ 8z&=4\\ 3x+8y-13z&=7 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي. بحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة، نطبق العمليتين $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + L_3$ فنحصل [باستخدام المسألة 89.3] على:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ y-2z&=2\\ 2y-4z&=4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ y-2z&=2 \end{aligned}\right.$$

المسألة الآن في شكل درجي، حيث z متغير حر.

للحصول على الحل العام في شكل وسيطي، نضع $z=a$ ونحل بالتعويض المرتد:
$x=-3-a$ ،$y=2+2a$ ،$z=a$ أو $u=(-3-a,\ 2+2a,a)$.

96.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=-1\\ 3x-\ \ y+2z&=\ \ 7\\ 5x+3y-4z&=\ \ 2 \end{aligned}$$

■ نختزل إلى شكل درجي بحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة، نطبق العمليتين $L_2\rightarrow -3L_1+L_2$ و $L_3\rightarrow -5L_1+L_3$ ، فنحصل على المنظومة المكافئة

$$\begin{aligned} x+2y-\ \ 3z&=-1\\ -7y+11z&=\ \ 10\\ -7y+11z&=\ \ 7 \end{aligned}$$

العملية $L_3\rightarrow -L_2+L_3$ تقود إلى المعادلة المتفسخة $0=-3$. وبذلك، لا يكون للمنظومة حلول.

97.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x+2y-\ \ 3z-\ \ 4t&=2\\ 2x+4y-\ \ 5z-\ \ 7t&=7\\ -3x-6y+11z+14t&=0 \end{aligned}$$

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي. لحذف x من L_2 و L_3 نطبق العمليتين $L_2\rightarrow -2L_1+L_2$ و $L_3\rightarrow 3L_1+L_3$.
نطبق المسألة 89.3، فنحصل على

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z-4t&=2\\ z+\ \ t&=3\\ 2z+2t&=6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x+2y-3z-4t&=2\\ z+\ \ t&=3 \end{aligned}\right.$$

المنظومة الآن في شكل درجي، بمتغيرين حرين y و t. نحل من أجل x و z، فنحصل على الشكل المتغير ـ الحر للحل العام:
$x=11-2y+t$ ،$z=3+t$.

98.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} 2x-\ \ 5y+3z-4s+2t&=4\\ 3x-\ \ 7y+2z-5s+4t&=9\\ 5x-10y-5z-4s+7t&=22 \end{aligned}$$

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي. نطبق العمليات $L_2\rightarrow -3L_1+2L_2$ و $L_3\rightarrow -5L_1+2L_3$ ، ثم $L_3\rightarrow -5L_2+L_3$ فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} 2x-5y+\ \ 3z-\ \ 4s+2t&=\ \ 4\\ y-\ \ 5z+\ \ 2s+2t&=\ \ 6\\ 5y-25z+12s+4t&=24 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} 2x-5y+3z-4s+2t&=\ \ 4\\ y-5z+2s+2t&=\ \ 6\\ 2s-6t&=-6 \end{aligned}\right.$$

المنظومة الآن في شكل درجي. نحل من أجل المتغيرات المقدّمة x و y و s، بدلالة المتغيرين الحرين z و t، فنحصل على الشكل المتغير ـ الحر للحل العام:

$x=26+11z-15t \qquad y=12+5z-8t \qquad s=-3+3t$

ينتج عن ذلك فوراً الشكل الوسيطي:

$$x = 26 + 11a - 15b \quad y = 12 + 5a - 8b \quad z = a \quad s = -3 + 3b \quad t = b$$

99.3 حل المنظومة

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z - s + 2t &= 2 \\ 3x - 9y + 7z - s + 3t &= 7 \\ 2x - 6y + 7z + 4s - 5t &= 7 \end{aligned}$$

▩ اختـزل المنظـومـة إلـى شكـل درجـي. طبـق العمليـات $L_2 \to -3L_1 + L_2$ و $L_3 \to -2L_1 + L_3$ ، ثـم $L_3 \to -3L_2 + L_3$ لتحصل على [استخدم المسألة 89.3]:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 2z - s + 2t &= 2 \\ z + 2s - 3t &= 1 \\ 3z + 6s - 9t &= 3 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x - 3y + 2z - s + 2t &= 2 \\ z + 2s - 3t &= 1 \end{aligned}\right.$$

المنظومة الآن في شكل درجي. نحلها من أجل المجهولين المقدمين، x و z، بدلالة المتغيرات الحرة y، s، t لنحصل على الحل العام في الشكل $x = 3y + 5s - 8t$، $z = 1 - 2s + 3t$.

100.9 حلّ المنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t &= 2 \\ 2x + 5y - 2z + t &= 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t &= 7 \end{aligned}$$

▩ نختزل المنظومة إلى شكل درجي. نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة بواسطة العمليتين $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -5L_1 + L_3$ ؛ يعطينا هذا المنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t &= 2 \\ y + 4z - 7t &= -3 \\ 2y + 8z - 14t &= 3 \end{aligned}$$

وتقود العملية $L_3 \to -2L_2 + L_3$ إلى المعادلة المتفسخة $0 = 9$. وبذلك، لا يكون للمنظومة حلول [رغم أن عدد المجاهيل في المنظومة أكثر من عدد المعادلات].

المبرهنة 5.3: إن أي منظومة معادلات خطية إما: (i) أن يكون لها حلٌ وحيدٌ، أو (ii) لا يكون حلول، أو (iii) يكون لها عدد لا نهائي من الحلول.

101.3 اثبت المبرهنة 5.3.

▩ بتطبيق خوارزمية الحذف الجاوسية على المنظومة، نستطيع إما إختزالها إلى شكل درجي أو نحدد أنه لا حلول لها. إذا لم يكن للشكل الدرجي متغيرات حرة، فإنه يكون للمنظومة حل وحيد. وإذا كان للشكل الدرجي متغيرات حرة، فإنه يكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول.

102.3 حدد قيم k بحيث يكون للمنظومة التالية في المجاهيل x، y، z: (i) حلّ وحيد، (ii) لا حلول، (iii) عدد لا نهائي من الحلول:

$$\begin{aligned} x - 2y \qquad &= 1 \\ x - y + kz &= -2 \\ ky + 4z &= 6 \end{aligned}$$

▩ نختصر المنظومة إلى شكل درجي، ثم نحذف x من المعادلة الثانية بواسطة العملية $L_2 \to -L_1 + L_2$ وبعدها نحذف y من المعادلة الثالثة بواسطة $L_3 \to -kL_2 + L_3$ ؛ يعطينا هذا

$$\left.\begin{aligned} x - 2y \qquad &= 1 \\ y + kz &= -3 \\ ky + 4z &= 6 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x - 2y \qquad\qquad &= 1 \\ y + \qquad kz &= -3 \\ (4 - k^2)z &= 6 + 3k \end{aligned}\right.$$

يكون للمنظومة حلّ وحيد إذا كان معامل z في المعادلة الثالثة مختلفاً عن الصفر؛ أي إذا $4-k^2 \neq 0$. ولكن $4-k^2=0$ إذا وفقط إذا $k=2$ أو $k=-2$. وبالتالي، يكون للمنظومة حل وحيد إذا $k \neq 2$ و $k \neq -2$. إذا $k=2$، تختزل المعادلة الثالثة إلى $0=12$، وفي هذه الحالة لا يكون للمنظومة حلول. إذا $k=-2$، فإن المعادلة الثالثة تصبح $0=0$، وبذلك يمكن حذفها؛ فيكون للمنظومة المختزلة متغير حرّ z وبالتالي عدد لا نهائي من الحلول ونلخص: (i) $k \neq 2$ و $k \neq -2$، (ii) $k=2$، (iii) $k=-2$.

103.3 حدّد قيم k بحيث أن المنظومة التالية في المجاهيل x، y، z: (i) يكون لها حلّ وحيد، (ii) أو يكون لها عدد لا نهائي من الحلول:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + kz &= 3 \\ x + ky + 3z &= 2 \end{aligned}$$

■ تختزل المنظومة إلى شكل درجي. نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة بواسطة العمليتين $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -L_1 + L_3$ لنحصل على:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + (k+2)z &= 1 \\ (k-1)y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

لكي نحذف y من المعادلة الثالثة، نطبق العملية $L_3 \to -(k-1)L_2 + L_3$ ، فنحصل على:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + (k+2)z &= 1 \\ (3+k)(2-k)z &= 2-k \end{aligned}$$

يكون للمنظومة حل وحيد إذا كان معامل z في المعادلة الثالثة غير صفري؛ أي إذا $k \neq 2$ أو $k \neq -3$. في حالة $k=2$، تختزل المعادلة الثالثة إلى $0=0$، ويكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول [واحد لكل قيمة لـ z]. في حالة $k=-3$، تختزل المعادلة إلى $0=5$، فلا يكون للمنظومة حلول. باختصار: (i) $k \neq 2$ و $k \neq -3$، (ii) $k=-3$، (iii) $k=2$.

104.3 حدد قيم k بحيث أن المنظومة التالية في المجاهيل x، y، z: (i) يكون لها حلّ وحيد، (ii) لا يكون لها حلول، (iii) يكون لها عدد لا نهائي من الحلول:

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

■ نبادل أولاً بين L_1 و L_2 للتأكد من وجود مرتكز غير صفري في المعادلة الاولى. ثم نحذف y من L_2 و L_3 بتطبيق $L_2 \to -L_1 + L_2$ و $L_3 \to -kL_1 + L_3$؛ يعطينا هذا:

$$\left.\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ (k-1)y + (1-k)z &= 0 \\ (1+k)y + (1-k^2)z &= 1-k \end{aligned}\right.$$

لحذف y من المعادلة الثالثة، نطبق $L_3 \to L_2 + L_3$ فنحصل على

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ (k-1)y + (1-k)z &= 0 \\ (2-k-k^2)z &= 1-k \end{aligned}$$

يكون للمنظومة حلٌ وحيد إذا $(2+k)(1-k) = 2-k-k^2$، وهو معامل z في L_3، غير صفري؛ أي إذا $k \neq -2$ و $k \neq 1$. في حالة $k=1$، تختزل المعادلتان الثانية والثالثة إلى $0=0$، ويكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول. في حالة $k=-2$، تختزل المعادلة الثالثة إلى $0=3$ ولا يكون للمعادلة حلول. باختصار: (i) $k \neq -2$ و $k \neq 1$، (ii) $k=-2$، (iii) $k=1$.

105.3 ما هي الشروط الواجب فرضها على a و b و c بحيث أن المنظومة التالية في المجاهيل x و y و z يكون لها حل؟

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

■ تختزل إلى شكل درجي. لحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة بواسطة العمليتين $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -L_1 + L_3$، فنحصل على المنظومة المكافئة:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2y - 5z &= b - 2a \\ -4y + 10z &= c - a \end{aligned}$$

نحذف y من المعادلة الثالثة بتطبيق العملية $L_3 \to 2L_2 + L_3$، فنحصل في النهاية على المنظومة المكافئة:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2y - 5z &= b - 2a \\ 0 &= c + 2b - 5a \end{aligned}$$

لن يكون للمنظومة أي حل إذا $c + 2b - 5a \neq 0$، فيكون للمنظومة حل واحد على الأقل إذا $c = 2b - 5a = 0$ أو $5a = 2b + c$. لاحظ، في هذه الحالة، انه سوف يكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول. بتعبير آخر، لا يمكن أن يكون للمنظومة حلّ وحيد.

106.3 اثبت أن القضايا الثلاث التالية، حول منظومة معادلات خطية، متكافئة: (i) المنظومة متوائمة متوافقة (لها حلول). (ii) لا توجد تركيبة خطية لمعادلات المنظومة في الشكل

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0 \qquad (*)$$

(iii) المنظومة خزولة (قابلة ـ للاختزال) إلى شكل درجي.

■ لنفترض أن المنظومة خزولة إلى شكل درجي. يكون للشكل الدرجي حلّ، وبالتالي يكون للمنظومة الأصلية حل. وبذلك، (iii) تقتضي (i).

لنفترض أن للمنظومة حلاً. من المسألة 67.3، نجد أن أي تركيبة خطية للمعادلات يكون لها حلّ أيضاً. ولكن (*) ليس لها حل؛ وبالتالي، لا تكون (*) تركيبة خطية للمعادلات. وبذلك، ليس -(iii) تقتضي ليس -(ii)، أو بشكل مكافىء (ii) تقتضي (iii).

107.3 لنفترض أن $\mathscr{S}$ منظومة معادلات خطية مجاهيلها أكثر من معادلاتها. بيّن أنه لا يمكن أن يكون لـ $\mathscr{S}$ حل وحيد.

■ اختزال $\mathscr{S}$ إلى شكل درجي لا يعطينا أبداً منظومة مثلثاتية، لأن $\mathscr{S}$ لها مجاهيل أكثر عدداً من المعادلات. بتعبير آخر، نحن نحصل إما على معادلة متفسخة غير متوائمة، وفي هذه الحالة لا يكون للمنظومة حلول؛ أو على شكل درجي بمتغيرات حرة، وفي هذه الحالة يكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول.

8.3 منظومات المعادلات الخطية في شكل مصفوفي

108.3 استخدم جداءً مصفوفياً لتمثيل المنظومة (1.3) بقسم 5.3.

■ $AX = B$، حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفه المعاملات $m \times n$،

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة المركبة

$$(A, B)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

فتسمى المصفوفة المزيدة للمنظومة.

109.3 أعد كتابه المنظومة التالية كمعادلة مصفوفية: $2x+3y-4z=7$ ، $x-2y-5z=3$.

■
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[لاحظ أن حجم عمود المجاهيل لا يساوي حجم عمود الثوابت].

110.3 أوجد المصفوفة المزيدة للمنظومة في المسألة 109.3.

■
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن العمليات الصفية الأولية على المصفوفة المزيدة [المسألة 79.2] لمنظومة معادلات خطية تقابل تماماً العمليات الأولية على المعادلات الخطية [قسم 5.3].

وبالتالي، فإنه يمكن حل منظومة معادلات خطية بتطبيق خوارزمية الحذف الجاوسية على المصفوفة المزيدة، بدلاً من المنظومة نفسها.

111.3 صف العلاقة بين قابلية ـ الحل لمنظومة معادلات خطية والشكل الدرجي لمصفوفتها المزيدة.

■ تأسيساً على الملاحظة في المسألة 110.3، فإنه يكون للمنظومة حلّ إذا وفقط إذا لم يكن للشكل الدرجي متجه صفي $(0,0,\ldots,0,b)$، حيث $b\neq 0$.

112.3 صف العلاقة بين الحل لمنظومة معادلات خطية والشكل الصفي القانوني [المسألة 104.2] لمصفوفتها المزيدة.

■ إن الشكل الصفي القانوني للمصفوفة المزيدة (باستبعاد الصفوف الصفرية) يعطي الشكل المتغير ـ الحر لحل المنظومة (عندما تكون المنظومة متوائمة)؛ علينا ببساطة نقل حدود المتغيرات ـ إلى جانب الثوابت. ينتج ذلك من الحقيقة بأن معاملات المجاهيل المقدمة في الشكل الصفي القانوني، تكون هي نفسها المداخل غير الصفرية المقدمة في المصفوفة، والمساوية لواحد وتكون المداخل غير الصفرية الوحيدة في أعمدتها.

113.3 حل المنظومة $x-2y-3z=4$ ، $2x-3y+z=5$ باستخدام المصفوفة المزيدة.

■ إختزل المصفوفة المزيدة إلى الشكل الدرجي ثم إلى الشكل الصفي القانوني:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

وبذلك، فإن الشكل المتغير ـ الحر للحل العام هو

$$\begin{aligned} x \quad +11z &= -2 \\ y+\ \ 7z &= -3 \end{aligned} \qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned} x &= -2-11z \\ y &= -3-\ \ 7z \end{aligned}$$

(لاحظ أن z هو المتغير ـ الحر].

114.3 حل باستخدام المصفوفة المزيدة

$$\begin{aligned} x+\ \ y-2z+4t &= 5 \\ 2x+2y-3z+\ \ t &= 3 \\ 3x+3y-4z-2t &= 1 \end{aligned}$$

▩ اختزل المصفوفة المزيدة إلى الشكل الدرجي ثم إلى الشكل الصفي القانوني:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ \cdots & & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -10 & -9\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\end{pmatrix}$$

[حذف الصف الثالث من المصفوفة الثانية، لأنه مضاعف للصف الثاني وسوف ينتج عن صف صفري]. وبذلك، فإن الشكل المتغير ـ الحر للحل العام للمنظومة يكون كما يلي:

$$\begin{aligned} x + y \quad - 10t &= -9 \\ z - \quad 7t &= -7 \end{aligned} \qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned} x &= -9 - y + 10t \\ z &= -7 + 7t \end{aligned}$$

هنا، المتغيران الحرّان هما y و t.

115.3 حل باستخدام المصفوفة المزيدة

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y - z &= -4 \\ 3x - 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

▩ تختزل المصفوفة المزيدة إلى الشكل الدرجي ثم إلى الشكل الصفي القانوني:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & -1 & -4\\ 3 & -2 & -1 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -10\\ 0 & -8 & -4 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -10\\ 0 & 0 & -28 & -84\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

وبما أن الشكل الصفي القانوني مثلثاتي، فالحل يكون وحيداً: $x = 2$، $y = -1$، $z = 3$.

116.3 حلّ باستخدام المصفوفة المزيدة:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

▩ اختزل المصفوفة المزيدة إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5\\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

الصف الثالث في المصفوفة الدرجية يقابل المعادلة المتفسخة $0 = 5$؛ وبالتالي، لا يكون للمنظومة حلول.

117.3 حلّ باستخدام المصفوفة المزيدة:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z - 2s + 4t &= 1 \\ 2x + 5y - 8z - s + 6t &= 4 \\ x + 4y - 7z + 5s + 2t &= 8 \end{aligned}$$

▩ نختزل المصفوفة المزيدة إلى شكل درجي، ثم إلى الشكل الصفي القانوني:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1\\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4\\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -4 & 7 & -2 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 0 & 8 & 7\\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21\\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

وبذلك، فإن الشكل المتغير ـ الحر للحل يكون:

$$\begin{aligned} x &= 21 - z + 24t \\ y &= -7 + 2z + 8t \\ s &= 3 \end{aligned} \qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned} x + z + 24t &= 21 \\ y - 2z - 8t &= -7 \\ s + 2t &= 3 \end{aligned}$$

118.3 تعرّف «رتبة» مصفوفة A، ونكتبها رتبة (A)/ rank A، بأنها عدد المتجهات الصفوف في مجموعة أعظمية من المتجهات الصفوف المستقلة خطياً [أنظر فصل 8]. ما علاقة رتبة (A)/ rank A بحجم شكل درجي لـ A؟

■ يمكن إثبات أن رتبة (A) تساوي عدد الصفوف (غير الصفرية) في أي شكل درجي لـ A.

المبرهنة 6.3: يكون لمنظومة معادلات خطية، AX = B، حلّ إذا وفقط إذا كانت رتبة مصفوفة المعادلات مساوية لرتبة المصفوفة المزيدة.

119.3 اثبت المبرهنة 6.3.

■ إن الحالة الوحيدة التي يكون فيها رتبة (A) ≠ رتبة (A,B) هي عندما ينتج عن أسلوب اختزال (A,B) إلى شكل درجي متجه (0,0,...,0,b)، b ≠ 0. ولكن هذا هو شرط أن تكون المنظومة غير متوائمة [أنظر المسألة 106.3].

9.3 المنظومات المتجانسة

120.3 عرّف منظومة متجانسة لمعادلات خطية.

■ نقول عن منظومة معادلات خطية أنها متجانسة إذا كانت كل الحدود الثابتة مساوية للصفر:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

أو، في شكل مصفوفي، $AX = \mathbf{0}$.

121.3 اثبت: يكون المتجه الصفري $\mathbf{0} = (0,0,...,0)$ حلاً (الحل الصفري) لأي منظومة متجانسة $AX = \mathbf{0}$.

■ $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

122.3 اثبت: إذا كانت $u_1,u_2,...,u_q$ حلولاً لمنظومة متجانسة $AX = 0$، فإن أي تركيبة خطية للمتجهات، مثلاً $k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_qu_q$، تكون أيضاً حلاً لـ $AX = 0$.

■ لدينا، باستخدام المبرهنة 2.2:

$$A(k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_qu_q) = A(k_1u_1) + A(k_2u_2) + \cdots + A(k_qu_q) = k_1(Au_1) + k_2(Au_2) + \cdots + k_q(Au_q)$$
$$= k_1\mathbf{0} + k_2\mathbf{0} + \cdots + k_q\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

تستخدم المسائل 123.3-128.3 المبرهنة التالية [أنظر المسألة 105.8]:

المبرهنة 7.3: لنفترض أن للشكل الدرجي، لمنظومة متجانسة $AX = \mathbf{0}$، عدداً s من المتغيرات الحرة. ولتكن $u_1,u_2,...,u_s$ الحلول المتحصل عليها المساواة واحد من المتغيرات الحرة لواحد وجعل بقية المتغيرات الحرة مساوية للصفر. إذن، تكون $u_1,u_2,...,u_s$ «قاعدة» للفضاء الحلّي $\mathcal{W}$ لـ $AX = \mathbf{0}$. [يعني هذا انه يمكن التعبير عن أي حلّ للمنظومة كتركيبة خطية وحيدة لـ $u_1,u_2,...,u_s$؛ بالإضافة إلى ذلك، فإن «بعد» $\mathcal{W}$ يكون $\dim(\mathcal{W}) = s$].

123.3 ليكن $\mathcal{W}$ الفضاء الحلّي للمنظومة المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z + 5s - 3t &= 0 \\ 2x + 7y - 3z + 7s - 5t &= 0 \\ 3x + 11y - 4z + 10s - 9t &= 0 \end{aligned}$$

أوجد بعد $\mathcal{W}$ وقاعدة له.

■ إختزل المنظومة إلى شكل درجي. طبق العمليات $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + L_3$ ثم $L_3 \to -2L_2 + L_3$ لتحصل على:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z + 5s - 3t &= 0 \\ y + z - 3s + t &= 0 \\ 2y + 2z - 5s &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ y + z - 3s + t = 0 \\ s - 2t = 0 \end{cases}$$

للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغيران حرّان، z و t؛ وبالتالي، فإن $\dim(\mathcal{W}) = 2$. يمكن الحصول على قاعدة $\{u_1, u_2\}$ من أجل $\mathcal{W}$ كما يلي: (1) نضع $z = 1$، $t = 0$. التعويض المرتد يعطينا $s = 0$، ثم $y = -1$، ثم $x = +5$: وبذلك، $u_1 = (5, -1, 1, 0, 0)$. (2) نضع $z = 0$، $t = 1$. التعويض المرتد يعطينا $s = 2$، ثم $y = 5$، ثم $x = -2$. وبذلك، $u_2 = (-2, 5, 0, 2, 1)$.

124.3 أوجد الحل العام للمنظومة المتجانسة في المسألة 123.3.

■ من المبرهنة 7.3، يكون الحل العام هو المتجه

$$au_1 + bu_2 = a(5, -1, 1, 0, 0) + b(-2, 5, 0, 2, 1) = (5a - 2b, -a + 5b, a, 2b, b)$$

حيث a و b ثابتان إختياريان. لاحظ أن هذا ليس إلا الشكل الوسيطي للحل العام تحت إختيار الوسيطين $z = a$ و $t = b$ [نضع $z = 1$ لنحصل على u_1] [نضع $t = 1$ لنحصل على u_2].

125.3 ليكن $\mathcal{W}$ الفضاء الحلّي للمنظومة المتجانسة

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2s - 4t &= 0 \\ 2x + 4y - 5z + s - 6t &= 0 \\ 5x + 10y - 13z + 4s - 16t &= 0 \end{aligned}$$

أوجد بعد $\mathcal{W}$ وقاعدة له.

■ إختزل إلى شكل درجي. طبق العمليات $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -5L_1 + L_3$، ثم $L_3 \to -2L_2 + L_3$، لتحصل على:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2s - 4t &= 0 \\ z - 3s + 2t &= 0 \\ 2z - 6s + 4t &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z + 2s - 4t = 0 \\ z - 3s + 2t = 0 \end{cases}$$

للمنظومة، في شكلها الدرجي، ثلاثة متغيرات حرة، y و s و t؛ بالتالي، $\dim(\mathcal{W}) = 3$. يتحصل على قاعدة $\{u_1, u_2, u_3\}$ من أجل $\mathcal{W}$ كما يلي: (1) نضع $t = 0$، $s = 0$، $y = 1$. التعويض المرتد يعطينا الحل $u_1 = (-2, 2, 0, 0, 0)$. (2) نضع $t = 0$، $s = 1$، $y = 0$. التعويض المرتد يعطينا $u_2 = (7, 0, 3, 1, 0)$. (3) نضع $t = 1$، $s = 0$، $y = 0$. التعويض المرتد يعطينا $u_3 = (-2, 0, -2, 0, 1)$.

126.3 ليكن $\mathcal{W}$ الفضاء الحلّي للمنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x - y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

أوجد بعد $\mathcal{W}$ وقاعدة له.

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -2L_1 + L_2$ و $L_3 \to -3L_1 + L_3$، ثم $L_3 \to 7L_2 + L_3$، فنتحصل على:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 8z &= 0 \\ -7y + 5z &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y + 8z = 0 \\ 61z = 0 \end{cases}$$

ليست هناك متغيرات حرة (المنظومة في شكل مثلثاني). وبالتالي، $\dim(\mathcal{W}) = 0$، وليس لـ$\mathcal{W}$ قاعدة. تحديداً، تتكون $\mathcal{W}$ من المتجه الصفري فقط، $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$.

127.3 ليكن $\mathcal{W}$ الفضاء الحلّي للمنظومة

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5z + 3t &= 0 \\ 3x + 6y - 7z + 4t &= 0 \\ 5x + 10y - 11z + 6t &= 0 \end{aligned}$$

أوجد بعد $\mathcal{W}$ وقاعدة له.

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -3L_1 + 2L_2$ و $L_3 \to -5L_1 + 2L_3$، ثم $L_3 \to -3L_2 + L_3$ فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y - 5z + 3t &= 0 \\ z - t &= 0 \\ 3z - 3t &= 0 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} 2x + 4y - 5z + 3t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{aligned}\right.$$

للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغيران حرّان، y و t؛ وبالتالي، $\dim(\mathcal{W}) = 2$. نتحصل على قاعدة $\{u_1, u_2\}$ من أجل $\mathcal{W}$ كما يلي: (1) نضع $y = 1$، $t = 0$. يعطينا التعويض المرتد الحل $u_1 = (-2, 1, 0, 0)$. (2) نضع $y = 0$، $t = 1$. يعطينا التعويض المرتد الحل $u_2 = (1, 0, 1, 1)$.

128.3 ليكن $\mathcal{W}$ الفضاء الحلّي للمنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y + 7z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

أوجد بعد $\mathcal{W}$ وقاعدة له.

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي، فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \\ 2y + 8z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \end{aligned}\right.$$

يوجد، في الشكل الدرجي، متغير حر واحد z. وبالتالي، $\dim(\mathcal{W}) = 1$. للحصول على قاعدة $\{u_1\}$ من أجل $\mathcal{W}$، نضع $z = 1$. التعويض المرتد يعطي $y = -4$ ثم $x = 9$. وبذلك، $u_1 = (9, -4, 1)$.

المبرهنة 8.3: كل منظومة متجانسة من معادلات خطية، مجاهيلها أكثر من معادلاتها، يكون لها حل غير صفري.

129.3 اثبت المبرهنة 8.3.

■ بما أن 0 حل، فإن المنظومة متوائمة ويمكن وضعها في شكل درجي. أيضاً، بكونه للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغيرات حرة، وبالتالي حل غير ـ صفري.

130.9 حدد عما إذا كان للمنظومة المتجانسة التالية حل غير صفري:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

■ نعم، بواسطة المبرهنة 8.3.

10.3 المنظومات غير ـ المتجانسة والمنظومات المتجانسة المقرنة

131.3 عرّف المنظومة المتجانسة المقرنة بالمنظومة غير المتجانسة $AX = B$.

■ $AX = 0$

132.3 أوجد المنظومة المتجانسة المقرنة بالمنظومة غير المتجانسة:

$$\begin{aligned} x + 3y - 5z + 7t &= 3 \\ 2x - 5y + 2z - 8t &= 2 \\ 4x - 2y - 6z + 9t &= 8 \end{aligned}$$

■ نستبدل بالثوابت أصفاراً فنحصل على:

$$\begin{aligned} x + 3y - 5z + 7t &= 0 \\ 2x - 5y + 2z - 8t &= 0 \\ 4x - 2y - 6z + 9t &= 0 \end{aligned}$$

133.3 اثبت: إذا كان u و v حلّين لمنظومة غير متجانسة $AX = B$، فإن الفرق $w = v - u$ حلّ للمنظومة المتجانسة المقرنة بها $AX = 0$.

■ $Aw = A(v - u) = Av - Au = B - B = 0$

المبرهنة 9.3: يمكن الحصول على الحل العام لمنظومة غير ـ متجانسة $AX = B$، بإضافة الحل العام لنمنظومة المتجانسة المقرنة $AX = 0$ إلى حل خاص v_0 لـ $AX = B$.

134.3 اثبت المبرهنة 9.3.

■ ليكن w أي حلّ لـ $AX = 0$؛ إذن $A(\upsilon_0 + w) = A\upsilon_0 + Aw = B + 0 = B$. أي أن، المجموع $\upsilon_0 + w$ يكون حلاً لـ $AX = B$. من جهة أخرى، لنفترض أن υ حلّ لـ $AX = B$. إذن، تبين المتطابقة $\upsilon = \upsilon_0 + (\upsilon - \upsilon_0)$ والمسألة 133.3 أن أي حل لـ $AX = B$ يمكن الحصول عليه بإضافة حلٍّ لـ $AX = 0$ إلى الحل الخاص υ_0 لـ $AX = B$.

سوف نرى [المسألة 135.3] أن الحل العام، الذي تعطيه المبرهنة 9.3، ينطبق جوهرياً مع الشكلين المتغير ـ الحر والوسيطي [المسألة 85.3].

135.3 لتكن المنظومة

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z + 4t &= 5 \\ 3x - 8y - 3z + 8t &= 18 \\ 2x - 3y + 5z - 4t &= 19 \end{aligned}$$

(أ) أوجد الشكل الوسيطي للحل العام للمنظومة. (ب) بيّن أنه يمكن إعادة كتابة نتيجة (أ) في الشكل الذي تعطيه النظرية 9.3.

■ (أ) نختزل المنظومة إلى شكل درجي. نطبق $L_2 \to -3L_1 + L_2$ و $L_3 \to -2L_1 + L_3$، ثم $L_3 \to -3L_2 + L_3$ فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 2z + 4t &= 5 \\ y + 3z - 4t &= 3 \\ 3y + 9z - 12t &= 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x - 3y - 2z + 4t &= 5 \\ y + 3z - 4t &= 3 \end{aligned}\right.$$

للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغيران حرّان z و t. نضع $z = a$ و $t = b$، حيث a و b وسيطان. التعويض المرتد يعطينا $y = 3 - 3a + 4b$، ثم $x = 14 - 7a + 8b$. وبذلك، يكون الشكل الوسيطي للحل

$$x = 14 - 7a + 8b \qquad y = 3 - 3a + 4b \qquad z = a \qquad t = b \tag{*}$$

(ب) ليكن $\upsilon_0 = (14,3,0,0)$ المتجه المكون من الحدود الثابتة في (*)، وليكن $u_1 = (-7,3,1,0)$ متجه معاملات a في (*)، و $u_2 = (8,4,0,1)$ متجه معاملات b في (*). إذن، يمكن إعادة كتابة الحل العام (*) في شكل متجهي كما يلي:

$$(x,y,z,t) = \upsilon_0 + au_1 + bu_2 \tag{**}$$

نبين الآن أن (**) هو الحل العام وفق المبرهنة 9.3. نلاحظ أولاً أن υ_0 هو حل المنظومة غير المتجانسة الذي يتحصل عليه بوضع $a = 0$ و $b = 0$. لتكن المنظومة المتجانسة في شكل درجي:

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z + 4t &= 0 \\ y + 3z - 4t &= 0 \end{aligned}$$

المتغيران الحرّان هما z و t. نضع $z = 1$ و $t = 0$، فنحصل على الحل $u_1 = (-7,-3,1,0)$. نضع $z = 0$ و $t = 1$ فنحصل على الحل $u_2 = (8,4,0,1)$. نكتشف، بواسطة المبرهنة 7.3 أن $\{u_1,u_2\}$ قاعدة للفضاء الحلّي للمنظومة المتجانسة المقرنة. وبذلك، يكون لـ (**) الشكل المطلوب.

11.3 منظومات المعادلات الخطية كمعادلات متجهية

136.3 استبدل بالمنظومة النمطية (1.3) معادلة متجهية واحدة.

■

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

أو إذا $u_1,u_2,\ldots,u_n$ و v ترمز للمتجهات (الأعمدة)،

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = v$$

وبذلك، يكون v تركيبة خطية لـ $u_1,u_2,\ldots,u_n$ إذا وفقط إذا كان للمنظومة حل.

137.3 حوّل المعادلة المتجهية التالية إلى منظومة معادلات خطية مكافئة ثم حلها:

$$\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$$

■

$$\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\\3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y\\5y\\8y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3z\\2z\\3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+5y+2z\\3x+8y+3z\end{pmatrix}$$

نساوي بين المركبات المتقابلة للمتجهات، ثم نختزل المنظومة إلى شكل درجي:

$$\left.\begin{aligned}x+2y+3z&=1\\2x+5y+2z&=-6\\3x+8y+3z&=5\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+2y+3z&=1\\y-4z&=-8\\2y-6z&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+2y+3z&=2\\y-4z&=-8\\2z&=18\end{aligned}\right.$$

المنظومة مثلثاتية، والتعويض المرتد يعطينا الحل الوحيد $x = -81$، $y = 28$، $z = 9$.

138.3 اكتب المتجه $v = (1, -2, 5)$ كتركيبة خطية للمتجهات $u_1 = (1,1,1)$، $u_2 = (1,2,3)$ و $u_3 = (2,-1,1)$.

■ أوجد منظومة المعادلات الخطية المكافئة ثم حلها. نكتب

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 = (x + y + 2z, x + 2y - z, x + 3y + z)$$

فنحصل على المنظومة

$$\left.\begin{aligned}x+y+2z&=1\\x+2y-z&=-2\\x+3y+z&=5\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+y+2z&=1\\y-3z&=-3\\2y-z&=4\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+y+2z&=1\\y-3z&=-3\\5z&=10\end{aligned}\right.$$

الحل الوحيد للشكل المثلثاتي هو $x = -6$، $y = 3$، $z = 2$؛ وبذلك $v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$.

139.3 اكتب $v = (2, 3, -5)$ كتركيبة خطية لـ $u_1 = (1,2,-3)$ و $u_2 = (2,-1,-4)$، و $u_3 = (1,7,-5)$.

■

$$(2,3,-5) = xu_1 + yu_2 + zu_3 = (x + 2y + z, 2x - y + 7z, -3x - 4y - 5z)$$

أو

$$\left.\begin{aligned}x+2y+z&=2\\2x-y+7z&=3\\-3x-4y-5z&=-5\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+2y+z&=2\\-5y+5z&=-1\\2y-2z&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}x+2y+z&=2\\-5y+5z&=-1\\0&=3\end{aligned}\right.$$

المنظومة غير متوائمة، وبذلك ليس لها حلول، وبالتالي، لا يمكن كتابه v كتركيبة خطية للمنجهات المعطاة.

140.3 لتكن المعادلة المتجهية التالية:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n = 0 \qquad (1)$$

حيث $x_1,x_2,\dots,x_n$ مجاهيل سلمية. إن المتجهات $u_1,u_2,\dots,u_n$ تكون «مرتبطة خطياً» أو «مستقلة خطياً» وفقاً لكون المعادلة (1) تمتلك حلاً غير صفري أو ليس لها إلا الحل الصفري. حدّد عما إذا كانت المتجهات $(1,1,1)$ و $(2,-1,3)$ و $(1,-5,3)$ مرتبطة أم مستقلة خطياً.

■ نساوي أولاً تركيبة خطية من المتجهات بالمتجه الصفري:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z\\x-y-5z\\x+3y+3z\end{pmatrix}$$

ثم نساوي بين المركبات المتقابلة، ونختزل المنظومة إلى شكل درجي:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\x-y-5z=0\\x+3y+3z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+z=0\\-3y-6z=0\\y+2z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+z=0\\y+2z=0\end{array}\right.$$

يكون للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغير حر، وبالتالي، يكون للمنظومة حل غير ـ صفري. ينتج عن ذلك أن المتجهات الأصلية مرتبطة خطياً.

141.3 حدد مـا إذا كانت المتجهات $(1,-2,-3)$ و $(2,3,-1)$ و $(3,2,1)$ مرتبطة خطياً أم لا.

■ نجعل تركيبة خطية للمتجهات (بمعاملات x، y، z) مساوية للمتجه الصفري:

$$(0,0,0) = (x+2y+3z, -2x+3y+2z, -3x-y+z)$$

أو

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+3z=0\\-2x+3y+2z=0\\-3x-y+x=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+3z=0\\7y+8z=0\\5y+10z=0\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{r}x+2y+3z=0\\y+2z=0\\7y+8z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+3z=0\\y+2z=0\\-6z=0\end{array}\right.$$

المنظومة المتجانسة في شكل مثلثاتي، بدون متغيرات حرة؛ وبالتالي، ليس لها إلا الحل الصفري. وبذلك، تكون المتجهات الأصلية مستقلة خطياً.

142.3 حدد مـا إذا كانت المتجهات $(1,1,-1)$ و $(2,-3,1)$ و $(8,-7,1)$ مرتبطة أو مستقلة خطياً.

■ نجعل تركيبة خطية (بمعاملات x، y، z) للمتجهات مساوية للصفر:

$$(0,0,0) = (x+2y+8z,\ x-3y-7z,\ -x+y+z)$$

أو

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+8z=0\\x-3y-7z=0\\-x+y+z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+8z=0\\-5y-15z=0\\3y+9z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+8z=0\\y+3z=0\\y+3z=0\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r}x+2y+8z=0\\y+3z=0\end{array}\right.$$

للمنظومة، في شكلها الدرجي، متغير حر، ويكون لها بالتالي حل غير صفري. وبذلك، تكون المتجهات الأصلية مرتبطة خطياً.

المبرهنة 10.3: أي متجهات في $\mathbf{R}^n$، عددها $(n+1)$ أو أكثر، تكون مرتبطة خطياً.

143.3 اثبت المبرهنة 10.3.

■ لتكن $u_1, u_2, \dots, u_q$ متجهات في $\mathbf{R}^n$، و $q > n$. تكون المعادلة المتجهية
$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_qu_q = \mathbf{0}$

مكافئة لمنظومة متجانسة، عدد معادلاتها n، في عدد $q>n$ من المجاهيل. من النظرية 8.3، يكون لهذه المنظومة حل غير صفري. وبذلك، تكون المتجهات $u_1, u_2, \dots, u_q$ مرتبطة خطياً.

144.3 بيّن أن المتجهات $(1,-2,3,-4)$، $(1,2,1,5)$، $(2,0,-6,-5)(3,-7,0,2)$، و $(-8,1,-7,4)$ مرتبطة خطياً.

■ هذه خمسة متجهات في $\mathbf{R}^4$؛ من المبرهنة 10.3، نجد أن المتجهات مرتبطة خطياً.

145.3 بيّن أن أي مجموعة من q متجها، تتضمن المتجه الصفري، تكون مستقلة خطياً.

■ نرمز للمتجهات بـ $\mathbf{0}, u_2, u_3, \dots, u_q$، فيكون لدينا $1\mathbf{0} + 0u_2 + 0u_3 + \dots + 0u_q = \mathbf{0}$.

الفصل 4
المصفوفات المربعة

1.4 قطر، أثر

1.4 عرّف «القطر» [أو «القطر الرئيس»] لمصفوفة مربعة -n $A = (a_{ij})$.

■ يتكون قطر A من العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

2.4 أوجد قطر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

■ يتكون القطر من العناصر التي تبدأ من الركن العلوي الأيسر وتنتهي بالركن السفلي الأيمن؛ وهي السلميات 1، 5، 9.

3.4 أوجد قطر المصفوفة $B = \begin{pmatrix} t-2 & 3 \\ -4 & t+5 \end{pmatrix}$.

■ الزوج $[t - 2, t + 5]$.

4.4 أوجد قطر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

■ لا يعرّف القطر إلا من أجل مصفوفة مربعة.

5.4 عرّف «أثر» مصفوفة مربعة -n $A = (a_{ij})$.

■ أثر المصفوفة A هو مجموع العناصر القطرية؛ أي

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

6.4 أوجد أثر المصفوفة A في المسألة 2.4.

■ إن الأثر هو مجموع العناصر القطرية: $\operatorname{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

7.4 أوجد أثر المصفوفة B في المسألة 3.4.

■ أجمع العناصر القطرية: $\operatorname{tr}(B) = (t - 2) + (t + 5) = 2t + 3$.

المبرهنة 1.4: لنفترض أن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتان مربعتان -n، و k عدد سلّمي. إذن (i) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. (ii) $\operatorname{tr}(kA) = k.\operatorname{tr}(A)$. (iii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

8.4 أثبت (i) في المبرهنة 1.4.

■ لتكن $A + B = (c_{ij})$. إذن، $c_{ij} a_{ij} + b_{ij}$، وبذلك

$$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n} (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

9.4 اثبت (ii) في المبرهنة 1.4.

■ لتكن $kA = (c_{ij})$. إذن، $c_{ij} = ka_{ij}$، و

$$\operatorname{tr}(kA) = \sum_{j=1}^{n} ka_{jj} = k \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = k \cdot \operatorname{tr}(A)$$

10.4 اثبت (iii) في النظرية 1.4.

■ لتكن $AB = (c_{ij})$ و $BA = (d_{ij})$. إذن

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{و} \qquad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

وبالتالي

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$$

11.4 اثبت أنه، عموماً، يكون $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

■ استخدم مصفوفتي المسألة 62.2.

12.4 لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة مرتبها n، ومداخلها في **R**، ولها الخاصية $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل i و j [أنظر قسم 10.4]. اثبت أن $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$.

■ لتكن $A^2 = (c_{ij})$. إذن، $c_{ij} = \sum_{k=1} a_{ik} a_{kj}$ ، وبذلك

$$\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2 \geq 0$$

حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا $A = 0$.

2.4 المصفوفات: المتطابقة والسلمية والقطرية

13.4 عرّف المصفوفة المربعة المتطابقة -n [أو مصفوفة الوحدة]، والتي يرمز لها بـ I_n أو I فقط.

■ I_n هي المصفوفة المربعة -n التي عناصرها القطرية تساوي 1، أما بقية العناصر فصفرية.

14.4 اكتب المصفوفات المتطابقة من المرتبات 2 و 3 و 4.

■

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.4 ارمز للمصفوفة المتطابقة باستخدام ترميز «دلتا كرونكر».

■ تعرّف دلتا كرونكر بأنها

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا} \quad i \neq j \\ 1 & \text{إذا} \quad i = j \end{cases}$$

وبالتالي، $I = (\delta_{ij})$.

16.4 أوجد أثر I_n.

■ يكون لـ I_n عدد من العناصر المساوية لواحد؛ وبالتالي، $\operatorname{tr}(I_n) = n$.

17.4 إذا A مصفوفة $m \times n$، بين أن $I_m A = A$.

■ لاحظ أولاً أن I_mA هي أيضاً مصفوفة $m\times n$، لتكن $I_mA=(f_{ij})$. ولكن

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}a_{kj}=\delta_{ii}a_{ij}=a_{ij}$$

ولذلك، $I_mA=A$، لأن المداخل المتقابلة متساوية.

18.4 إذا A مصفوفة $m\times n$، بين أن $AI_n=A$.

■ لاحظ أولاً أن AI_n هي أيضاً مصفوفة $m\times n$، لتكن $AI_n=(g_{ij})$. ولكن

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}$$

إذن، $AI_n=A$، لأن المداخل المتقابلة متساوية.

19.4 عرّف «المصفوفة السلمية» D_k المنتمية إلى عدد سلّمي k.

■ $D_k=kI$.

20.4 أوجد المصفوفات السلمية من المرتبات 2، 3، 4 المقابلة للسلّمي $k=5$.

■ في كل حالة، نضع خمسات على القطر وأصفاراً في غير ذلك:

$$\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}5&&&\\&5&&\\&&5&\\&&&5\end{pmatrix}$$

[من الاستخدامات الشائعة، حذف المصفوفات الجزئية الصفرية، أو أي أنماط صفرية أخرى، كما في المصفوفة الثالثة]

21.4 بيّن أن $D_kA=kA$، من أجل مصفوفة سلمية D_k ذات مرتبة مناسبة.

■ $D_kA=(kI)A=k(IA)=kA$.

22.4 بيّن أن $BD_k=kB$، من أجل مصفوفة سلّمية D_k ذات مرتبة مناسبة.

■ $BD_k=B(kI)=k(BI)=kB$. [جوهر المسألتين 21.4 و 22.4 يكمن في أن الضرب في عدد سلمي يمكن أن يستبدل ضرب مصفوفي خاص]

23.4 أثبت الخواص الجبرية التالية للمصفوفات السلمية من نفس المرتبة: (i) $D_k+D_l=D_{k+l}$؛ (ii) $D_kD_l=D_{kl}$.

■ (i) $D_k+D_l=kI+lI=(k+l)I=D_{k+l}$؛ (ii) $D_kD_l=(kI)(lI)=k(I)(lI)=kl(I)(I)=klI=D_{kl}$.

24.4 عرّف «مصفوفة قطرية».

■ تكون مصفوفة مربعة $D=(d_{ij})$ قطرية إذا كانت كل عناصرها غير القطرية صفرية. يرمز لمثل هذه المصفوفة، غالباً، في الشكل $D=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\ldots,d_{nn})$، حيث بعض أو كل الـ d_{ii} قد تكون أصفاراً.

25.4 اكتب تفصيلا $\mathrm{diag}(3,-7,2)$، $\mathrm{diag}(4,-5)$، و $\mathrm{diag}(6,-3,-9,1)$.

■ ضع السلّميات المعطاة على القطر الرئيس، وأصفاراً في غير ذلك:

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-7&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}4&0\\0&-5\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}6&&&\\&-3&&\\&&-9&\\&&&1\end{pmatrix}$$

26.4 أوجد AB، حيث $A = \text{diag}(2,-3,5)$ و $B = \text{diag}(7,4,6)$

■ الجداء هو مصفوفة قطرية يتحصل عليها بضرب المداخل القطرية المتقابلة: $\text{diag}(2.7,-3.4,5.6) = \text{diag}(14,-12,30)$.

27.4 لتكن $D = (d_{ij})$ مصفوفة مربعة قطرية -m، ولتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة m×n. بيّن أن DA يمكن الحصول عليها بضرب كل صف R_i لـ A في d_{ii}.

■ يتحصل على الصف i لـ DA بضرب الصف i، لـ D $(0,0,\ldots,d_{ii},\ldots,0)$، أماميا في A:

$$(0,0,\ldots,d_{ii},\ldots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (d_{ii}a_{i1}, d_{ii}a_{i2}, \ldots, d_{ii}a_{in})$$

$\uparrow$ الفصل i^{th}

$$= d_{ii}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = d_{ii}R_i$$

28.4 لتكن $D = (d_{ij})$ مصفوفة مربعة قطرية -n، ولتكن $B = (b_{ij})$ مصفوفة m×n. بيّن أنه يمكن الحصول على BD بضرب كل عمود C_j لـ B في d_{jj}.

■ اتبع نفس خطوات المسألة 27.4، ولكن اضرب، بعدياً هذه المرة، في المتجه العمود j لـ D.

29.4 بيّن أن $D^T = D$، من أجل أي مصفوفة قطرية $D = (d_{ij})$.

■ لتكن $D^T = (a_{ij})$. إذا $j \neq i$، إذن $a_{ij} = d_{ji} = 0 = d_{ij}$؛ إذا $i = j$، إذن $a_{ii} = d_{ii}$. وبذلك $D^T = D$.

30.4 بيّن أن $I^T = I$.

■ بما أن I قطرية، إذن $I^T = I$.

31.4 هل $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$؟

■ إذا كانت **0** مصفوفة قطرية، إذن $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$. في الحالات الأخرى، يكون حجما $\mathbf{0}^T$ و **0** مختلفين، وبالتالي لا يمكن أن تتساويا.

3.4 جبر المصفوفات المربعة. المصفوفات التبديلية

32.4 عرّف «جبراً» مصفوفياً.

■ نقول عن تجميع غير خالٍ $\mathscr{C}$ لمصفوفات بأنه «جبر» [مصفوفي] إذا كان $\mathscr{C}$ مغلقاً تحت عمليات الجمع المصفوفي، وضرب مصفوفة في عدد سلمي، وضرب المصفوفات.

33.4 بيّن أن التجميع $\mathscr{A}_n$ لكل المصفوفات المربعة -n يشكل جبراً مصفوفياً.

■ من الواضح، أن التجميع $\mathscr{A}_n$ غير خالٍ. إن مجموع أي مصفوفتين مربعتين -n هو مصفوفة مربعة = n. وأي مضروب سلمي لمصفوفة مربعة -n يكون مصفوفة مربعة -n. أخيراً، جداء مصفوفتين مربعتين -n يكون مصفوفة مربعة -n. وبذلك، يكون $\mathscr{A}_n$ جبراً مصفوفياً.

34.4 هل تشكل مجموعة كل المصفوفات المربعة القطرية -n، $\mathscr{D}_n$ ، جبراً لمصفوفات؟

■ نعم، فإن $\mathscr{D}_n$ غير خالية، كما أن المجموع، والضرب السلمي، والجداء للمصفوفات القطرية تكون قطرية.

35.4 هل تشكل مجموعة كل المصفوفات السلمية المربعة -n جبراً؟

■ نعم، ينتج ذلك من المسألة 23.4 بالإضافة إلى أن $\alpha D_k = D_{\alpha k}$.

36.4 هل تشكل مجموعة كل المصفوفات 2×3 جبراً؟

■ لا، فإن جداء مصفوفتين 2×3 ليس معرّفاً.

37.4 بيّن أن جبراً مصفوفياً $\mathscr{A}$ يحتوي مصفوفة صفرية.

■ بما أن $\mathscr{A}$ غير خالٍ، فإنه يحتوي مصفوفة واحدة على الأقل، A. إذن، لدينا بواسطة ضرب المصفوفات $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$، وهي تنتمي إلى $\mathscr{A}$.

38.4 بيّن أن التجميع $\mathscr{B}$ لكل المصفوفات 2×2 من الشكل $\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ تكون جبراً مصفوفياً.

■ من الواضح أن $\mathscr{B}$ ليس خالياً. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ تنتمي إلى $\mathscr{B}$، إذن

$$A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kb & ka \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}$$

تنتمي أيضاً إلى $\mathscr{B}$. وبذلك، يكون $\mathscr{B}$ جبراً مصفوفياً.

39.4 متى تكون المصفوفتان A و B تبديليتين؟

■ تتبادل المصفوفتان A و B إذا $AB = BA$، وهو شرط ينطبق فقط على المصفوفات المربعة من نفس المرتبة.

40.4 بيّن أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$ تبديليتان.

■ $$AB = \begin{pmatrix} 5+12 & 4+22 \\ 15+24 & 12+44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad BA = \begin{pmatrix} 5+12 & 10+16 \\ 6+33 & 12+44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{pmatrix}$$

بما أن $AB = BA$، فإن المصفوفتين تبديليتان.

41.4 أوجد كل المصفوفات $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ التي تتبادل مع $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ $$AM = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad MA = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

نضع $AM = MA$، لنحصل على المعادلات الأربع:

$$x + z = x \qquad y + t = x + y \qquad z = z \qquad t = z + t$$

نجد من المعادلتين الأولى أو الأخيرة، $z = 0$؛ ومن المعادلة الثانية، $x = t$. وبذلك، تكون M أي مصفوفة في الشكل

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

42.4 بيّن أن المصفوفة السلمية kI_n تتبادل مع أي مصفوفة A مربعة -n.

■ لدينا: $(kI)A = k(IA) = kA$ و $A(kI) = k(AI) = kA = (kI)A$.

43.4 بيّن أن $\mathscr{B}$ [المسألة 38.4] «جبر تبديلي».

■ نستخدم ترميز المسألة 38.4، لإجراء الحساب:

$$BA = \begin{pmatrix} ca+db & cb+da \\ da+cb & db+ca \end{pmatrix}$$

وبذلك، $BA = AB$.

4.4 قوى المصفوفات

44.4 يمكن تعريف القوى الصحيحة غير السالبة لمصفوفة M تكرارياً بواسطة:

$$M^{r+1} = MM^r \quad (r = 1,2,3,\ldots) \quad \text{و} \quad M^0 = I \quad M^1 = M$$

إثبت المبرهنة التالية: (أ) $A^pA^q = A^{p+q}$؛ (ب) إذا كانت A و B تبديليتين، فكذلك A^p و B^q.

■ (أ) يتم البرهان بالاستقراء على p. الحالة $p = 0$ صحيحة لأن $A^0 = I$، والحالة $p = 1$ صحيحة تعريفاً. لنفترض أن $p>1$، وأن النتيجة متحققة من أجل $p-1$. إذن

$$A^pA^q = a((A^{p-1})A^q = AA^{p+q-1} = A^{p+q}$$

(ب) نبين أولاً أن A تتبادل مع B^q، بواسطة الاستقراء على q. الحالة $q = 0$ صحيحة لأن $B^0 = I$، والحالة $q = 1$ صحيحة فرضاً. نفترض $q > 1$، وأن A تتبادل مع B^{q-1}. إذن:

$$B^qA = BB^{q-1}A = BAB^{q-1} = ABB^{q-1} = AB^q$$

وبذلك تتبادل A مع B^q. بالمثل، وبواسطة الاستقراء على p، نتبادل B^q مع A^p.

في المسائل 45.4-48.4، نكون A هي المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

45.4 إحسب A^2.

■ $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

46.4 إحسب A^3.

■ $$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-16 & -4+34 \\ 36+24 & -16-51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

[المبرهنة، في المسألة 44.4، تضمن النتيجة نفسها من حساب A^2A].

47.4 إحسب f(A) من أجل الحدودية $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

■ $$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I = 2\begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14-4+5 & 60-8+0 \\ 120-16+0 & -134+12+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$$

48.4 بيّن أن A صفرٌ للحدودية $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

■ $$g(A) = A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8+0 & 17-6-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[على القارىء المستزيد الرجوع إلى نظرية كايلي ـ هاملتون /Cayley-Hamilton].

في المسائل 49.4-52.4، A هي المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

49.4 إحسب A^2.

■ $$A^2=\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+6&4-2\\6-3&6+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&2\\3&7\end{pmatrix}$$

50.4 إحسب A^3.

■ $$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&2\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20+6&4+14\\30-3&6-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&18\\27&-1\end{pmatrix}$$

51.4 أوجد $f(A)$، حيث $f(x)=x^3-3x^2-2x+4$.

■ $$f(A)=A^3-3A^2-2A+4I=\begin{pmatrix}26&18\\27&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}10&2\\3&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}26&18\\27&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-30&-6\\-9&-21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-4\\-6&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&8\\12&-16\end{pmatrix}$$

52.4 أوجد $g(A)$، حيث $g(x)=x^2-x-8$.

■ $$g(A)=A^2-A-8I=\begin{pmatrix}10&2\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\3&-1\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}10&2\\3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&-2\\-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8&0\\0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون A صفراً لـ $g(x)$.

في المسائل 53.4-55.4، B هي المصفوفة $B=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}$.

53.4 إحسب B^2.

■ $$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+15&3+9\\5+15&15+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}$$

54.4 أوجد $f(B)$، حيث $f(x)=2x^2-4x+3$.

■ $$f(B)=2B^2-4B+3I=2\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}32&24\\40&48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-12\\-20&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&12\\20&39\end{pmatrix}$$

55.4 أوجد $g(B)$، حيث $g(x)=x^2-4x-12$.

■ $$g(B)=B^2-4B-12I=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}-12\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-12\\-20&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12&0\\0&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

أي أن B صفر لـ $g(x)$.

في المسائل 56.4-59.4، استخدم المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

56.4 احسب A^2.

■ $$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+2\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

57.4 إحسب A^3.

■ $$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 4+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

58.4 لتكن $S_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. بيّن أن $AS_k = S_kA = S_{k+2}$.

■ $$AS_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & k+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = S_{k+2}$$
$$S_kA = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+k \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = S_{k+2}$$

59.4 إحسب A^n.

■ من المسألة 58.4، ضرب A^m في A يضيف 2 إلى المدخل الأيمن العلوي؛ وبالتالي

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

60.4 عرّف مصفوفة «جامدة».

■ تكون مصفوفة E جامدة إذا $E^2 = E$.

61.4 بيّن أن المصفوفة المتطابقة I جامدة.

■ $I^2 = II = I$

62.4 بيّن أن أي مصفوفة مربعة صفرية **0** تكون جامدة.

■ $\mathbf{0}^2 = \mathbf{00} = \mathbf{0}$.

63.4 بيّن أن

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

مصفوفة جامدة.

■ $$E^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = E$$

64.4 بيّن أنه إذا $AB = A$ و $BA = B$، إذن تكون A و B جامدتين.

■ $$A = AB = A(BA) = (AB)A = AA = A^2$$
$$B = BA = B(AB) = (BA)B = BB = B^2$$

65.4 بيّن أن جداء مصفوفتين جامدتين تبديليتين يكون جامداً.

■ $$(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$$

66.4 عرّف مصفوفة «عديمة القوى من الصنف p» من أجل عدد صحيح موجب p.

■ تكون A مصفوفة عديمة القوى من الصنف p إذا $A^p = \mathbf{0}$ ولكن $A^{p-1} \neq \mathbf{0}$.

67.4 اثبت أنه إذا كانت A عديمة القوى من الصنف p، إذن $A^q = \mathbf{0}$ من أجل $q > p$.

■ $A^q = A^pA^{q-p} = \mathbf{0}A^{q-p} = \mathbf{0}$.

68.4 بيّن أن

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$$

عديمة القوى من الصنف 3.

■

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{pmatrix}$$

و

$$A^2=A^2A=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

69.4 عرّف «مصفوفة إرتدادية»

■ تكون مصفوفة A إرتدادية إذا $A^2 = I$، حيث I المصفوفة المتطابقة.

70.4 بيّن أن

$$A=\begin{pmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&-3\end{pmatrix}$$

مصفوفة إرتدادية.

■

$$A^2=\begin{pmatrix}16-3-12&12+0-12&12-3-9\\-4+0+4&-3+0+4&-3+0+3\\-16+4+12&-12+0+12&-12+4+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

71.4 أوجد علاقة تربط بين المصفوفات الارتدادية والمصفوفات الجامدية.

■ أنظر في التحليل $A = 1/2\,(I + A) - 1/2\,(I - A) \equiv A^+ - A^-$ لمصفوفة إرتدادية إختيارية A. لدينا:

$$A^+A^+=\tfrac{1}{2}(I+A)\tfrac{1}{2}(I+A)=\tfrac{1}{4}(I^2+AI+IA+A^2)$$
$$=\tfrac{1}{4}(2I+2A)=\tfrac{1}{2}(I+A)=A^+$$

وبالمثل، $A^-A^- = A^-$. وبذلك، يمكن التعبير عن مصفوفة إرتدادية كفرق بين مصفوفتين جامدتين.

5.4 المصفوفات المربعة كدوال

72.4 بيّن أن مصفوفة A مربعة n- تعرّف دالة من $\mathbf{R}^n$ إلى $\mathbf{R}^n$ بطريقتين مختلفتين.

■ ليكن u متجهاً في $\mathbf{R}^n$. باعتبار u متجهاً عمودياً، تعرّف A دالة $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ بواسطة $A(u) = Au$. من جهة أخرى، باعتبار u متجهاً صفياً، تعرّف A دالة $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ بواسطة $A(u) = uA$.

في المسائل التالية، إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك، سوف تعرّف المتجهات في $\mathbf{R}^n$ على أنها متجهات عمودية، وتكون الدوال المعرّفة بواسطة A في الشكل $A(u) = Au$. ولكن، ولأسباب طباعية، سوف تكتب المتجهات العمودية غالباً كمتجهات صفية منقولة. من أجل المسائل 73.4-76.4،

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

73.4 أوجد A(u)، حيث $u = (1, -3, 7)^T$.

■
$$A(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6+21 \\ 4-15-42 \\ 2+0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -53 \\ -5 \end{pmatrix}$$

74.4 أوجد A(v)، حيث $v = (2, -5, 6, -4)^T$.

■ A(v)، ليست معرّفة لأن v لا تنتمي إلى $\mathbf{R}^3$.

75.4 أوجد A(w)، حيث $w = (2, -1, 4)^T$.

■
$$A(w) = Aw = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+12 \\ 8-5-24 \\ 4+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

76.4 أوجد A(u)، حيث $u = (3, -7, 8)$.

■ تأسيسا على اتفاقنا، لا تكون A(u) معرّفة من أجل متجه صفي u.

77.4 أعطينا $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. أوجد متجها عمودياً غير صفري $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بحيث أن $A(u) = 3u$.

■ نكوّن أولا المعادلة المصفوفية $Au = 3u$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ثم نكتب كل طرف كمصفوفة واحد (متجه عمودي):

$$\begin{pmatrix} x+3y \\ 4x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

نساوي بين العناصر المتقابلة في الطرفين، فنحصل على منظومة معادلات نختزلها إلى شكل درجي:

$$\left.\begin{matrix} x+3y=3x \\ 4x-3y=3y \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x-3y=0 \\ 4x-6y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x-3y=0 \\ 0=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2x-3y=0$$

تختزل المنظومة إلى معادلة متجانسة واحدة في مجهولين، وبذلك يكون لها عددٌ لا نهائي من الحلول للحصول على حل غير صفري نضع $y = 2$، مثلاً، فنحصل على $x = 3$. أي أن $u = (3, 2)^T$ هو المتجه المطلوب.

78.4 إذا أعطينا $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ، أوجد متجهاً غير صفري $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ بحيث أن $B(u) = 6u$.

■ إتبع خطوات المسألة 77.4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x+3y \\ 5x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix}$$

إذن

$$\left.\begin{matrix} x+3y=6x \\ 5x+3y=6y \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -5x+3y=0 \\ 5x-3y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 5x-3y=0$$

هناك عدد لا نهائي من الحلول. للحصول على حلٍّ غير صفري، نضع $y = 5$؛ وبالتالي $x = 3$. وبذلك، $u = (3, 5)^T$.

79.4 أعطينا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

أوجد كل المتجهات $u=(x,y,z)^T$ بحيث أن $A(u)=0$.

■ نكوّن المعادلة $Au=0$، ثم نكتب كل جانب كمصفوفة واحدة:

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-1\\5&12&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix}x+2y-3z\\2x+5y-z\\5x+12y-5z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

نساوي بين العناصر المتقابلة، فنحصل على منظومة متجانسة نختزلها إلى شكل درجي:

$$\left.\begin{aligned}x+2y-3z&=0\\2x+5y-z&=0\\5x+12y-5z&=0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned}x+2y-3z&=0\\y+5z&=0\\2y+10z&=0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned}x+2y-3z&=0\\y+5z&=0\end{aligned}\right.$$

تكون z، في الشكل الدرجي، المتغير الحر. لنحصل على الحل العام، نضع $z=a$، حيث a وسيط. التعويض المرتد يعطينا $y=-5a$، ثم $x=13a$. وبذلك، يمثل $u=(13a,-5a,A)^T$ كل المتجهات التي تحقق $Au=0$.

6.4 المصفوفة القابلة ـ للقلب (القابلة للعكس، القلوبة / المعكوسة)، المصفوفات العكسية

80.4 عرّف مصفوفة قلوبة (عكوسة).

■ نقول عن مصفوفة مربعة A أنها قلوبة (أو عكوسة) إذا وجدت مصفوفة [مربعة] B: بحيث أن $AB=BA=I$، حيث I المصفوفة المتطابقة.

81.4 اثبت أن المصفوفة B في المسألة 80.4 وحيدة.

■ إذا $AB_1=B_1A=I$ و $AB_2=B_2A=I$، إذن $B_1=B_1I=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=IB_2=B_2$.

82.4 عرّف «المصفوفة العكسية» لمصفوفة عكوسة.

■ إذا كانت A عكوسة (قابلة ـ للعكس)، إذن نسمي المصفوفة الوحيدة B، بحيث $AB=BA=I$، مصفوفة عكسية (أو معكوس) A، ونرمز لها بـ A^{-1}.

83.4 بيّن أن علاقة العكس متناظرة؛ أي أن $(A^{-1})^{-1}=A$.

■ إذا $AB=BA=I$، إذن $BA=AB=I$؛ وبذلك، إذا كانت B معكوس A، فإن B قابلة للعكس، وتكون A مصفوفتها العكسية. بمعنى آخر، $(A^{-1})^{-1}=A$.

84.4 بيّن أن $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ متعاكستان.

■

$$AB=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5&-10+10\\3-3&-5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5&15-15\\-2+2&-5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

85.4 بين أن $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$ متعاكستان.

■

$$AB=\begin{pmatrix}-11+0+12&2+0-2&2+0-2\\-22+4+18&4+0-3&4-1-3\\-44-4+48&8+0-8&8+1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

سوف نعرف، من المسألة 121.4، أن $AB=I$ إذا وفقط إذا $BA=I$؛ وبالتالي، لسنا في حاجة لاختبار عما إذا $BA=I$. وبذلك، تكون A و B كل منهما معكوس الأخرى.

86.4 اثبت الصيغة التالية المفيدة للمسألة 121.4: إذا كانت A «متناظرة»، ووجدت مصفوفة B بحيث أن $AB = I$. إذن، تكون A عكوسة، وتكون B مصفوفتها العكسية.

■ إذا $AB = I$، إذن $B^TA = I$. ولكن $B^T = B^T(AB) = (B^TA)B = B$.

87.4 متى تكون المصفوفة العامة 2×2، $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ قابلة للعكس؟ ما هو معكوسها عندئذ؟

■ نبحث عن أعداد سلّمية t، z، y، x بحيث أن

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

والتي ترجع إلى حل المنظومتين التاليتين:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$

واللتين لهما نفس مصفوفة المعاملات A. نضع $|A| = ad - bc$ [محددة A]. من المسألتين 41.3 و 42.3، نجد أن المنظومتين قابلتان للحل ـ وتكون A عكوسة، عندما وفقط عندما $|A| \neq 0$. في هذه الحالة، يكون للمنظومة الأولى الحل الوحيد $x = d/|A|$، $z = -c/|A|$، وللمنظومة الثانية الحل الوحيد $y = -b/|A|$، $t = a/|A|$. وبالتالي،

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

نعبر عن ذلك بالكلمات: عندما $|A| \neq 0$، نحصل على معكوس المصفوفة A، 2×2، بواسطة (i) تبادل العنصرين على القطر الرئيسي، (ii) نأخذ سالبي العنصرين الآخرين، (iii) نضرب المصفوفة في $1/|A|$.

88.4 أوجد معكوس $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

■ استخدم الصيغة الصريحة في المسألة 87.4. وبذلك، نجد $|A| = (3)(3) - (5)(2) = -1 \neq 0$. ثم نبادل عنصري القطر الرئيسي، ونأخذ سالبي العنصرين الآخرين، ونضرب في $1/|A|$:

$$A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

89.4 أوجد معكوس $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

■ أوجد أولاً $|A| = (5)(2) - (3)(4) = -2$، ثم نبادل بين عنصري القطر، ونأخذ سالبي العنصرين غير القطريين، ونضرب في $1/|A|$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

90.4 أوجد معكوس $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

■ نحسب أولاً $|B| = (2)(3) - (-3)(1) = 9$. ثم نبادل بين العنصرين القطريين، ونأخذ سالبي العنصرين غير القطريين، ونضرب في $1/|B|$:

$$B^{-1} = \tfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

91.4 حاول إيجاد معكوس $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

■ نوجد أولاً $|A| = (-2)(-9) - (6)(3) = 0$. بما أن $\|A\| = 0$، فليس لـ A معكوس.

92.4 أعط «خوارزمية الحذف الجاوسية» التي إما تحسب معكوس مصفوفه A مربعة n، أو تبين أن A ليست عكوسة.

▩ خطوة 1 كوّن المصفوفة $n\times 2n$ [المركبة] $M = (A:I)$، أي، تكون A النصف الأيسر لـ M و I نصفها الايمن.

خطوة 2. اختزل M صفيا إلى شكل درجي. إذا نتج عن هذه العملية صفٌّ صفريٌّ في النصف -A من M، توقف (A ليست عكوسة). في الحالة الأخرى، يأخذ النصف -A شكلاً مثلثاتياً.

خطوة 3. اختزل M صفيا إلى الشكل الصفي القانوني $(I:B)$ حيث حلت I محل A في النصف الأيسر للمصفوفة.

خطوة 4. ضع $A^{-1} = B$.

يجد القارىء تبرير هذه الخوارزمية في المسألة 122.4.

93.4 أوجد معكوس

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$$

▩ كوّن المصفوفة المركبة $M=(A:I)$، واختزل M إلى شكل درجي:

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)$$

في الشكل الدرجي، يصبح النصف الأيسر لـ M في شكل مثلثاتي؛ وبالتالي، تكون A عكوسة. اختزل المصفوفة الناتجة إلى الشكل الصفي القانوني:

$$M\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&-1&0&4&0&-1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

فتكون المصفوفة المركبة النهائية في الشكل $(I:A^{-1})$.

94.4 أوجد معكوس

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&6\\1&1&7\end{pmatrix}$$

▩ كوّن المصفوفة المركبة $M = (B:I)$ ثم اختزلها إلى شكل درجي:

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\2&-3&6&0&1&0\\1&1&7&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&3&5&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&5&-3&1\end{array}\right)$$

في شكلها الدرجي، يكون النصف الأيسر لـ M في شكل مثلثاتي؛ وبالتالي، تكون B عكوسة. اختزل M إلى الشكل الصفي القانوني:

$$M\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&11&-6&2\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-5&3&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&27&-16&6\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-5&3&-1\end{array}\right)$$

فيكون للمصفوفة النهائية الشكل $(I:B^{-1})$.

95.4 أوجد معكوس

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\-1&-1&5\\2&7&-3\end{pmatrix}$$

■ كوّن المصفوفة المركبة $M = (A:I)$ واختزلها إلى شكل درجي:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&\vdots&-4&1&0&0\\-1&-1&\vdots&5&0&1&0\\2&7&\vdots&-3&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&1&\vdots&1&1&0\\0&3&5&\vdots&-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&1&\vdots&1&1&0\\0&0&2&\vdots&-5&-3&1\end{pmatrix}$$

النصف الأيسر لـ M هو الآن في شكل مثلثاتي؛ وبالتالي، يكون لـ A معكوس. نختزل M، خطوة أبعد، إلى الشكل الصفي القانوني:

$$M\sim\begin{pmatrix}1&2&0&-9&\vdots&-6&2\\0&1&0&7/2&\vdots&5/2&-1/2\\0&0&1&-5/2&\vdots&-3/2&1/2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-16&\vdots&-11&3\\0&1&0&7/2&\vdots&5/2&-1/2\\0&0&1&-5/2&\vdots&-3/2&1/2\end{pmatrix}=(I\ :\ A^{-1})$$

96.4 طبق الخوارزمية الجاوسية على:

$$B=\begin{pmatrix}1&3&-4\\1&5&-1\\3&13&-6\end{pmatrix}$$

■ كوّن المصفوفة المركبة $M = (B:I)$ واختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&3&-4&\vdots&1&0&0\\1&5&-1&\vdots&0&1&0\\3&13&-6&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&-1&1&0\\0&4&6&\vdots&-3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&-1&1&0\\0&0&0&\vdots&-1&-2&1\end{pmatrix}$$

يكون لـ M، في هذا الشكل الدرجي، صف صفري في نصفه الأيسر؛ أي أن B ليست خزولة (قابلة ـ للاختزال) صفياً إلى شكل مثلثاتي. ولا تكون B، وفقاً لذلك، عكوسة.

97.4 لتكن A و B عكوستين من نفس المرتبة. بين أن AB مصفوفة عكوسة وأن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

■
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

98.4 لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مصفوفات مربعة -p عكوسة. بيّن أن $(A_1A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

■ يكون البرهان بالاستقراء على n. من أجل $n = 1$، لدينا $A_1^{-1} = A_1^{-1}$. لنفترض أن $n > 1$، وأن المبرهنة تتحقق من أجل n. سنبرهن أنها صحيحة من أجل n+1. يكون لدينا، باستخدام المسألة 97.4،

$$(A_1A_2\cdots A_nA_{n+1})^{-1} = [(A_1A_2\cdots A_n)A_{n+1}]^{-1} = A_{n+1}^{-1}(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_{n+1}^{-1}A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

وبذلك، تتحقق المبرهنة من أجل $n + 1$. وبالتالي، تتحقق المبرهنة من أجل كل عدد صحيح موجب n.

99.4 بيّن أنه إذا كان لـ A صف صفري، يكون لـ AB صف صفري أيضاً.

■ إذا كان الصف r لـ A صفرياً، فإن الأمر يكون كذلك بالنسبة للصف r في AB (أنظر المسألة 47.2).

100.4 بيّن أنه إذا كان لـ A صف صفري، فإنها لا تكون عكوسة.

■ إذا كانت A عكوسة، فإن $AA^{-1} = I$، وهذا يقتضي وجود صف صفري في I.

101.4 بيّن أنه إذا كان لـ B عموداً صفرياً، فإن يكون AB عموداً صفرياً أيضاً.

■ إذا كان العمود c في B صفرياً، فكذلك الأمر بالنسبة لـ c في AB (أنظر مسألة 47.2).

102.4 إذا كان لـ B عمود صفري، فإنها لا تكون عكوسة.

■ إذا كانت B عكوسة، فإن $B^{-1}B = 1$ تقتضي وجود عمود صفري في I!

103.4 إذا كانت A عكوسة، بيّن أن kA تكون عكوسة، عندما $k \neq 0$، ومعكوسها هو $k^{-1}A^{-1}$.

▩ بما أن $k \neq 0$، إذن $k^{-1} = 1/k$ موجود. إذن، $(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (kk^{-1})(AA^{-1}) = 1.I = I$. وبالتالي، تكون $k^{-1}A^{-1}$ معكوس kA.

104.4 لنفترض أن A و B عكوستان. بيّن أن A + B قد لا تكون عكوسة.

▩ إختر $B = (-1)A$. إذن، $A + B = 0$ ليست عكوسة.

105.4 بيّن أن مصفوفة قطرية $D = diag(a_1,a_2,...,a_n)$ تكون عكوسة إذا وفقط إذا كان لا توجد $a_i = 0$.

▩ إذا كانت بعض $a_i = 0$، فإنه يكون لـ D صف صفري، وبالتالي [مسألة 100.4] لا تكون D عكوسة، إذا كانت لا توجد $a_i = 0$، فإن a_i^{-1} تكون موجودة، وكذلك

$$diag(a_1,a_2,...,a_n).diag(a_1^{-1},a_2^{-1},...,a_n^{-1}) = diag(1,1,...,1) = I$$

وبالتالي، $D^{-1} = diag(a_1^{-1},a_2^{-1},...,a_n^{-1})$.

106.4 بيّن أن A تكون عكوسة إذا وفقط إذا كانت A^T عكوسة.

▩ إذا كانت A عكوسة، فإنه توجد مصفوفة B بحيث أن $AB = BA = I$. إذن، $(AB)^T = (BA)^T = I^T$، وبذلك $B^TA^T = A^TB^T = I$. وبالتالي، تكون A^T عكوسة، ومعكوسها B^T. ينتج العكس من حقيقة أن $(A^T)^T = A$.

107.4 بيّن أن عمليات العكس والمُناقلة تُبادَل، أي أن $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

▩ في المسألة 106.4 B^T عكس A^T؛ أي أن $B^T = (A^T)^{-1}$. لكن $B = A^{-1}$، وبالتالي $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

7.4 المصفوفات الأولية

108.4 عرّف «مصفوفة أولية».

▩ لتكن E المصفوفة التي يحصل عليها بتطبيق عملية صفية أولية e [مسألة 79.2] على المصفوفة المتطابقة I؛ أي، لتكن $E = e(I)$. إذن، تسمى E مصفوفة أولية مقابلة للعملية الصفية e.

109.4 أوجد المصفوفة المربعة ·3 الأولية E_1 مقابلة للعملية $R_1 \longleftrightarrow R_2$.

▩ طبق العملية $R_1 \longleftrightarrow R_2$ على I_3؛ أي، بادل بين الصفين الأول والثاني في I_3، فتحصل على

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

110.4 أوجد المصفوفة المربعة -3 الأولية E_3 المقابلة للعملية $R_3 \to -7R_3$.

▩ طبّق العملية $R_3 \to -7R_3$ على I_3؛ أي، إضرب الصف الثالث لـ I_3 في 7- ، فتحصل على

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

111.4 أوجد المصفوفة المربعة -3 الأولية E_3 المقابلة للعملية $R_2 \to -3R_1 + R_2$.

▩ طبق العملية $R_2 \to -3R_1 + R_2$ على I_3؛ أي، إستبدل $-3R_1 + R_2$ بالصف الثاني، فتحصل على

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

112.4 ليكن $e_i = (0,...,1,...,0)$ المتجه الصف بـ 1 في الموضوع رقم i و 0 في غير ذلك. بين أن $e_iA = R_i$ أي الصف i في A.

■ لاحظ أن e_i هو الصف رقم i في المصفوفة المتطابقة I. نجد من المسألة 47.2، أن الصف رقم i في $IA = A$ هو e_iA.

المبرهنة 2.4: لتكن e عملية صفية أولية و E المصفوفة المربعة m- الأولية المقابلة، أي $E = e(I_m)$. إذن، لدينا من أجل أي مصفوفة m×n-، A، $e(A) = EA$. أي أن النتيجة $e(A)$ لتطبيق العملية e على المصفوفة A يمكن الحصول عليها بضرب A من اليسار في المصفوفة الأولية المقابلة E.

113.4 اثبت المبرهنة 2.4 إذا كانت e العملية الصفية الأولية $R_i \longleftrightarrow R_j$.

■ دعنا نستخدم العلامة ⌢ للرمز للمركبة i في متجه صفي: مثلاً، الصف i في I سيرمز له بواسطة $e_i = (0, \ldots, \widehat{1}, \ldots, 0)$. بالمثل، نرمز للمركبة j بواسطة ⌢⌢ . إذن

$$E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, \widehat{\widehat{e_i}}, \ldots, e_m)^T \qquad e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{R_j}, \ldots, \widehat{\widehat{R_i}}, \ldots, R_m)^T$$

ولكن،ومن المسألة 47.2، فإن الصف رقم k في EA يكون هو الصف k في E مضروباً في A؛ وبالتالي، يكون لدينا

$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{e_jA}, \ldots, \widehat{\widehat{e_iA}}, \ldots, e_mA)^T = (R_1, \ldots, \widehat{R_j}, \ldots, \widehat{\widehat{R_i}}, \ldots, R_m)^T = e(A)$$

باستخدام المسألة 112.4.

114.4 اثبت المبرهنة 2.4 إذا كانت e العملية الصفية $R_i \to kR_i\ (k \neq 0)$.

■ باستخدام ترميز المسألة 113.4، يكون لدينا

$$E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{ke_i}, \ldots, e_m)^T \qquad e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_i}, \ldots, R_m)^T$$

وبذلك

$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{ke_iA}, \ldots, e_mA)^T = (R_1, \ldots, \widehat{kR_i}, \ldots, R_m)^T = e(A)$$

115.4 اثبت المبرهنة 2.4 إذا كانت e العملية الصفية $R_i \to kR_j + R_i$.

■ $E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{ke_j + e_i}, \ldots, e_m)^T$ و $e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_j + R_i}, \ldots, R_m)^T$

نستخدم $(ke_j + e_i)A = k(e_jA) + e_iA = kR_j + R_i$، فنحصل على

$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{(ke_j + e_i)A}, \ldots, e_mA)^T = (R_1, \ldots, \widehat{kR_j + R_i}, \ldots, R_m)^T = e(A)$$

116.4 بيّن أن A مكافئة صفيا لـ B إذا وفقط إذا كانت توجد مصفوفات أولية $E_1,...,E_s$ بحيث أن $E_s...E_2E_1A = B$.

■ تعريفاً، تكون A مكافئة صفيا لـ B إذا كانت توجد عمليات صفية $e_1,...,e_s$، بحيث أن $e_s(...(e_2(e_1(A)))...) = B$. ولكن،وبواسطة المبرهنة 2.4، يتحقق ذلك إذا وفقط إذا $E_s...E_2E_1A = B$ حيث E_i المصفوفة الأولية المقابلة لـ e_i.

117.4 بيّن أن المصفوفات الأولية عكوسة وأن معكوساتها هي أيضاً مصفوفات أولية.

■ لتكن E المصفوفة الأولية المقابلة للعملية الصفية الأولية $e(I) = E$:e. ولتكن e' العملية العكسية لـ e، و E' المصفوفة الأولية المقابلة لها. إذن $I = e'(e(I)) = e'(E) = E'E$ و $I = e(e'(I)) = e(E') = EE'$. وبذلك، تكون E' معكوس E.

المبرهنة 3.4: القضايا التالية متكافئة: (أ) A عكوسة؛ (ب) A مكافئة صفيا للمصفوفة المتطابقة I؛ (ج) تكون A جداء لمصفوفات أولية.

118.4 اثبت أن (أ) تقتضي (ب)، في المبرهنة 3.4.

■ لنفترض أن A عكوسة، ولنفترض أن A مكافئة صفيا لمصفوفة B في الشكل الصفي القانوني. إذن، توجد مصفوفات أولية $E_1,E_2,...E_s$ بحيث أن $E_s...E_2E_1A = B$. بما أن A عكوسة، وكل مصفوفة أولية E_i عكوسة، فإن B تكون عكوسة

[المسألة 97.4]. ولكن إذا $B \neq I$، إذن يكون لـ B صف صفري؛ وبالتالي لا تكون B عكوسة [مسألة 100.4]. وبذلك $B = I$، و (أ) تقتضي (ب).

119.4 اثبت أن (ب) تقتضي (ج)، في النظرية 3.4.

■ إذا تحققت (ب)، فإنه توجد مصفوفات أولية $E_1, E_2, \ldots, E_s$ بحيث أن $E_s \ldots E_2 E_1 A = I$، وبذلك $A = (E_s \ldots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_s^{-1}$. ولكن الـ E_i^{-1} هي أيضاً مصفوفات أولية. وبذلك، (ب) تقتضي (ج).

120.4 اثبت أن (ج) تقتضي (أ)، في النظرية 3.4.

■ إذا تحققت (ج)، فإن $A = E_1 E_2 \ldots E_s$. الـ E_i مصفوفات عكوسة؛ وبالتالي إن جداءها، A، يكون أيضاً مصفوفة عكوسة. وبذلك، (ج) تقتضي (أ). وهكذا، تكون النظرية قد أثبتت.

121.4 لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من نفس المرتبة. بين أنه إذا $AB = I$، إذن $B = A^{-1}$. وبالتالي، تكون $AB = I$ إذا وفقط إذا $BA = I$.

■ لنفترض أن A ليست عكوسة. إذن، لا تكون A مكافئة صفيا للمصفوفة المتطابقة I، وبذلك تكون A مكافئة صفيا لمصفوفة ذات صف صفري. بتعبير آخر، توجد مصفوفات أولية $E_1, \ldots, E_s$ بحيث يكون $E_s \ldots E_2 E_1 A$ صفاً صفرياً. وبالتالي، فإن $E_s \ldots E_2 E_1 AB = E_s \ldots E_2 E_1$، وهي مصفوفة عكوسة، يكون لها صف صفري. ولكن هذا يناقض المسألة 100.4. وبذلك تكون A عكوسة ويكون لدينا

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$$

122.4 لنفترض أن A عكوسة، ولنقل أنه يمكن إختزالها صفياً إلى المصفوفة المتطابقة I بواسطة العمليات الأولية $e_1, \ldots, e_n$. بيّن أن هذه المتتالية من العمليات الصفية الأولية تعطينا، إذا طبقت على I، المصفوفة A^{-1}.

■ لتكن E_i المصفوفة الأولية المقابلة للعملية e_i. إذن، $E_n \ldots E_2 E_1 A = I$ فرضاً. وبذلك $(E_n \ldots E_2 E_1 I)A = I$، وبالتالي $A^{-1} = E_n \ldots E_2 E_1 I$. بتعبير آخر، يمكن الحصول على A^{-1} من I بتطبيق العمليات الصفية الأولية $e_1, \ldots, e_n$.

123.4 بيّن أن B مكافئة صفيًا لـ A إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة عكوسة P بحيث أن $B = PA$.

■ إذا $B \sim A$، إذن $B = e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))\ldots) = E_s \ldots E_2 E_1 A = PA$ حيث $P = E_s \ldots E_2 E_1$ مصفوفة عكوسة. ينتج العكس من حقيقة أن كل خطوة قابلة للعكس.

124.4 بيّن أنه إذا كانت AB عكوسة، تكون A عكوسة. [وبذلك، فإنه إذا لم يكن لـ A معكوس، فلن يكون لـ AB معكوس.]

■ إذا كانت AB عكوسة، فتوجد مصفوفة C بحيث أن $(AB)C = I$. وبالتالي، $A(BC) = I$، وتكون BC المصفوفة العكسية لـ A. [بواسطة المسألة 121.4].

8.4 عمليات الأعمدة. التكافؤ المصفوفي

125.4 اكتب قائمة بالعمليات الأولية على الأعمدة:

■ $[F_1]$ تبادل عمود i مع عمود j: $C_i \longleftrightarrow C_j$.

$[F_2]$ ضرب عمود i في سلّمي غير صفري: $(k \neq 0)$ $kC_i \rightarrow kC_i$.

$[F_3]$ استبدال العمود j مضروباً في k ومضافاً إليه العمود i بالعمود i: $C_c i \rightarrow kC_k + C_i$.

126.4 أوجد معكوس $[F_1]$ في المسألة 125.4.

■ تبادل مكاني نفس العمودين مرتين يقود إلى المصفوفة الأصلية؛ وبالتالي تكون $C_i \longleftrightarrow C_j$ نفس معكوسها.

127.4 أوجد معكوس $[F_2]$ في المسألة 125.4.

■ بما أن $k \neq 0$، فإن السلّمي k^{-1} موجود. إذن، العمليتان $C_i \to k^{-1}C_i$ و $C_i \to k^{-1}C_i$ متعاكستان.

128.4 أوجد معكوس $[F_3]$ في المسألة 125.4.

■ إن تطبيق $C_i \to -kC_j + C_i$ ثم $C_i \to kC_j + C_i$، أو بالعكس، يقود إلى المصفوفة الأصلية. وبالتالي، العمليتان متعاكستان.

129.4 أوجد المصفوفة الأولية المربعة -3 F_1 المقابلة لعملية العمود $C_2 \longleftrightarrow C_1$.

■ نطبق $C_1 \to C_2$ على I_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_1$$

130.4 أوجد المصفوفة الأولية المربعة -3 F_2 المقابلة لعملية العمود $C_2 \to -5C_2$.

■ نطبق $C_2 \to -5C_2$ على I_3، فنحصل على:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131.4 أوجد المصفوفة الأولية المربعة -3 F_3 المقابلة لعملية العمود $C_2 \to -4C_1 + C_2$.

■ نطبق العملية على I_3 فنحصل على

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترميز: لنرمز بواسطة e و f، على الترتيب للعمليتين الأوليتين على الصفوف والأعمدة؛ ولتكن E و F المصفوفتين الأوليتين المقابلتين لهما على الترتيب.

132.4 بيّن أن $f(A) = [e(A^T)]^T$؛ اي أن تطبيق عملية العمود f على مصفوفة A يعطى نفس النتيجة كما عند تطبيق العملية الصفية e على A^T متبوعة بأخذ المنقول.

■ ينتج هذا مباشرة من أن أعمدة A هي صفوف A^T، وبالعكس.

133.4 بيّن أن F منقول E.

■ $$F = f(I) = [e(I^T)]^T = [e(I)]^T = E^T$$

المبرهنة 4.4: $f(A) = AF$.

134.4 إثبت المبرهنة 4.4.

■ من المسألة 132.4 والمبرهنة 2.4، نجد أن $f(A) = [e(A^T)]^T = [EA^T]^T = (A^T)^T E^T = AF$.

135.4 ما هي شروط أن تكون B مكافئة عمودياً لـ A؟

■ تكون B مكافئة عمودياً لـ A إذا كان يمكن الحصول على B من A بتطبيق متتالية من عمليات أولية على الأعمدة.

136.4 بيّن أن B تكون مكافئة عمودياً لـ A إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة عكوسة Q بحيث أن $B = AQ$.

■ إذا كانت B مكافئة عمودياً لـ A، إذن $B = f_s(\ldots(f_2(f_1(A)))\ldots) = AF_1F_2\cdots F_s = AQ$، حيث $Q = F_1F_2 \ldots F_s$ مصفوفة عكوسة. العكس يتبع من حقيقة أن كل خطوة قابلة ـ للعكس.

137.4 متى تكون B مكافئة لـ A؟

▩ تكون B مكافئة لـ A إذا أمكن الحصول على B، من A، بواسطة متتالية من العمليات الأولية للصفوف و/أو الأعمدة.

138.4 بيِّن أن B مكافئة لـ A إذا وفقط إذا وجدت مصفوفتان P و Q بحيث أن $B = PAQ$.

▩ إذا كانت B مكافئة لـ A، إذن $B = E_s \cdots E_2E_1AF_1F_2 \cdots F_t = PAQ$، حيث $P = E_s...E_2E_1$ و $Q = F_1F_2...F_t$ مصفوفتان عكوستان. يتبع العكس من حقيقة أن كل خطوة قابلة ـ للعكس.

المبرهنة 5.4: تكون مصفوفة $m \times n$، A، مكافئة لمصفوفة مركبة $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. [العدد الصحيح غير ـ السالب r يسمى مرتبة A].

139.4 أثبت المبرهنة 5.4.

▩ البرهان بنائي، في شكل خوارزمية.

خطوة 1. إختزل A صفيا إلى الشكل الصفي القانوني، بحيث تكون المداخل الأمامية غير الصفرية $a_{11}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$

خطوة 2. بادل بين C_2 و C_{j_2}، وبادل بين C_3 و C_{j_3}، ...، وبادل بين C_r و C_{j_r}. يعطينا هذا مصفوفة في الشكل $\left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$، حيث المداخل الأمامية غير الصفرية $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$.

خطوة 3. استخدم عمليات الأعمدة، بـ a_{ii} كمرتكز، لإحلال أصفار محل كل مدخل في B، أي، من أجل $r = 1,2,\ldots,r$ و $j = r+1, r+2 \ldots, n$، طبق العملية $C_j \to -b_{ij}C_i + C_j$.

9.4 مصفوفات مثلثية عليا ومصفوفات خاصة أخرى

140.4 عرِّف مصفوفة «مثلثية عليا».

▩ تكون مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ مثلثة عليا إذا كانت كل المداخل تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر؛ أي إذا $a_{ij} = 0$ من أجل $i > j$.

141.4 أعرض المصفوفات المثلثية العليا العامة من المرتبات 2 و 3 و 4.

▩
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{pmatrix}$$

[من المتعارف عليه، كما في المصفوفات القطرية، عدم كتابة العناصر الصفرية].

المسائل 142.4-147.4 تتعلق بالمصفوفتين المثلثيتين العلويتين من المرتبة n $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$.

142.4 بيِّن أن $A + B$ مصفوفة مثلثية عليا، حيث القطر $[a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, \ldots, a_{nn} + b_{nn}]$.

▩ لتكن $A + B = (c_{ij})$. إذا $i > j$، إذن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$. تكون $A + B$ مثلثية عليا. كما أن $c_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$ تكوّن العناصر القطرية.

143.4 بيِّن أن kA مصفوفة مثلثية عليا، حيث القطر $[ka_{11}, ka_{22}, \ldots, ka_{nn}]$.

▩ لتكن $kA = (c_{ij})$. إذا $i > j$، إذن $c_{ij} = ka_{ij} = k.0 = 0$. وبالتالي kA مصفوفة مثلثية عليا. أيضاً، تكون $c_{ii} = ka_{ii}$ العناصر القطرية.

144.4 بيِّن أن الجداء AB مصفوفة مثلثية علوية.

▩ لتكن $AB = (c_{ij})$؛ إذن

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

إذا $j>i$، إذن من أجل أي k، يكون لدينا إما $i>k$ أو $k>j$، وبذلك إما أن تكون $a_{ik}=0$ أو $b_{kj}=0$ وبالتالي، $c_{ik}=0$، وتكون AB مصفوفة مثلثية عليا.

145.4 بيِّن أن المداخل القطرية في AB تكون $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$.

■ لدينا، باستخدام ترميز المسألة 144.4،

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

ولكن من أجل $k<i$، $a_{ik}=0$؛ ومن أجل $k>i$، $b_{ki}=0$. وبالتالي، $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$، كما ذكر.

146.4 بيِّن أن المداخل القطرية في A^p تكون $a_{11}^p, a_{22}^p, \ldots, a_{nn}^p$

■ هذه نتيجة مباشرة للمسألة 145.4.

147.4 بيّن أنه، من أجل أي حدودية $f(x)$، تكون $f(a_{11}), f(a_{22}), \ldots, f(a_{nn})$. المداخل القطرية لـ $f(A)$.

■ ينتج هذا بواسطة الاستقراء على درجة $f(x)$، واستخدام المسائل 142.4 و 143.4 و 146.4.

148.4 بيِّن أن التجميع $\mathcal{T}_n$ لكل المصفوفات المربعة n المثلثية العليا تشكل جبراً لمصفوفات.

■ ينتج هذا من حقيقة أن $\mathcal{T}_n$ غير خالية ومن المسائل 142.4-144.4.

149.4 بين بمثال أن الجبر $\mathcal{T}_2$ للمصفوفات المربعة -2 المثلثية العليا ليس تبديلياً.

■ $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&17\\0&18\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}4&5\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&23\\0&18\end{pmatrix}$

150.4 أثبت: إذا كانت A مصفوفة مربعة -n مثلثية عليا تحتوي صفراً على قطرها، فإنها لا تكون عكوسة.

■ لتكن $A=(a_{ij})$، وليكن k أصغر عدد صحيح بحيث أن $a_{kk}=0$. إذن، يمكن تجزئة A في الشكل

$$A=\left(\begin{array}{c|c}B&C\\\hline 0&D\end{array}\right)$$

حيث B حجمها $(k-1)\times k$، وحيث D حجمها $(n-k+1)\times(n-k)$. وبذلك، يكون لـ D صفوف أكثر من الأعمدة، وبالتالي سوف ينتج، عن إختزال D صفياً إلى شكل درجي، صف صفري. لذلك، فإن إختزال A صفياً إلى شكل درجي سوف يقود إلى صف صفري. إذن، لا تكون A عكوسة.

151.4 لنفترض أن A مثلثية؛ أي أن A مصفوفة مثلثية عليا بدون مداخل قطرية مساوية للصفر. بيِّن أن A عكوسة وأن معكوسها مصفوفة مثلثية أيضاً، بمداخل قطرية $a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}$.

■ بتطبيق خوارزمية جاوس في المسألة 92.4 على المصفوفة المركبة، $M=(AI)$، نناظم إلى الواحد المداخل غير الصفرية الأمامية، وذلك بضرب الصف i لـ M في $a_{ii}^{-1}(i=1,2,\ldots,n)$؛ يستبدل هذا القطر $[a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}]$. بـ I. نستكمل الآن تحويل A إلى I بإضافة مضاعفات مناسبة لصفوف M السفلية إلى صفوفها العلوية؛ يقود هذا إلى تحويل القطر $[a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}]$ إلى مصفوفة مثلثاتية، A^{-1}، بنفس المداخل القطرية.

152.4 باستخدام العنصرين 0 و 1 فقط، اوجد (أ) كل المصفوفات القطرية 2×2، (ب) كل المصفوفات 2×2 المثلثية العليا.

■ (أ) المصفوفات القطرية يجب أن تكون عناصرها غير القطرية مساوية للصفر:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(ب) المصفوفات المثلثاتية العليا يجب أن تكون عناصرها تحت القطر صفرية: يعطي هذا المصفوفات الأربع في (أ)، بالإضافة إلى المصفوفات الأربع التي يتحصل عليها بتغيير العنصر ـ (1,2) إلى 1.

المسائل 153.4-155.4 أسئلة صواب/خطأ إذا كان السؤال خطأً أعطِ مثالاً عكسياً.

153.4 كل المصفوفات الدرجية المربعة مثلثاتية عليا.

■ صواب.

154.4 كل المصفوفات المثلثاتية العليا في شكل درجي.

■ خطأ: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ مثلثاتية عليا ولكنها ليست في شكل درجي.

155.4 إذا كانت A^2 مصفوفة مثلثاتية عليا، فكذلك الأمر بالنسبة لـ A.

■ خطأ: أنظر في مصفوفة المسألة 70.4.

156.4 أوجد مصفوفة مثلثاتية عليا A بحيث أن $A^3=\begin{pmatrix}8 & -57\\ 0 & 27\end{pmatrix}$.

■ نضع $A=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}$. إذن [المسألة 146.4]، $x^3=8$، وبذلك $x=2$؛ $y^3=27$، وبذلك $y=3$. نحسب بعد ذلك A^3 باستخدام $x=2$ و $z=3$:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & y\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & y\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5y\\ 0 & 9\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^3=\begin{pmatrix}2 & y\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5y\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 19y\\ 0 & 27\end{pmatrix}$$

وبذلك، $19y=-57$ أو $y=-3$، وبالتالي، $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

157.4 عرّف مصفوفة «مثلثاتية سفلية/دنيا».

■ نقول عن مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ أنها مثلثاتية سفلية (أو دنيا) إذا كانت المداخل فوق القطر الرئيس مساوية للصفر؛ أي، إذا $a_{ij}=0$ من أجل $i<j$.

158.4 اكتب تفصيلا المصفوفات المثلثاتية السفلية العامة من المراتب 2 و 3 و 4.

■ في كل حالة، ضع أصفاراً فوق القطر:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}b_{11} & & \\ b_{21} & b_{22} & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}\end{pmatrix}$$

159.4 تكون A مثلثية سفلية إذا وفقط إذا كانت A^T مثلثية عليا. خطأ أم صواب؟

■ صواب. [وبسبب هذا، فإن نظرية المصفوفات المثلثة السفلية تكون جوهرياً نفس نظرية المصفوفات المثلثية العلوية].

160.4 تأسيساً على المسألة 159.4، تحقق من أن جداء مصفوفات مثلثية سفلية يكون مصفوفة مثلثية سفلية.

■ إذا كانت A و B مصفوفتين مثلثيتين سفليتين، إذن تكون B^T, A^T، وكذلك $B^TA^T=(AB)^T$ مصفوفات مثلثية سفلية؛ وبالتالي، تكون $((AB)^T)^T=AB$ مصفوفة مثلثية سفلية.

161.4 ما هي أنواع المصفوفات التي تكون مثلثية علوية وسفلية في آنٍ معاً؟

■ إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية وسفلية في آنٍ معاً، فإن كل عنصر خارج القطر الرئيسي يجب أن يكون صفرياً، وبالتالي، تكون A قطرية.

162.4 عرّف مصفوفة «ثلاثية القطرية».

■ تكون مصفوفة مربعة ثلاثية القطرية إذا كانت المداخل غير الصفرية لا توجد إلا على القطر، أو مباشرة فوق القطر [على القطر الثانوي العلوي]، أو مباشرة تحت القطر [على القطر الثانوي السفلي].

163.4 اكتب تفصيلاً المصفوفات ثلاثية ـ القطرية العامة من المرتبتين 4 و 5.

■ في كل حالة، ضع أصفاراً خارج القطر، أو القطر الثانوي العلوي، أو القطر الثانوي السفلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{31} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \\ & & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ & & & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$$

164.4 بين أن جداء مصفوفات ثلاثية ـ القطرية قد لا يكون ثلاثي ـ القطرية.

■
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10.4 مصفوفات متناظرة

165.4 عرّف مصفوفة متناظرة.

■ تكون مصفوفة حقيقية A متناظرة إذا $A^T = A$. وبشكل مكافىء، تكون $A = (a_{ij})$ متناظرة إذا كل $a_{ij} = a_{ji}$.
[لاحظ أن A يجب أن تكون مربعة من أجل أن تكون $A^T = A$].

166.4 عرّف مصفوفة «تخالفية ـ التناظرة».

■ تكون مصفوفة حقيقية A تخالفية التناظر إذا $A^T = -A$. وبشكل مكافىء، تكون $A = (a_{ij})$ تخالفية التناظر إذا كانت كل $a_{ij} = -a_{ji}$.

167.4 بين أن العناصر القطرية لمصفوفة تخالفية ـ التناظر يجب أن تكون صفرية.

■ إذا كانت $A = (a_{ij})$ تخالفية ـ التناظر، إذن $a_{ii} = -a_{ii}$. وبالتالي، تكون كل $a_{ii} = 0$.

المسائل 168.4-174.4 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

168.4 هل A متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ يتبين لنا بالتفحص أن $A^T = -A$؛ وبذلك، تكون A تخالفية التناظر.

169.4 هل B متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ يتبين بالتفحص أن $B^T = B$؛ وبذلك، تكون B متناظرة.

170.4 هل C متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ بما أن C ليست مربعة، فإنها لا تكون متناظرة ولا تخالفية التناظر.

171.4 هل D متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ بالتفحص، نجد أن $D^T = D$؛ وبالتالي، تكون D متناظرة.

172.4 هل E متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ نرى أن $E^T \neq \pm E$. وبالتالي، لا تكون E متناظرة ولا تخالفية ـ التناظر.

173.4 هل F متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ يتبين بالتفحص أن $F^T = -F$؛ وبالتالي، تكون F تخالفية التناظر.

174.4 هل G متناظرة أم تخالفية ـ التناظر؟

■ الإثنان معاً، لأن $\mathbf{0}^T = \mathbf{0} = -\mathbf{0}$، عندما تكون $\mathbf{0}$ مربعة.

175.4 هل المصفوفة المتطابقة I متناظرة؟

■ بما أن $I^T = I$، فإن المصفوفة المتطابقة تكون متناظرة.

176.4 هل كل $\mathbf{0}$ مصفوفة متناظرة؟

■ إذا لم تكن $\mathbf{0}$ مربعة، فلا يمكن ان تكون $\mathbf{0}^T$ و $\mathbf{0}$ متساويتين، نظراً لحجميهما المختلفين، وبذلك لا تكون $\mathbf{0}$ متناظرة.

177.4 أوجد x و A، إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{pmatrix}$ متناظرة.

■ نساوي بين العنصرين $x + 2$ و $2x - 3$ [وكل منهما صورة الآخر في المرآة القطرية]، فنحصل على $x = 5$؛ وبالتالي $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

178.4 أوجد x، y، z، t إذا كانت

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & x \\ y & z & -3 \\ 4 & t & -7 \end{pmatrix}$$

متناظرة.

■ نساوي بين العناصر المتناظرة، فنحصل على $x = 4$، $y = 2$، $t = -3$. أما المجهول z، على القطر، فهو غير محدد.

179.4 لنفترض أن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متناظرتان. بيّن أن $A + B$ مصفوفة متناظرة.

■ إذا $A + B = (c_{ij})$، إذن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$.

180.4 لنفترض ان $A = (a_{ij})$ متناظرة. بيّن أن kA متناظرة.

■ إذا $kA = (c_{ij})$، إذن $c_{ij} = ka_{ij} = c_{ji}$.

181.4 بيّن أنه ليس من الضروري أن تكون AB متناظرة، حتى ولو كانت المصفوفتان A و B متناظرتين.

■ لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. إذن $AB = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix}$ ليست متناظرة. [أنظر المسألة 182.4].

182.4 لتكن A و B مصفوفتين متناظرتين. بيّن أن AB متناظرة إذا وفقط إذا كانت A و B تبديليتين.

■ إذا $AB = BA$، إذن $(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$، وبالتالي تكون AB متناظرة. وبالعكس، $(AB)^T = AB$؛ إذن $AB = (AB)^T = B^TA^T = BA$، وبذلك تكون A و B تبديليتين.

183.4 لنفترض أن $A = (a_{ij})$ تخالفية ـ التناظر. بيّن أن kA تخالفية ـ التناظر.

■ إذا $kA = (c_{ij})$، إذن $c_{ij} = ka_{ij} = k(-a_{ji}) = -(ka_{ji}) = -c_{ji}$.

المبرهنة 6.4: إذا كانت A مصفوفة مربعة، إذن (i) تكون $A + A^T$ متناظرة؛ (ii) وتكون $A - A^T$ تخالفية التناظر؛ (iii) توجد مصفوفة متناظرة B، ومصفوفة تخالفية ـ التناظر C، بحيث أن $A = B + C$.

184.4 اثبت (i) في المبرهنة 6.4.

■ $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

185.4 أثبت (ii) في المبرهنة 6.4.

■ $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$.

186.4 أثبت (iii) في المبرهنة 6.4.

■ نضع $B = 1/2\,(A + A^T)$ و $C = 1/2\,(A - A^T)$. إذن، $A = B + C$، حيث B متناظرة بواسطة المسألتين 184.4 و 180.4، و C تخالفية ـ التناظر بواسطة المسألتين 185.4 و 183.4.

187.4 اثبت أن التحليل في المبرهنة 6.4 (iii) وحيد.

■ إن $A = B + C$ و $A = B' + C'$ يقتضيان، بواسطة الطرح، أن

$$0 = B - B' + C - C' \tag{1}$$

وبأخذ منقول (1)، نحصل على

$$0 = B - B' - C + C' \tag{2}$$

جمع (1) و (2) يعطينا $2(B - B') = 0$، أو $B = B'$؛ وكذلك أيضاً $C = C'$.

188.4 اكتب $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ كمجموع مصفوفة متناظرة B ومصفوفة تخالفية التناظر C.

■ إحسب

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad A + A^T = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \qquad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن، وبواسطة المسألة 187.4،

$$B = \tfrac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \tfrac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

189.4 بيّن أن A تكون متناظرة إذا وفقط إذا كانت A^T متناظرة.

■ ينتج ذلك من حقيقة أن $(A^T)^T = A$.

190.4 لنفترض أن A متناظرة. بين أن A^2، وعموماً A^n، مصفوفات متناظرة.

■ $(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = AA = A^2$. أيضاً، وبواسطة الاستقراء، $(A^n)^T = (AA^{n-1})^T = (A^{n-1})^T A^T = A^{n-1}A = A^n$.

191.4 بيّن أنّه إذا كانت A متناظرة، فإن f(A) تكون متناظرة من أجل أي حدودية f(x).

■ ينتج هذا من المسائل 190.4، 179.4، و 180.4.

192.4 لتكن A مصفوفة مربعة n- متناظرة، و P أي مصفوفة $n \times m$. بيّن ان P^TAP تكون أيضاً متناظرة.

■ $(P^TAP)^T = P^TA^T(P^T)^T = P^TAP$

11.4 مصفوفات عقدية

نفترض، في هذا القسم، أن السلّميات، وبخاصة مداخل المصفوفات، أعداد عقدية. تذكر [المسألة 117.1] أنه إذا كان $z = a + bi$ عدداً عقدياً، فإن $\bar{z} = a - bi$ يكون مرافقه.

193.4 عرّف المُرافق (العقدي) لمصفوفة A، ورمزها $\bar{A}$.528.

■ إذا $A = (a_{ij})$ ، إذن $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$.

194.4 عرّف مُرافق $\begin{pmatrix} 2+i & 3-5i & 4+8i \\ 6-i & 2-9i & 5+6i \end{pmatrix}$.

■ $$\overline{\begin{pmatrix} 2+i & 3-5i & 4+8i \\ 6-i & 2-9i & 5+6i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{2+i} & \overline{3-5i} & \overline{4+8i} \\ \overline{6-i} & \overline{2-9i} & \overline{5+6i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & 3+5i & 4-8i \\ 6+i & 2+9i & 5-6i \end{pmatrix}$$

195.4 عرّف مُرافق $\begin{pmatrix} 6+7i & 5i \\ 9 & 4-i \end{pmatrix}$.

■ $$\overline{\begin{pmatrix} 6+7i & 5i \\ 9 & 4-i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{6+7i} & \overline{5i} \\ \overline{9} & \overline{4-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-7i & -5i \\ 9 & 4+i \end{pmatrix}$$

196.4 متى يكون $\bar{A} = A$ ؟

■ عندما، وفقط عندما، $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$ من أجل كل j و i؛ أي عندما وفقط عندما تكون A مصفوفة حقيقية.

197.4 أوجد $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

■ بما أن A حقيقية، إذن $\bar{A} = A$.

المبرهنة 7.4: (i) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ ، (ii) $\overline{kA} = \bar{k}\bar{A}$ ، (iii) $\bar{\bar{A}} = A$ ، (iv) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ ، (v) $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$

198.4 أثبت (i) في المبرهنة 7.4.

■ نكتب، كالعادة، $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ ، و $\overline{A+B} = (c_{ij})$ ، إذن، $c_{ij} = \overline{a_{ij} + b_{ij}} = \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}$. وبالتالي، $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$.

199.4 أثبت (ii) في المبرهنة 7.4.

■ بما أن $kA = (ka_{ij})$ ، $\overline{kA} = (\overline{ka_{ij}}) = (\bar{k}\,\overline{a_{ij}}) = \bar{k}(\overline{a_{ij}}) = \bar{k}\bar{A}$

200.4 أثبت (iii) في المبرهنة 7.4.

■ اكتب $\bar{\bar{A}} = (c_{ij})$. إذن $c_{ij} = \overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$. وبذلك $\bar{\bar{A}} = A$.

201.4 أثبت (iv) في المبرهنة 7.4.

■ لتكن $\overline{AB} = (c_{ij})$. إذن، $c_{ij} = \overline{\Sigma_k a_{ik} b_{kj}} = \Sigma_k \overline{a_{ik} b_{kj}} = \Sigma_k \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}}$. وبذلك $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

202.4 أثبت (v) في النظرية 7.4.

■ لتكن $(\bar{A})^T = (b_{ij})$ و $\overline{A^T} = (c_{ij})$. نستخدم الترميز $q_{ij}{}^T = q_{ji}$ ، فيكون لدينا: $b_{ij} = \overline{a_{ij}}{}^T = \overline{a_{ji}}$ و $c_{ij} = \overline{a_{ij}{}^T} = \overline{a_{ji}}$. وبذلك، $b_{ij} = c_{ij}$ ، ومنها، $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$.

[نعبّر عن ذلك بالقول أن عمليتي النقل والمرافقة تتبادلان].

203.4 يرمز للمنقول المرافق [= المرافق المنقول] لمصفوفة A بواسطة A^H. [نسبة إلى عالم الرياضيات هرميت/ Hermite]. أوجد A^H إذا $A=\begin{pmatrix}2+8i & 5-3i & 4-7i\\ 6i & 1-4i & 3+2i\end{pmatrix}$.

■
$$A^H=\begin{pmatrix}\overline{2+8i} & \overline{6i}\\ \overline{5-3i} & \overline{1-4i}\\ \overline{4-7i} & \overline{3+2i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-8i & -6i\\ 5+3i & 1+4i\\ 4+7i & 3-2i\end{pmatrix}$$

204.4 متى تكون $A^H=A^T$؟

■ إذا كانت A حقيقية، إذن $\bar{A}=A$، وبذلك $A^H=A^T$؛ وبالعكس.

في المسائل 204.4-208.4، نبين أن النظرية 3.2 تظل صالحة عندما يُستبدَل المنقول المُرافق بالمنقول. وكما قلنا سابقاً، ليس من الضرورة أن تكون A و B مربعتين ولكن متوافقتين من أجل جمع وضرب المصفوفيين.

205.4 أثبت (i): $(A+B)^H=A^H+B^H$.

■ $(A+B)^H=(\overline{A+B})^T=(\bar{A}+\bar{B})^T=\bar{A}^T+\bar{B}^T=A^H+B^H$.

206.4 أثبت (ii): $(A^H)^H=A$.

■ $(A^H)^H=(\overline{\bar{A}^T})^T=((\bar{\bar{A}})^T)^T=(A^T)^T=A$.

207.4 أثبت (iii): $(kA)^H=\bar{k}A^H$. [لاحظ أن $\bar{k}=k$ في المبرهنة 3.2 (iii)].

■ $(kA)^H=(\overline{kA})^T=(\bar{k}\bar{A})^T=\bar{k}\bar{A}^T=\bar{k}A^H$.

208.4 أثبت (iv): $(AB)^H=B^HA^H$.

■ $(A^B)^H=(\overline{AB})^T=(\bar{A}\bar{B})^T=\bar{B}^T\bar{A}^T=B^HA^H$.

12.4 المصفوفات الهرميتية

209.4 عرِّف: (أ) مصفوفة هرميتية، (ب) مصفوفة هرميتية ـ متخالفة.

■ (أ) تكون مصفوفة عقدية A هرميتية إذا $A^H=A$؛ بشكل مكافىء، تكون $A=(a_{ij})$ هرميتية إذا كان كل $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$. لاحظ أن المصفوفات المربعة فقط يمكنها أن تكون هرميتية. (ب) وتكون مصفوفة عقدية A هرميتية ـ متخالفة إذا $A^H=-A$؛ أو بشكل مكافىء، يكون $A=(a_{ij})$ هرميتية متخالفة إذا كان كل $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$.

210.4 بيِّن أن العناصر القطرية لمصفوفة هرميتية [هرميتية ـ متخالفة] تكون حقيقية [تخيلية بحتة].

■ لدينا $\text{Im}\,a_{rr}=\frac{1}{2i}(a_{rr}-\overline{a_{rr}})=\frac{1}{2i}(a_{rr}-a_{rr})=0$ [أنظر المسألة 118.1] عندما تكون $A=(a_{ij})$ و $\text{Re}\,a_{rr}=\frac{1}{2}(a_{rr}+\overline{a_{rr}})=\frac{1}{2}(a_{rr}-a_{rr})=0$ عندما تكون A هرميتية متخالفة.

211.4 بيِّن أنه إذا كانت A هرميتية وهرميتية متخالفة، إذن $A=0$.

■ إذا $A^H=A=-A$، إذن $2A=0$، أو $A=0$. المسائل 212.4-217.4 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3-5i\\ 3+5i & -7\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4i & 3+2i\\ -3+2i & -7i\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 5-7i\\ 4+3i & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 1-2i & 4+7i\\ 1+2i & -4 & -2i\\ 4-7i & 2i & 2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}5i & -4+i & 3-2i\\ 4+i & 2i & -2+i\\ -3-2i & 2+i & -6i\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}6 & 7 & -2\\ 7 & -1 & 8\\ -2 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

212.4 هل A هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ العنصران القطريان، 4 و -7، حقيقيان، والعنصران 3-5i و 5i + 3 مترافقان؛ وبالتالي، تكون A هرمیتية.

213.4 هل B هرمیتية أم هرمیتية متخالفة؟

العنصران القطريان 4i و 7i− تخيليان بحتيان، أما العنصران $3+2i$ و $-3+2i$ فهما سالبا الترافق [الجزء الحقيقي لأحدهما سالب الجزء الحقيقي للآخر والجزءان التخيليان متساويان]. وبالتالي، تكون B هرمیتية ـ متخالفة.

214.4 هل C هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ العنصران المتناظران $5-7i$ و $4+3i$ ليسا مترافقين أو سالبي ـ الترافق. وبالتالي، لا تكون C هرمیتية ولا هرمیتية ـ متخالفة.

215.4 هل D هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ العناصر القطرية، 3، 4 − و 2، حقيقية؛ والعناصر المتناظرة، $1-2i$ و $1+2i$، $4+7i$ و $4-7i$، $-2i$ و $2i$، مترافقة. وبالتالي، تكون D هرمیتية.

216.4 هل E هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ العناصر القطرية، 5i و 2i و 6i− ، تخيلية بحتة؛ وأزواج العناصر المتناظرة، $-4+i$ و $4+i$، $3-2i$ و $-3-2i$ ، $-2+i$ و $2+i$، سالبة الترافق. وبالتالي، تكون E هرمیتية ـ متخالفة.

217.4 هل F هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ F مصفوفة حقيقية ومتناظرة؛ إذا نظرنا إليها كمصفوفة عقدية، فهي هرمیتية.

218.4 هل $G = \mathrm{diag}[5, 2i, -3, 4+i]$ هرمیتية أم هرمیتية ـ متخالفة؟

■ العناصر القطرية ليست حقيقية ولا تخيلية بحتة. وبالتالي، لا تكون G هرمیتية ولا هرمیتية ـ متخالفة.

219.4 إذا كانت A و B هرمیتيتين، بيّن أن $A+B$ هرمیتية.

■ نجد، من المسألة 205.4، أن $(A+B)^H = A^H + B^H = A + B$.

220.4 لنفترض أن A هرمیتية وأن k عدد حقيقي. بيّن أن kA هرمیتية.

■ من المسألة 207.4، لدينا $(kA)^H = \bar{k}A^H = kA$.

221.4 لنفترض أن A هرمیتية ـ متخالفة و k عدد حقيقي. بيّن kA هرمیتية ـ متخالفة.

■ نجد، من المسألة 207.4، أن $(kA)^H = \bar{k}A^H = k(-A) = -(kA)$.

222.4 إذا كانت A مصفوفة عقدية إختيارية، بيّن أن AA^H و A^HA هرمیتيتان.

■ أولاً، A و A^H مترافقتان ضربياً في الاتجاهين، وتعطينا جداءً مربعاً. ثم، نستخدم المسألتين 208.4 و 206.4 فنحصل على

$$(AA^H)^H = (A^H)^H A^H = AA^H \qquad \text{و} \qquad (A^HA)^H = A^H(A^H)^H = A^HA$$

223.4 متى يكون لمصفوفتين هرمیتيتين جداءٌ هرمیتي؟

■ لدينا $(AB)^H = B^HA^H = BA$.

وبالتالي، تكون AB هرمیتية إذا وفقط إذا $AB = BA$. [قارن مع المسألة 182.4].

224.4 بيّن أنه إذا كانت A هرمیتية، فكذلك تكون $A^p (p = 2, 3, \ldots)$.

■ بما أن A و A^{k-1} تبديلتان، فإن استقراءً يعطينا النتيجة مباشرة.

المبرهنة 8.4: إذا كانت A مصفوفة مربعة، إذن (i) $A + A^H$ هرميتية؛ (ii) $A - A^H$ هرميتية متخالفة؛ (iii) $A = B + C$، حيث B هرميتية و C هرميتية ـ متخالفة.

225.4 اثبت (i) في المبرهنة 8.4.

■ $(A + A^H)^H = A^H + (A^H)^H = A^H + A = A + A^H$.

226.4 اثبت (ii) في النظرية 8.4.

■ $(A - A^H)^H = A^H - (A^H)^H = A^H - A = -(A - A^H)$.

227.4 اثبت (iii) في المبرهنة 8.4.

■ نضع $B + 1/2\,(A + A^H)$ و $C = 1/2\,(A - A^H)$. إذن $A = B + C$، حيث B هرميتية بواسطة المسألتين 225.4 و 220.4، و C هرميتية ـ متخالفة بواسطة المسألتين 226.4 و 221.4. [تبرهن وحدانية B و C كما في المسألة 187.4].

228.4 اكتب $A = \begin{pmatrix} 2+6i & 5+3i \\ 9-i & 4-2i \end{pmatrix}$ في الشكل $A = B + C$ حيث B هرميتية و C هرميتية ـ متخالفة.

■ $A^H = \begin{pmatrix} 2-6i & 9+i \\ 5-3i & 4+2i \end{pmatrix}$ $\qquad A + A^H = \begin{pmatrix} 4 & 14+4i \\ 14-4i & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad A - A^H = \begin{pmatrix} 12i & -4+2i \\ 4+2i & -4i \end{pmatrix}$

والمصفوفتان المطلوبتان هما

$$B = \frac{1}{2}(A + A^H) = \begin{pmatrix} 2 & 7+2i \\ 7-2i & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^H) = \begin{pmatrix} 6i & -2+i \\ 2+i & -2i \end{pmatrix}$$

229.4 لنفترض أن A مصفوفة مربعة n- هرميتية. بيّن أن P^HAP هرميتية من أجل أي مصفوفة P $n \times m$.

■ يكون الجداء معرّفاً كمصفوفة مربعة m-، ويكون لدينا $(P^HAP)^H = P^HA^H(P^H)^H = P^HAP$.

13.4 المصفوفات المتعامدة

230.4 عرّف مصفوفة «متعامدة».

■ نقول عن مصفوفة حقيقية A أنها متعامدة إذا $AA^T = A^TA = I$. لاحظ أن مصفوفة متعامدة A تكون بالضرورة مربعة وقلوبة (عكوسة)، ومعكوسها $A^{-1} = A^T$.

231.4 بيّن أن

$$A = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

متعامدة.

■ بسبب من المسألة 121.4، يكفي فقط أن نبين أن $AA^T = I$:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 1/9 \\ -4/9 & -7/9 & 4/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

232.4 عرّف «مجموعة ناظمية ـ التعامد» من المتجهات في R^n.

■ تكوّن المتجهات $u_1, u_2, \ldots, u_r$ مجموعة ناظمية ـ التعامد إذا كانت المتجهات متعامدة ثنائياً $[u_i \cdot u_j = 0$ من أجل $i \neq j]$،

وإذا كانت أطوال المتجهات تساوي وحدة الأطوال $[u_i.u_i = 1$ من أجل $i = 1,2,...,r]$. باستخدام ترميز دلتا كرونكر، يصبح شرط ناظمية ـ التعامد $u_i.u_j = \delta_{ij}$.

233.4 بيّن أن

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

تكون متعامدة إذا وفقط إذا كانت صفوفها $u_1 = (a_1,a_2,a_3)$، $u_2 = (b_1,b_2,b_3)$، $u_3 = (c_1,c_2,c_3)$ تكوّن مجموعة ناظمية ـ التعامد.

▩ إذا كانت A متعامدة، إذن

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

يقودنا هذا إلى

$$\begin{array}{lll} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = u_1 \cdot u_1 = 1 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = u_1 \cdot u_2 = 0 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = u_1 \cdot u_3 = 0 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = u_2 \cdot u_1 = 0 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = u_2 \cdot u_2 = 1 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = u_2 \cdot u_3 = 0 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = u_3 \cdot u_1 = 0 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = u_3 \cdot u_2 = 0 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = u_3 \cdot u_3 = 1 \end{array}$$

أي أن $u_i.u_j = \delta_{ij}$. وبالتالي، تكوّن u_1، u_2، u_3 مجموعة ناظمية التعامد. أما العكس فينتج من حقيقة أن كل خطوة عكوسة.

234.4 بيّن أن A متعامدة إذا وفقط إذا A^T متعامدة.

▩ $AA^T = A^TA = I$ إذا وفقط إذا $A^T(A^T)^T = (A^T)^TA^T = I$.

المسألتان 235.4 و 236.4 تثبتان:

المبرهنة 9.4: لتكن A مصفوفة حقيقية. إذن، القضايا التالية متكافئة: (أ) A متعامدة؛ (ب) صفوف A تكوّن مجموعة ناظمية ـ التعامد؛ (ج) أعمدة A تكون مجموعة ناظمية ـ التعامد.

235.4 اثبت أن (أ) و (ب) متكافئتان.

▩ لتكن R_1، R_2،...،R_n صفوف A؛ إذن، تكون R_1^T، R_2^T،...،R_n^T أعمدة A^T، لدينا، من ضرب المصفوفات، أن $AA^T = (c_{ij})$. لدينا من ضرب المصفوفات، أن $c_{ij} = R_iR_j^T = R_i.R_j$. وبذلك، $AA' = I$ إذا وفقط إذا $R_i.R_j = \delta_{ij}$ إذا وفقط إذا كانت الصفوف $R_1,R_2,...,R_n$ مجموعة ناظمية ـ التعامد.

236.4 اثبت أن (أ) و (ج) متكافئتان.

▩ من المسألتين 234.4 و 235.4، تكون A متعامدة إذا وفقط إذا كانت A^T متعامدة، وإذا وفقط إذا كانت صفوف A^T مجموعة ناظمية ـ التعامد إذا وفقط إذا كانت أعمدة A مجموعة ناظمية التعامد.

237.4 إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ x & y \end{pmatrix}$ متعامدة، أوجد x و y.

▩ ليكن R_1، R_2، و C_1، C_2، على الترتيب صفي وعمودي A. بما أن $R_1.R_2 = 0$، نحصل على $x/\sqrt{5} + 2y/\sqrt{5} = 0$ أو $x + 2y = 0$. بما أن C_1 متجه وحدة، نحصل على $x^2 + 1/5 = 1$ أو $x = \pm 2/\sqrt{5}$.

الحالة (i): $x = 2/\sqrt{5}$. إذن $x + 2y = 0$ تقود إلى $y = -1/\sqrt{5}$.

الحالة (ii): $x = -2/\sqrt{5}$. إذن $x + 2y = 0$ تقود إلى $y = 1/\sqrt{5}$.

بتعبير آخر، يوجد لدينا بالتحديد احتمالين:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

238.4 إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix} x & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & y \\ z & s & t \end{pmatrix}$$

متعامدة، أوجد x، y، z، s، t.

■ لتكن R_1 و R_2 و R_3 صفوف A، C_1، C_2، C_3 أعمدتها. بما أن R_1 متجه وحدة، إذن $x^2+4/9+4/9=1$، أو $x=\pm 1/3$. بما أن R_2 متجه وحدة، إذن $4/9+1/9+y^2=1$ أو $y=\pm 2/3$. بما أن $R_1.R_2=0$، نحصل على $2x/3+2/9+2y/3$ أو $3x+3y=-1$. الاحتمال الوحيد هو $x=1/3$ و $y=-2/3$. وبذلك،

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ z & s & t \end{pmatrix}$$

بما أن الأعمدة متجهات وحدة، إذن

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+z^2=1 \qquad \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+s^2=1 \qquad \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+t^2=1$$

وبذلك، $z=\pm 2/3$، $s=\pm 2/3$ و $t=\pm 1/3$.

الحالة (i): $z=2/3$. بما أن C_1 و C_2 متعامدان، $s=-2/3$. بما أن C_1 و C_3 متعامدان، $t=1/3$.

الحالة (ii): $z=-2/3$. بما أن C_1 و C_2 متعامدان، $s=2/3$. بما أن C_1 و C_3 متعامدان، $t=-1/3$.

وبالتالي، يكون لدينا تماماً حلاّن ممكنان:

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

239.4 إذا كانت A متعامدة، بيّن أن A^{-1} متعامدة.

■ بما أن A متعامدة، إذن $A^T=A^{-1}$. وتكون A^T متعامدة، بواسطة المسألة 234.4. وبالتالي، تكون A^{-1} متعامدة.

240.4 لتكن A و B مصفوفتين مربعتين -n متعامدتين. بيّن أن AB مصفوفة [مربعة -n] متعامدة.

■ يكفي أن نبين أن $(AB)(AB)^T=I$:

$$(AB)(AB)^T=(AB)(B^TA^T)=A(BB^T)A^T=AIA^T=AA^T=I$$

241.4 اكتب المصفوفة المتعامدة 2×2 الأكثر عمومية.

■ لتكن $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. إذن a، b، c، d أعداد حقيقية، ويكوّن صفّا A مجموعة ناظمية ـ التعامد. وبالتالي،

$$a^2+b^2=1 \qquad c^2+d^2=1 \qquad ac+bd=0$$

وبالمثل، يكوّن العمودان مجموعة ناظمية التعامد، وبذلك

$$a^2+c^2=1 \qquad b^2+d^2=1 \qquad ab+cd=0$$

وبالتالي، $c^2=1-a^2=b^2$، ومنها $c=\pm b$.

الحالة (i) $c=+b$. إذن $b(a+d)=0$ أو $d=-a$؛ فتكون المصفوفة المطلوبة $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

الحالة (ii): $c=-b$. إذن $b(d-a)=0$، أو $d=a$؛ فتكون المصفوفة المطلوبة $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

242.4 بيّن أن كل مصفوفة متعامدة 2×2 تكون في الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

من أجل عدد حقيقي مناسب θ .

■ ليكن a و b أي عددين حقيقيين بحيث أن $a^2 + b^2 = 1$. يوجد إذن عدد حقيقي θ بحيث أن $a = \cos\theta$ و $b = \sin\theta$. النتيجة المطلوبة تتبع الآن من مسألة 241.4.

14.4 مصفوفات واحدية

243.4 عرّف مصفوفة «واحدية».

■ نقول أن مصفوفة عقدية A تكون واحدية إذا $AA^H = A^HA = I$. لاحظ أن مصفوفة واحدية يجب أن تكون مربعة وعكوسة.

244.4 بيّن أن المصفوفة التالية واحدية:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

■ نحتاج فقط أن نبين أن $AA^H = I$:

$$AA^H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+1+2 & -i-i+2i & 1-i+i-1+0 \\ i+i-2i & 1+1+2 & i+1-1-i \\ 1+i-i-1+0 & -i+1-1+i+0 & 2+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

245.4 بيّن أن A تكون واحدية إذا وفقط إذا كانت A^H واحدية.

■ $AA^H = A^HA = I$ إذا وفقط إذا $A^H(A^H)^H = (A^H)^HA^H = I$.

246.4 عرّف مجموعة «ناظمية ـ التعامد» في C^n.

■ المتجهات u_1، u_2،...، u_r في C^n تشكل مجموعة ناظمية ـ التعامد إذا $u_i.u_j = \delta_{ij}$. تذكر أن الجداء النقطي في C^n يعرّف بواسطة:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

247.4 بيّن أن $\bar{u}\cdot\bar{v} = \overline{u\cdot v}$. في C^n.

■ ليكن $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. إذن

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})\cdot(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) = \bar{a}_1\bar{\bar{b}}_1 + \cdots + \bar{a}\bar{\bar{b}}_n$$
$$= \bar{a}_1b_1 + \cdots + \bar{a}_nb_n = \overline{a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}} = \overline{u\cdot v}$$

248.4 بين أن u_1، u_2،...، u_r تكون مجموعة متجهات ناظمية التعامد في C^n $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة ناظمية التعامد.

■ لدينا، من المسألة 247.4، أن $u_i.u_j = 0$ إذا وفقط إذا $\bar{u}_i\cdot\bar{u}_j = \bar{0} = 0$، و $u_i.u_i = 1$ إذا وفقط إذا $\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i = \bar{1} = 1$.

النظرية التالية النظير العقدي للنظرية 9.4.

المبرهنة 10.4: لتكن A مصفوفة عقدية. إذن، القضايا التالية متكافئة: أ) A واحدية؛ (ب) صفوف A تكوّن مجموعة ناظمية ـ التعامد؛ (ج) أعمدة A تكوّن مجموعة ناظمية ـ التعامد.

249.4 اثبت أن (أ) و (ب) متكافئتان.

▩ لتكن $R_1, \ldots, R_n$ صفوف A؛ إذن $\bar{R}_1^T, \ldots, \bar{R}_n^T$. نفترض أن $AA^H = (c_{ij})$. نحصل بالضرب المصفوفي على $c_{ij} = R_i\bar{R}_j^T = R_i \cdot R_j$. إذن، $AA^H = I$ إذا وفقط إذا $R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$ ، إذا وفقط إذا كانت $R_1, R_2, \ldots, R_n$ مجموعة ناظمية التعامد.

250.4 اثبت أن (أ) و (ج) متكافئتان.

▩ من المسائل 245.4 و 249.4 و 248.4، تكون A واحدية إذا وفقط إذا A^H واحدية، إذا وفقط إذا كانت صفوف A^H ناظمية التعامد، إذا وفقط إذا كانت مرافقات أعمدة A ناظمية ـ التعامد، إذا وفقط إذا كانت أعمدة A ناظمية ـ التعامد.

251.4 بيّن أن

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

واحدية.

▩ تشكل الصفوف مجموعة ناظمية ـ التعامد:

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i\right) = \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = 1$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}i, -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) = \left(\frac{2}{9}i + \frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}i - \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{2}{3}i, -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}i, -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right) = \frac{4}{9} + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = 1$$

252.4 إذا كانت A واحدية، بيّن أن A^{-1} واحدية.

▩ بما أن A واحدية، إذن $A^H = A^{-1}$. ولكن A^H واحدية [مسألة 245.4].

253.4 بيّن أن الجداء AB لمصفوفتين واحديتين A و B يكون واحدياً أيضاً.

▩ $$(AB)(AB)^H = (AB)(B^HA^H) = A(BB^H)A^H = AIA^H = AA^H = I$$

15.4 مصفوفات ناظمية

254.4 عرّف مصفوفة «ناظمية».

▩ تكون مصفوفة A ناظمية إذا كانت A حقيقية و $AA^T = A^TA$ ، أو إذا كانت A عقدية و $AA^H = A^HA$. وبذلك، فإن المصفوفات الحقيقية المتناظرة أو الواحدية، والمصفوفات العقدية الهرميتية أو الواحدية، تكون كلها حالات خاصة من المصفوفات الناظمية.

المسائل 255.4-258.4 تتعامل مع المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

255.4 هل A ناظمية؟

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

بما أن $AA^T = A^TA$ ، فالمصفوفة A تكون ناظمية.

256.4 هل B ناظمية؟

■ $$BB^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B^TB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$$

بما أن $BB^T \neq B^TB$، فالمصفوفة لا تكون ناظمية.

257.4 هل C ناظمية؟

■ $$CC^H = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^HC = \begin{pmatrix} 2-3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{pmatrix}$$

بما أن $CC^H = C^HC$، تكون C المصفوفة العقدية C ناظمية.

258.4 هل D ناظمية؟

■ $$DD^H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^HD = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

بما أن $DD^H \neq D^HD$، فإن المصفوفة العقدية D لا تكون ناظمية.

259.4 بيِّن أن مصفوفة [حقيقية] تخالفية ـ التناظر A تكون ناظمية

■ $AA^T = A(-A) = (-A)A = A^TA$

260.4 بيِّن أن مصفوفة [عقدية] هرميتية ـ متخالفة A تكون ناظمية.

■ $AA^H = A(-A) = (-A)A = A^HA$

261.4 أعط مثالاً لمصفوفة حقيقية تكون ناظمية ولكنها ليست متناظرة، أو تخالفية ـ التناظر، أو متعامدة.

■ المصفوفة A، في المسألة 255.4، مثال على ذلك.

262.4 بيِّن أن مجموع مصفوفة سلمية حقيقية [مسألة 19.4] ومصفوفة تخالفية التناظر يكون مصفوفة ناظمية، أي بيِّن أن $B = kI + A$ مصفوفة ناظمية أينما كانت A تخالفية ـ التناظر.

■ $B^T = (kI + A)^T = (kI)^T + A^T = kI - A$.

إذن:

$$BB^T = (kI + A)(kI - A) = k^2I - A^2 \quad \text{و} \quad B^TB = (kI - A)(kI + A) = k^2I - A^2$$

بما أن $BB^T = B^TB$، فالمصفوفة B تكون ناظمية.

المبرهنة 11.4: إن المصفوفة 2×2 الحقيقية الناظمية إما أن تكون متناظرة أو مجموع مصفوفة سلمية وأخرى تخالفية التناظر.

263.4 أثبت المبرهنة 11.4.

■ إذا $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، إذن

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

بما أن $AA^T = A^TA$، نحصل على المعادلات

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \qquad c^2 + d^2 = b^2 + d^2 \qquad ac + bd = ab + cd$$

المعادلة الأولى تقود إلى $b^2 = c^2$، وبالتالي، $b = c$ أو $b = -c$.

الحالة (i): $b = c$ [وهذا يتضمن الحالة $b = -c = 0$]. إذن، نتحصل على المصفوفة المتناظرة.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

الحالة (ii): $b = -c \neq 0$. إذن $ac + bd = b(d - a)$ و $ab + cd = b(a - d)$. وبذلك، $b(d - a) = b(a - d)$، وبالتالي $2b(d - a) = 0$. بما أن $b \neq 0$، نتحصل على $a = d$. وبذلك تكون A في الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

وهي مجموع مصفوفة سلّمية وأخرى تخالفية ـ التناظر.

264.4 أعط مثالاً لمصفوفة عقدية ناظمية لا تكون هرميتية، ولا هرميتية ـ متخالفة، ولا واحدية.

■ أنظر المسألة 257.4.

16.4 مصفوفات مركبة مربعة

265.4 عرّف مصفوفة «مركبة مربعة».

■ نقول عن مصفوفة مركبة A أنها مصفوفة مركبة مربعة إذا (i) كانت A مصفوفة مربعة، (ii) المصفوفات الجزئية تكون مصفوفة مربعة [أي أن أعداد خطوط التجزئة الأفقية والرأسية تكون متساوية]، (iii) المصفوفات الجزئية القطرية تكون مصفوفات مربعة.

المسائل 266.4-268.4 تتعلق بالمصفوفات المركبة التالية:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

266.4 هل A مصفوفة مركبة مربعة؟

■ لا: رغم أن A مصفوفة مربعة 5×5 وأنها مصفوفة مركبة 3×3، إلا أن المصفوفتين الجزئيتين القطريتين الثانية والثالثة ليستا مصفوفتين مربعتين.

267.4 هل B مصفوفة مركبة مربعة؟

■ نعم

268.4 اكمل تجزئة C إلى مصفوفة مركبة مربعة.

■ هناك خط أفقي بين الصفين الثاني والثالث؛ بالتالي، نضيف خطاً رأسياً بين العمودين الثاني والثالث. الخط الأفقي الآخر يكون بين الصفين الرابع والخامس؛ وبالتالي، نضع خطاً رأسياً بين العمودين الرابع والخامس. [يجب أن تكون مواضع الخطوط الأفقية والرأسية متناظرة للحصول على مصفوفة مركبة متناظرة]. يقود هذا إلى المصفوفة المركبة المربعة:

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

269.4 عرّف «مصفوفة مركبة قطرية».

▩ تكون مصفوفة مركبة مربعة M مصفوفة مركبة قطرية إذا كانت كل المصفوفات الجزئية غير القطرية مصفوفات صفرية؛ أي، إذا كانت M في الشكل:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix} \quad (\text{حيث } A_i \text{ مصفوفة مربعة})$$

إن مثل هذه المصفوفة المركبة القطرية تكتب غالباً في الشكل $M = \text{diag}\,[A_1, A_2, \ldots, A_r]$.

المسائل 272.4-270.4 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

270.4 جزىء A بحيث تصبح مصفوفة مركبة قطرية ذات أكبر عدد ممكن من المصفوفات الجزئية القطرية.

▩
$$A=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

271.4 جزيء B بحيث تصبّح مصفوفة مركبة قطرية ذات أكبر عدد ممكن من المصفوفات الجزئية القطرية.

▩
$$B=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

272.4 جزىء C بحيث تصبح مصفوفة مركبة قطرية ذات أكبر عدد ممكن من المصفوفات الجزئية القطرية.

▩ باعتبارها مصفوفة جزئية 3×3 وحيدة، تكون C [أو أي مصفوفة 3×3 أخرى] مصفوفة مركبة قطرية؛ ولا يمكن تجزئة C أبعد من ذلك.

المسائل 276.4-272.4 تتعلق بالمصفوفات المركبة القطرية التالية، والتي تكون فيها المصفوفات الجزئية القطرية المتقابلة من نفس الحجم: $M = \text{diag}\,[A_1, A_2, \ldots, A_r]$ و $N = \text{diag}\,[B_1, B_2, \ldots, B_r]$.

273.3 أوجد M + N.

▩ ببساطة، نجمع المصفوفات الجزئية القطرية: $M + N = \text{diag}\,[A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_r + B_r]$.

274.4 أوجد kM.

▩ نضرب المصفوفات الجزئية القطرية في k: $kM = \text{diag}\,[kA_1, kA_2, \ldots, kA_r]$.

275.4 أوجد MN.

▩ ببساطة نضرب المصفوفة الجزئية القطرية: $MN = \text{diag}\,[A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_rB_r]$.

276.4 أوجد f(M) من أجل حدودية معطاة f(x).

▩ أوجد $f(A_i)$ من أجل كل مصفوفة قطرية A_i. إذن، وبواسطة المسائل 275.4-273.4، $f(M) = \text{diag}[f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_r)]$.

277.4 عرّف «مصفوفة مركبة مثلثية عليا».

■ ان مصفوفة مركبة مربعة تكون مصفوفة مركبة مثلثية عليا إذا كانت كل المصفوفات الجزئية التي تحت القطر مصفوفات صفرية.

278.4 عرّف «مصفوفة مركبة مثلثية سفلية».

■ إن مصفوفة مركبة مربعة تكون مصفوفة مركبة مثلثية سفلية إذا كانت كل المصفوفات الجزئية التي فوق القطر مصفوفات جزئية صفرية. [أو، بشكل مكافىء، المصفوفة المركبة المثلثية السفلية هي منقول مصفوفة مركبة مثلثية عليا].

المسائل 279.4-281.4 تتعلق بالمصفوفات المركبة التالية:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ \hline 0 & 0 & 6\end{array}\right)\qquad B=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 7 & 8 & 9\end{array}\right)\qquad C=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ \hline 0 & 6 & 7\end{array}\right)$$

279.4 هل A مثلثية عليا؟ مثلثية سفلية؟

■ A مثلثية عليا، ولكنها ليست مثلثية سفلية.

280.4 هل B مثلثية عليا؟ مثلثية سفلية؟

■ إن B مثلثية سفلية، ولكنها ليست مثلثية عليا.

281.4 هل C مثلثية عليا؟ مثلثية سفلية؟

■ إن C ليست مثلثية عليا ولا مثلثية سفلية. بالإضافة إلى ذلك، لا توجد تجزئة أبعد لـ C لجعلها إما مثلثية علوية أو مثلثية سفلية.

282.4 حلّل مصفوفة مركبة مربعة إختيارية إلى مجموع مصفوفة مركبة مثلثية عليا وأخرى مثلثية سفلية. هل التحليل وحيد؟

■

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{22} & \cdots & A_{1r}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r}\\ & \frac{1}{2}A_{22} & \cdots & A_{2r}\\ & & \cdots & \cdots\\ & & & \frac{1}{2}A_{rr}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}A_{11} & & & \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & \frac{1}{2}A_{rr}\end{pmatrix}$$

التحليل ليس وحيداً، لأنه يمكن تجزئة المصفوفات الجزئية القطرية بواسطة عدد لا نهائي من الطرق.

الفصل 5
المحددات

1.5 دالة المحددة، المحددات من المرتبة واحد

1.5 ما هو الترميز المستخدم من أجل «دالة المحددة»؟

■ يرمز لمحددة مصفوفة مربعة -n، $A = (a_{ij})$، بواسطة det A أو $\det(a_{ij})$ أو |A| أو

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وتكون مرتبة المحددة هي العدد الصحيح الموجب n.

2.5 أذكر نطاق ومدى دالة المحددة.

■ دالة المحددة تقرن قيمة سلَمية، det A، بكل مصفوفة مربعة A. بالتالي، فإن نطاق دالة المحددة يتكون من كل المصفوفات المربعة، أما مداها فيتكون من كل الاعداد السلَمية.

3.5 نقول عن دالة المحددة أنها ضربية. ماذا يعني هذا التعبير؟

■ من أجل أي مصفوفتين A و B، $\det AB = (\det A)(\det B)$. سوف يتم إثبات هذه النتيجة الأساسية في المبرهنة 3.5.

4.5 عرّف المحددة من المرتبة واحد.

■ إن محددة مصفوفة 1×1، $A = (a_{11})$، هي العدد السلمي a_{11} نفسه. [لاحظ أن هذا التعريف متوافق مع المسألة 3.5]

5.5 أوجد det(24) و det(−6) و det(t + 2).

■ تكون المحددة العدد السلمي نفسه؛ وبالتالي، $\det(24) = 24$ و $\det(-6) = -6$ و $\det(t+2) = t+2$.

6.5 بيّن أن للمعادلة $ax = b$ حلّ وحيد إذا وفقط إذا $\det(a) \neq 0$.

■ من المبرهنة 2.3، يكون للمعادلة $ax = b$ حلّ وحيد إذا وفقط إذا $a \neq 0 \equiv \det(a)$.

2.5 المحددات من المرتبة الثانية

7.5 عرّف «المحددة من المرتبة إثنين».

■ إن محددة مصفوفة 2×2، $A = (a_{ij})$، هي $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

8.5 أعط «مخططاً مقوّ للذاكرة/ mnemonic» من أجل حساب قيمة محددة من المرتبة الثانية.

■



إن المحددة تساوي جداء العناصر على طول السهم المسبوق بعلامته الزائدة منقوصاً منه جداء العناصر التي على طول السهم المؤشر عليه بعلامة الناقص. [هناك مخطط مماثل من أجل المحددات من المرتبة الثالثة، ولكن ليس من أجل المخططات ذات المرتبات الأعلى]

المسائل 9.5-13.5 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 6\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & -2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

9.5 أوجد det A.

■ $$\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(5)(3)-(4)(2)=15-8=7$$

10.5 أوجد det B.

■ $$\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 6\end{vmatrix}=(2)(6)-(1)(-4)=12+4=16$$

11.5 أوجد det C.

■ $$\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15+8=23$$

12.5 أوجد det D.

■ $$\begin{vmatrix}4 & -5\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-8-5=-13$$

13.5 أوجد det E.

■ $$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

14.5 أوجد det A، حيث $A=\begin{pmatrix}a-b & a\\ a & a+b\end{pmatrix}$.

■ $$\begin{vmatrix}a-b & a\\ a & a+b\end{vmatrix}=(a-b)(a+b)-(a)(a)=-b^2$$

15.5 أوجد det B، حيث $B=\begin{pmatrix}t-5 & 7\\ -1 & t+3\end{pmatrix}$.

■ $$\begin{vmatrix}t-5 & 7\\ -1 & t+3\end{vmatrix}=(t-5)(t+3)+7=t^2-2t-15+7=t^2-2t-8$$

16.5 حدِّد قيم k التي من أجلها تكون $\begin{vmatrix}k & k\\ 4 & 2k\end{vmatrix}=0$.

■ $$\begin{vmatrix}k & k\\ 4 & 2k\end{vmatrix}=2k^2-4k=0$$ أو $2k(k-2)=0$

إذن $k=0$ أو $k=2$.

17.5 حدِّد تلك القيم لـ t التي تجعل $\begin{vmatrix}t-2 & 3\\ 4 & t-1\end{vmatrix}=0$.

■ $$\begin{vmatrix}t-2 & 3\\ 4 & t-1\end{vmatrix}=t^2-3t+2-12=t^2-3t-10=0$$ أو $(t-5)(t+2)=0$.

وبالتالي، $t=5$ أو $t=-2$.

18.5 لتكن المعادلتين الخطيتين في مجهولين:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

من المسألة 14.3، يكون للمنظومة حلّ وحيد إذا وفقط إذا $D=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ ؛ ذلك الحل هو

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\qquad y=\frac{a_1c_1-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

عبِّر تماماً عن الحلّ بدلالة المحددات.

■ $$x = \frac{N_x}{D} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{N_y}{D} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

تظهر D هنا، وهي محددة مصفوفة المعاملات، كمقام للنسبتين معاً. أما البسطان N_x و N_y في النسبتين من أجل x و y، على الترتيب، فيمكن الحصول عليهما بإحلال عمود الحدود الثابتة محل عمود معاملات المجهول المناسب في مصفوفة المعاملات.

19.5 استخدم المحددات لحلّ: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$.

■ تكون المحددة D لمصفوفة المعاملات:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (3)(-3) = 10 + 9 = 19$$

بما أن $D \neq 0$، فيكون للمنظومة حلّ وحيد. للحصول على البسط N_x نستبدل، في مصفوفة المعاملات، الحدود الثابتة بمعاملات x:

$$N_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (7)(5) - (1)(-3) = 35 + 3 = 38$$

وللحصول على البسط N_y نستبدل، في مصفوفة المعاملات، الحدود الثابتة بمعاملات y:

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (3)(7) = 2 - 21 = -19$$

وبذلك، فإن الحل الوحيد للمنظومة يكون

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{38}{19} = 2 \qquad \text{و} \qquad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-19}{19} = -1$$

20.5 حلّ المنظومة $\begin{cases} 2x = 5 + y \\ 3 + 2y + 3x = 0 \end{cases}$ باستخدام المحددات.

■ أولاً، نرتب المنظومة في الشكل النمطي:

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y &= 5 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

نحسب المحددة D لمصفوفة المعاملات:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (3)(-1) = 4 + 3 = 7$$

بما أن $D \neq 0$، فإنه يكون للمنظومة حلّ وحيد. الآن،

$$N_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (-3)(-1) = 10 - 3 = 7$$

و $$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (3)(5) = -6 - 15 = -21$$

وبذلك، فإن الحل الوحيد للمنظومة يكون

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{7}{7} = 1 \qquad \text{و} \qquad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

21.5 استخدم المحددات لحل المنظومة: $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$.

■ نحسب المحددة D لمصفوفة المعاملات:

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -6\end{vmatrix}=(2)(-6)-(3)(-4)=-12+12=0$$

بما أن $D=0$، فليس للمنظومة حل وحيد، ولا نستطيع حلّها بواسطة المحددات.

22.5 إذا $ab \neq 0$، استخدم المحددات لحل: $\begin{cases} ax-2by=c \\ 3ax-5by=2c \end{cases}$.

■ نحسب أولاً $D=\begin{vmatrix}a & -2b\\ 3a & -5b\end{vmatrix}=-5ab+6ab=ab$. بما أن $D=ab\neq 0$، فإنه يكون للمنظومة حلّ وحيد. نحسب بعد ذلك:

$$N_x=\begin{vmatrix}c & -2b\\ 2c & -5b\end{vmatrix}=-5bc+4bc=-bc \qquad \text{و} \qquad N_y=\begin{vmatrix}a & c\\ 3a & 2c\end{vmatrix}=2ac-3ac=-ac$$

إذن، $x=N_x/D=-bc/ab=-c/a$ و $y=N_y/D=-ac/ab=-c/b$.

23.5 تحقق من الخاصية الضربية [مسألة 3.5]، من أجل المحددات من المرتبة الثانية.

■
$$AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det AB &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})\\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}+\overset{(1)}{a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}}+\overset{(4)}{a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}}+a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}\\ &\quad -a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}-\overset{(2)}{a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}}-\overset{(3)}{a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}}-a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}\end{aligned}$$

لدينا، من جهة أخرى، أن

$$\begin{aligned}(\det A)(\det B) &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\\ &= \overset{(1)}{a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}}-\overset{(2)}{a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}}-\overset{(3)}{a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}}+\overset{(4)}{a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}}\end{aligned}$$

3.5 المحددات من المرتبة الثالثة

24.5 عرّف «المحددة من المرتبة الثالثة».

■ نعرّف محددة مصفوفة 3×3، $A=(a_{ij})$، بأنها:

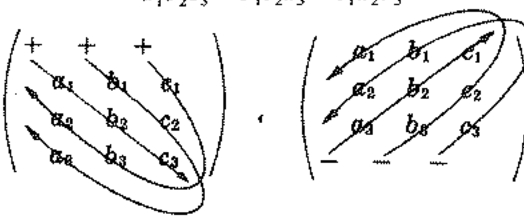
$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

25.5 استخدم شكل 5-1 للحصول على محددة المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$$

■ كوّن جداء كل ثلاثة أعداد موصولة بسهم في المخطط الأيسر، وضع علامة زائد قبل كل جداء، كما يلي:

$$+a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3$$



شكل 5-1

الآن، كوّن جداء كل ثلاثة أعداد موصولة بسهم في المخطط الأيمن، وضع علامة ناقص أمام كل جداء، كما يلي:

$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

إذن، محددة A تساوي تماماً مجموع التعبيرين اعلاه:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

[الطريقة أعلاه لحساب $|A|$ ليست صالحة من أجل المحددات من مرتبات أكبر من 3].

المسائل 26.5-29.5 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

26.5 احسب det A.

■ استخدم شكل 5-1:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(5)(4) + (1)(-2)(1) + (1)(-3)(0) - (1)(5)(1) - (-3)(-2)(2) - (4)(1)(0)$$

$$= 40 - 2 + 0 - 5 - 12 - 0 = 21$$

27.5 احسب det B.

■

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(5)(1) + (-2)(-1)(0) + (-4)(6)(2) - (0)(5)(-4) - (6)(-1)(3) - (1)(-2)(2)$$

$$= 15 + 0 - 48 - 0 + 18 + 4 = -11$$

28.5 إحسب det C.

■

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 24 + 48 - 4 + 12 = 100$$

29.5 احسب det D.

■

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 18 - 10 - 30 + 14 - 6 = 0$$

30.5 بيّن أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[لاحظ أن كل مصفوفة 2×2 يمكن الحصول عليها، من المصفوفة الأصلية، بشطب الصف والعمود المحتويان على معاملاتها عنصر من الصف الأول]. ولاحظ أن المعاملات تؤخذ بإشارات تناوبية.

■ فك محددات المرتبة الثانية لتحصل على

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

باستثناء ترتيب الحدود، فإن هذا المفكوك هو نفسه الذي أعطته المسألة 24.5.

المسائل 31.5-33.5 تتعلق بالمصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

31.5 أوجد det A.

■ فك وفق الصف الأول، كما في المسألة 30.5:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}=\left|\begin{vmatrix}\boxed{1}&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}\right|-2\left|\begin{vmatrix}1&\boxed{2}&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}\right|+3\left|\begin{vmatrix}1&2&\boxed{3}\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}\right|$$

$$=1\begin{vmatrix}-2&3\\5&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&3\\0&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4&-2\\0&5\end{vmatrix}$$

$$=1(2-15)-2(-4+0)+3(20+0)=-13+8+60=55$$

32.5 إحسب det B.

■
$$\begin{vmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}6&7\\9&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5&7\\8&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$$

$$=2(6-63)-3(5-56)+4(45-48)=27$$

33.5 إحسب det C.

$$\begin{vmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-4&2\\-1&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&2\\1&5\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}0&-4\\1&-1\end{vmatrix}$$

$$=2(-20+2)-3(0-2)-4(0+4)=-46$$

المسائل 34.5-36.5 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-3\\5&3&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&2&-3\\-1&-3&5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&-4\\4&1&3\end{pmatrix}$$

34.5 إحسب det A.

■
$$\begin{vmatrix}2&0&1\\4&2&-3\\5&3&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}4&-3\\5&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}4&2\\5&3\end{vmatrix}=2(2+9)+(12-10)=24$$

35.5 إحسب det B.

■
$$\begin{vmatrix}2&0&1\\3&2&-3\\-1&-3&5\end{vmatrix}=2(10-9)+1(-9+2)=-5$$

36.5 إحسب det C.

■
$$\begin{vmatrix}1&0&0\\3&2&-4\\4&1&3\end{vmatrix}=1(6+4)=10$$

[إن الحسابات تزداد سهولة كلما ازداد عدد الأصفار في الصف الذي يتم الفك وفقه].

المسائل 39.5-37.5 تتعامل مع المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

37.5 عبِّر عن A كتركيبة خطية لمحددات من المرتبة الثانية ذات معاملات من الصف الثاني.

■ لدينا، من المسألة 24.5،

$$\begin{aligned}\det A &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \\ &= -a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) \\ &= -a_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

38.5 عبِّر عن det A كتركيبة خطية لمعاملات من المرتبة الثانية ذات معاملات من الصف الثالث.

■

$$\begin{aligned}\det A &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \\ &= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

39.5 بيَّنا في المسائل 30.5 و 37.5 و 38.5 أن معاملات المفكوك ـ الصفي لمحددة من المرتبة الثالثة تشكل نمطاً للوحة شطرنج في المصفوفة الأصلية:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

يمكننا أيضاً أن نفك المحددة بحيث أن المعاملات تكون من عمودٍ بدلاً من صف. ويظهر نفس النمط الشطرنجي من أجل الأعمدة. اكتب المفكوكات وفق الأعمدة الثلاثة.

■ **العمود الأول** $\det A = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

العمود الثاني $= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

العمود الثالث $= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

40.5 أعط معياراً، بدلالة المحددات، لمعرفة عما إذا كان للمنظومة

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

حلّ وحيد، عبِّر عن مثل هذا الحل بدلالة المحددات.

■ يكون للمنظومة حلّ وحيد إذا وفقط إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات مختلفة عن الصفر.

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

يمكن، في هذه الحالة، التعبير عن الحل الوحيد للمنظومة كنسب لمحددات:

$$x = \frac{N_x}{D} \qquad y = \frac{N_y}{D} \qquad z = \frac{N_z}{D}$$

حيث يتحصل على البسوط N_x، N_y، N_z بإحلال عمود الحدود الثابتة محل عمود معاملات المجهول في مصفوفة المعاملات:

$$N_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad N_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad N_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

41.5 حلّ بواسطة المحددات:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ x - 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

■ نحسب أولاً المحددة D لمصفوفة المعاملات:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 + 2 + 1 + 4 + 3 = 5$$

بما أن $D \neq 0$، يكون للمنظومة حلّ وحيد. ثم احسب قيم N_x، N_y، N_z وهي بسوط x، y، z على الترتيب:

$$N_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 + 2 + 4 + 6 + 3 = 10$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 - 4 + 1 - 8 + 9 = -5$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 6 - 3 + 4 - 4 = 0$$

وبذلك، يكون الحل الوحيد هو $x = N_x/D = 2$، $y = N_y/D = -1$، $z = N_z/D = 0$.

42.5 استخدم المحددات لحلّ:

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ 3z - 1 &= x - 2y \end{aligned}$$

■ نضع، أولاً، المنظومة في شكل نمطي بحيث تظهر المجاهيل في أعمدة:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x - 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

ثم نحسب المحددة D لمصفوفة المعاملات:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 6 + 6 + 5 + 8 + 27 = 22$$

بما أن $D \neq 0$، يكون للمنظومة حلّ وحيد. لحساب N_x، N_y، N_z، نستبدل الحدود الثابتة بمعاملات x، y، z في مصفوفة المعاملات:

$$N_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 6 + 16 - 5 + 4 + 72 = 66$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -48 + 2 + 3 + 8 + 4 + 9 = -22$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 24 - 6 - 5 + 32 + 9 = 44$$

وبالتالي، يكون لدينا $x = N_x/D = 3$، $y = N_y/D = -1$، $z = N_z/D = 2$.

4.5 التباديل

43.5 عرّف «تبديلاً».

■ يعرّف تبديلٌ σ لمجموعة منتهية $\mathscr{F}$ بأنه تطبيق واحد - لواحد لـ $\mathscr{F}$ في نفسه. يكون لدينا، في الحالة المعتادة، $\mathscr{F} = \{1,2,\ldots,n\}$. ونستخدم الترميز

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \sigma = j_1 j_2 \ \cdots \ j_n$$

حيث $j_i = \sigma(i)$. يوجد عدد $n!$ من التباديل σ، وهي تشكل زمرة [قسم 5.6]، نرمز لها بـ S_n.

44.5 اكتب قائمة التباديل S_2.

■ يوجد عدد $2! = 2.1 = 2$ من التباديل في S_2: 12 و 21.

45.5 اكتب قائمة التباديل في S_3.

■ يوجد $3! = 3.2.1 = 6$ تبديلا في S_3: 123، 132، 213، 231، 312، 321.

46.5 عرّف «شفعية» تبديل.

■ نقول عن تبديل σ أنه زوجي أو فردي وفقاً لوجود عدد زوجي أو فردي من «الانعكاسات» في σ. نقصد بانعكاس في σ زوج صحيح (i,k) بحيث أن $i>k$ ولكن i يسبق k في σ. ونعرّف إشارة σ، والتي نكتبها $\operatorname{sgn}\sigma$، بواسطة

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \text{إذا } \sigma \text{ زوجية،} \\ -1 & \text{إذا } \sigma \text{ فردية،} \end{cases}$$

47.5 أوجد شفعية $\sigma = 35142$ (في S_5).

■ نحصي، من أجل كل عنصر، عدد العناصر الأصغر منه والتي على يمينه. وبذلك 3 تعطي الانعكاسين (3,1) و (3,2)؛ 5 تعطي الانعكاسات (5,1) و (5,4) و (5,2)؛ 1 لا يعطي أي انعكاس؛ 4 تعطي الانعكاس (4,2)؛ 2 لا يعطي أي إنعكاس. يوجد إذن ستة انعكاسات، فإن σ تكون زوجية، ويكون $\operatorname{sgn}\sigma = 1$.

48.5 أوجد شفعية التبديل المتطابق ε.

■ يكون التبديل المتطابق $\varepsilon = 123\ldots n$ زوجيا، لأنه لا توجد انعكاسات في ε.

49.5 أوجد شفعية كل تبديل في S_2.

■ التبديل 12 زوجي، والتبديل 21 فردي.

50.5 أوجد شفعية كل تبديل في S_3.

■ التباديل 123، 231، 312 زوجية، في حين أن التباديل 132، 213، 321 فردية.

51.5 أثبت أن S_n $(n \geqslant 2)$ تتكون من أعداد متساوية، $(n!/2)$، من التباديل الزوجية والفردية.

■ استخدم الاستقراء. المبرهنة تتحقق من أجل $n = 2$، بواسطة المسألة 49.5. عندما $n > 2$، أنظر في العنصر الاختياري

$$\sigma = j_1 \ldots j_r j_{r+1} \ldots j_{n-1} \qquad (1)$$

في S_{n-1}. توجد n طريقة لإدخال الرمز «n» في (1) - قبل j_1 مباشرة، وقبل j_2 مباشرة،...، وقبل j_{n-1} مباشرة، وبعد j_{n-1} مباشرة. كل طريقة تولِّد عنصراً مختلفاً σ' في S_n، وبذلك نكون قد حسبنا حساب كل عنصر في S_n.

الآن، وبسبب أن $j_i < n$، في (1)، فإن عدد الانعكاسات في σ' يساوي عدد الانعكاسات في σ مضافاً إليه عدد الـ j_i على يمين «n» المدخلة. وبما أن العدد الأخير مستقل عن σ الخاصة، فإننا نستنتج أن كل عنصر σ في S_{n-1} يقود إلى عدد x من العناصر σ' في S_n التي لها نفس شفعية σ، وعدد $(n-x)$ ذات شفعية مختلفة. بسبب فرضية الاستقراء، تتكون S_{n-1} من عدد α من التباديل الزوجية وعدد β من التباديل الفردية، حيث $\alpha = \beta$. إذن، تتكون S_n من $\alpha x + \beta(n-x)$ تبديلاً زوجياً و $\beta x + \alpha(n-x) = \alpha x + \beta(n-x)$ تبديلاً فردياً؛ وهكذا يكتمل البرهان.

52.5 عرف «مناقلة» وحدِّد شفيعتها.

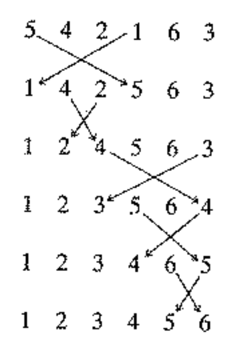
■ المناقلة هي تبديل τ يبادل بين عددين i و j، $j>i$، ويترك العناصر الأخرى دون تغيير:

$$\tau = 12\ldots(i-1)j(i+1)\ldots(j-1)i(j+1)\ldots n$$

ويوجد عدد $2(j-i-1)+1$ من الانعكاسات في τ؛ تحديداً، $(j,i),(j,x),(x,i)$، حيث $x = i+1,\ldots,j-1$. وبذلك، فإن أي ناقلة تكون فردية.

53.5 استخدم المناقلات، لتحديد شفعية $\sigma = 542163$ (في S_6).

■ نحوِّل σ إلى التبديل المتطابق باستخدام المناقلات؛ مثلاً



وبما أن استخدمنا عدداً فردياً، 5، من المناقلات [وبما أن فردي فردي = فردي]، فإن σ تكون تبديلا فرديا.

54.5 ليكن $\sigma = 24513$ و $\tau = 41352$ تبديلين في S_5. أوجد التبديل المركب $\tau^\circ\sigma$.

■ تذكر أن $\sigma = 24513$ و $\tau = 41352$ أسلوبان مختصران لكتابة:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

وبذلك، فإن تأثير σ و τ على 1,2,...,5 يكون كما يلي:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ \tau & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

وبالتالي، يكون لدينا $\tau^\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ أو $\tau^\circ\sigma = 15243$.

55.5 ليكن σ و τ التبديلين في المسألة 54.5. أوجد التركيب $\sigma^\circ\tau$.

■ يكون تأثير τ و σ على $1,2,...,5$ كما يلي:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

وبذلك $\sigma^\circ\tau = 12534$.

56.5 أوجد المعكوس σ^{-1} للتبديل σ في المسألة 10.4.

■ تعريفاً، تكون $\sigma^{-1}(j) = k$ إذا وفقط إذا $\sigma(k) = j$ ؛ وبالتالي،

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \sigma^{-1} = 41523 \qquad (1)$$

57.5 ليكن $\sigma = j_1j_2...j_n$ أي تبديل. بين أنه من أجل أي انعكاس (i,k) في σ، يوجد زوج (i^*,k^*) بحيث أن

$$i^* < k^* \quad \text{و} \quad \sigma(i^*) > \sigma(k^*)$$

وبالعكس. وبذلك، يكون σ زوجياً أو فردياً وفقاً لوجود عدد زوجي أو فردي لأزواج تحقق (1).

■ نختار i^* و k^* بحيث أن $\sigma(i^*)=i$ و $\sigma(k^*) = k$. إذن $i>k$ إذا وفقط إذا $\sigma(i^*)>\sigma(k^*)$، و i تسبق k في σ إذا وفقط إذا $i^* <k^*$.

58.5 لتكن الحدودية $g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$. اكتب $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ تفصيلا.

■ تعنـــي $\prod_{i<j} (x_i - x_j)$ جداء كل الحدود (x_i-x_j)، من أجل $i<j$. وبالتالي،

$g(x_1,...,x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$.

59.5 ليكن σ تبديلا إختياريا من أجل الحدودية g في المسألة 58.5، عرّف $\sigma(g) = \prod_{i<j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$. بيّن أن $\sigma(g) = (\text{sgn } \sigma)g$.

■ لدينا، في شكل تفصيلي،

$$\begin{aligned} \sigma(g) = &(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)}) \cdots (x_{\sigma(1)} - X_{\sigma(n)}) \\ &\cdot (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)}) \cdots (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(n)}) \\ &\cdots \\ &\cdot (x_{\sigma(n-1)} - x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

ويكون لكل عـامل على اليميـن الشكـل $x_i - x_j$، حيث $i \neq j$؛ إذا كان الزوج $(i,j) = (\lambda,\nu)$ ممثلا في الجداء، فإن الزوج $(i,j) = (\nu,\lambda)$ لا يكون ممثلاً. ينتج عن ذلك أن $\sigma(g) = g$ أو $\sigma(g) = -g$ وفقاً لوجود عدد زوجي أو فردي يحقق

$$i<j \quad \text{و} \quad \sigma(i)>\sigma(j)$$

ولكن يكون لدينا عندئذ، وبسبب المسألة 57.5، $\sigma(g) = g$ إذا كان σ تبديلا زوجياً $(\text{sgn } \sigma = 1)$ و $\alpha(g) = -g$ إذا كان σ تبديلا زوجيا $(\text{sgn } \sigma = -1)$.

60.5 ليكن $\sigma,\tau \in S_n$. بيّن أن $\text{sgn}(\tau^\circ\sigma) = (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \sigma)$. وبذلك، يكون الجداء [التركيب] لتبديليين زوجيين أو فرديين زوجيا، وجداء تبديل فردي وآخر زوجي فرديا.

■ من المسألة 59.5، $\text{sgn}(\tau \circ \sigma)g = (\tau \circ \sigma)(g) = \tau(\sigma(g)) = \tau(\text{sgn}\ \sigma)g) = (\text{sgn}\ \tau)(\text{sgn}\ \sigma)g$. وبالتالي $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = (\text{sgn}\ \tau)(\text{sgn}\ \sigma)$.

61.5 أعطينا التبديل $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$، اكتب $\sigma^{-1} = k_1 k_2 \dots k_n$. بيّن أن (أ) $\text{sgn}\sigma^{-1} = \text{sgn}\ \sigma$؛ (ب) من أجل أي سلّميات a_{ij}، $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$.

■ (أ) لدينا، من المسألة 60.5، $(\text{sgn}\ \sigma^{-1})(\text{sgn}\ \sigma) = \text{sgn}\ \varepsilon = 1$. (ب) بما أن $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ تبديل، إذن $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$، من أجل تبديل $\tau \equiv k_1 k_2 \dots k_n$. ولكن وبسبب هذا الترميز نفسه، يكون لدينا

$$j_{k_1} = \sigma(k_1) = 1 \qquad j_{k_2} = \sigma(k_2) = 2 \qquad \cdots \qquad j_{k_n} = \sigma(k_n) = n$$

والذي يعني أن $\sigma \circ \tau = \varepsilon$، أو $\tau = \sigma^{-1}$.

5.5 المحددات ذات المرتبات الاختيارية

62.5 عرِّف محددة مصفوفة مربعة n- عامة $A = (a_{ij})$.

■ ليكن جداء n عنصراً في A لا يتضمن عنصرين في نفس الصف أو نفس العمود. مثل هذا الجداء، يمكن أن يكتب في الشكل

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

حيث اخترنا ترتيباً للعوامل يجعل متتالية الادلة السفلية الثانية تبديلاً $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ في S_n. [المسألة 61.5 أعطت ترتيباً مكافئاً بواسطة الاعمدة، حيث عدّلت الترميزات هناك بشكل مناسب.] أن «محددة» A، ونرمز لها بـ $\det A$ أو $|A|$، هي مجموع كل مثل هذه الجداءات، حيث يسبق كل جداء بإشارة σ. أي:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1}$$

نقول عن محددة مثل هذه أنها من المرتبة n. يتضح، من المسألة 51.5، أن نصف الجداءات المجموعة في (1) يحمل إشارة + ونصفها يحمل إشارة − .

63.5 أوجد $\det A$، حيث $A = (a_{11})$ مصفوفة 1×1.

■ بما أن S_1 تتكون من التبديل المتطابق الزوجي، إذن $\det A = a_{11}$، متوافقاً مع المسألة 4.5.

64.5 أوجد $\det A$، حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة 2×2.

■ في S_2، التبديل 12 زوجي والتبديل 21 فردي. وبالتالي، $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$، متوافقاً مع المسألة 7.5.

65.5 أوجد $\det A$، حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة 3×3.

■ في S_3، التباديل 123، 231، 312 زوجية، والتباديل 321، 213، 132 فردية. إذن

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

وهذا يتوافق مع المسألة 24.5.

66.5 اثبت أن: محددتي مصفوفة A ومنقولها A^T متساويتان: $|A| = |A^T|$.

■ إذا $A = (a_{ij})$، إذن $A^T = (b_{ij})$، حيث $b_{ij} = a_{ji}$. وبالتالي، يكون لدينا

$$|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

نضع $\tau = \sigma^{-1}$. من المسألة 61.5، تكون $\text{sgn}\ \tau = \text{sgn}\ \sigma$، و $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$. وبالتالي:

$$|A^T| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

ورغم ذلك، فإن σ تستخدم كل عناصر S_n، كما أن $\tau = \sigma^{-1}$ تستنفذ كل عناصر S_n. إذن، $|A^T| = |A|$. [نتيجة لذلك، فإن أي نظرية حول محددة مصفوفة A تتعلق بصفوف A، سوف يكون لها نظرية مناظرة تتعلق بأعمدة A. ينطبق هذا بوجه خاص على المبرهنة 1.5].

67.5 اثبت: إذا تحصلنا على B من مصفوفة مربعة A بواسطة تبادل صفين (عمودين) في A، فإن $|B| = -|A|$.

■ نثبت المبرهنة في حالة تبادل عمودين. لتكن τ المناقلة التي تبادل بين العددين المقابلين للعمودين المبادلين في A. إذا $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، إذن $b_{ij} = a_{i\tau(j)}$. وبالتالي، ومن أجل أي تبديل σ، يكون لدينا

$$b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} = a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)} \qquad (\tau\sigma \equiv \tau^{\circ}\sigma \quad \text{حيث})$$

وبذلك

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma) a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

بما أن المناقلة τ تبديل فردي [المسألة 52.5]، فإن $\text{sgn}\ \tau\sigma = (\text{sgn}\ \tau)(\text{sgn}\ \sigma) = -\text{sgn}\ \sigma$، وبذلك

$$|B| = -\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \tau\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

ولكن σ تستخدم كل عناصر S_n، وكذلك τσ؛ وبالتالي، فإن $|B| = -|A|$.

68.5 اثبت: إذا تحصلنا على B من المصفوفة المربعة A بضرب صف (عمود) لـ A في عدد سلمي k، فإن $|B| = k|A|$.

■ إذا ضرب الصف i لـ A في k، فإن كل حدّ في (1) من المسألة 62.5 يضرب في k، وبذلك $|B| = k|A|$.

69.5 بيّن أنه إذا كان لـ A صف [عمود] من الأصفار، فإن $|A| = 0$.

■ كل حدّ في المجموع (1) للمسألة 62.4 يحتوي عاملا من كل صف، ومن ذلك الصف الصفري.

70.5 بيّن أنه إذا كان لـ A صفان [عمودان] متطابقان، فإن $|A| = 0$.

■ إذا بادلنا بين الصفين المتطابقين، فإننا نتحصل على A. وبالتالي، ومن المسألة 67.5، نجد أن $|A| = -|A|$، وذلك $|A| = 0$.

71.5 ليكن σ أي تبديل في S_n، مختلف عن التبديل المتطابق ε. اثبت أن $\sigma(i) < i$، من أجل بعض i.

■ لنفترض، على العكس من ذلك، أن $\sigma(i) \geqslant i$ من أجل كل i. إذن، $\sigma(n) = n$ ضرورةً. ولكن، $\sigma(n-1) = n-1$ بالضرورة أيضاً [لأن $\sigma(n-1) = n$ مستبعدة بسبب التقابل واحد ـ لواحد]. نستمر وفق هذه المحاجة، لنستنتج أن $\sigma(i) = i$، من أجل كل i. وبذلك $\sigma = \varepsilon - a$ وهو تناقض.

72.5 أثبت أنه، من أجل مصفوفة مثلثية عليا أو سفلية $A = (a_{ij})$، $|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$، هو جداء عناصر A القطرية [تذكر أن المصفوفة المثلثية هي شكل خاص لمصفوفة مثلثية عليا].

■ لنفترض A مصفوفة مثلثية علوية، إذن $a_{ij} = 0$ من أجل كل $j<i$. ليكن σ أي تبديل، مختلف عن التبديل المتطابق ε من المسألة 71.5، يوجد عدد i بحيث أن $\sigma(i) < i$، بحيث أن

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

من أجل كل تبديل، باستثناء ε. وبالتالي، $|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

المسائل 73.5-75.5 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

73.5 إحسب det A.

■ بما أن A تمتلك صفاً صفرياً، إذن $\det A = 0$ بواسطة المسألة 69.5.

74.5 إحسب det B.

■ بما أن العمودين الثاني والرابع، في B، متساويان؛ إذن $\det B = 0$ باستخدام المسألة 70.5.

75.5 إحسب det C.

■ بما أن C مثلثية، إذن $\det C = -120$ وهو جداء المداخل القطرية.

المبرهنة 1.5 لنفترض حصولنا على B من المصفوفة المربعة A، بواسطة عملية صفية أولية. (i) إذا تم تبادل صفين في A، إذن $|B| = -|A|$. (ii) إذا ضرب أحد صفوف A في سلَمي k، إذن $|B| = k|A|$. (iii) إذا أضيف مضاعف صف إلى صف آخر، إذن $|B| = |A|$.

76.5 اثبت المبرهنة 1.5.

■ تم إثبات الجزئين (i) و (ii) في المسألتين 67.5 و 68.5. نثبت الآن (iii). لنفترض أننا أضفنا الصف k بعد ضربه في c إلى الصف j في A. نستخدم الرمز العلامة ︵ للدلالة على الموضع j في حدٍّ للمحددة، لدينا

$$|B| = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots \widehat{(ca_{ki_k} + a_{ji_j})} \cdots a_{ni_n}$$

$$= c \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots \widehat{a_{ki_k}} \cdots a_{ni_n} + \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots \widehat{a_{ji_j}} \cdots a_{ni_n}$$

المجموع الأول هو محددة مصفوفة يكون صفاها k و j متطابقين؛ وبالتالي، ومن المسألة 70.5، يكون المجموع صفرياً. أما المجموع الثاني فهو محددة A.

77.5 لتكن B مصفوفة مكافئة صفياً لمصفوفة مربعة A. بين أن $|B| = 0$ إذا وفقط إذا $|A| = 0$.

■ باستخدام المبرهنة 1.5، نجد أن تأثير عملية صفية أولية هو تغيير إشارة المحددة، أو ضربها في عدد سلَمي غير صفري. وبذلك، تكون $|B| = 0$ إذا وفقط إذا $|A| = 0$.

78.5 عرف مصفوفة «شاذة» و «غير ـ شاذة».

■ تكون مصفوفة مربعة شاذة إذا $\det A = 0$، وغير شاذة إذا $\det A \neq 0$.

المبرهنة 2.5 القضايا التالية، من أجل مصفوفة مربعة A، تكون متكافئة: (i) A عكوسة (قلوبة)، (ii) A غير شاذة؛ (iii) يكون لـ $AX = 0$ حلّ واحد فقط.

79.5 اثبت المبرهنة 2.5.

■ يكون الإثبات باستخدام الخوارزمية الجاوسية. إذا كانت A عكوسة، فهي مكافئة صفياً لـ I [$\det I = 1 \neq 0$]؛ وبالتالي، $\det A \neq 0$، وتكون A غير شاذة. إذا لم تكن A عكوسة، فهي مكافئة صفياً لمصفوفة ذات صف صفري؛ وبالتالي، $\det A = 0$، وتكون A شاذة. وبذلك، تكون (i) و (ii) متكافئتين.
بالمثل، إذا كان لـ $AX = 0$ حلّ وحيد $(X = 0)$، فيجب أن تكون A مكافئة لمصفوفة مثلثية، وتكون بالتالي غير شاذة [المسألة 72.5]، وبذلك تكون [باستخدام ما سبق] عكوسة. وبالعكس، إذا كانت A عكوسة، بمعكوس A^{-1}، إذن

$$AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

وبذلك تكون (iii) و (i) متكافئتين.
المسائل 80.5-82.5 لإثبات:
توطئة 1: من أجل أي مصفوفة أولية E [مسألة 108.4]، يكون لدينا $|EA| = |E||A|$.

80.5 اثبت أن $|E_1A| = |E_1||A|$، حيث E_1 المصفوفة الأولية المقابلة للعملية الصفية الأولية e_1 التي تبادل صفين.

■ لدينا من المبرهنة 1.5 (i)، أن $|e_1(A)| = -|A|$. كما أن $|E_1| = |e_1(I)| = -|I| = -1$. وبالتالي، $|E_1A| = |e_1(A)| = -|A| = |E_1||A|$.

81.5 أثبت أن $|E_2A| = |E_2||A|$، حيث E_2 تقابل العملية الصفية e_2 التي تضرب صفاً في سلّمي غير - صفري k.

■ لدينا، من المبرهنة 1.5 (ii)، $|e_2(A)| = k|A|$. لدينا كذلك $|E_2| = |e_2(I)| = k|I| = k$. وبالتالي، $|E_2A| = |e_2(A)| = k|A| = |E_2||A|$.

82.5 اثبت أن $|E_3A| = |E_3||A|$، حيث E_3 تقابل العملية الصفية الأولية e_3 والتي تضيف ضرب صف بصف آخر.

المبرهنة 3.5: لتكن A و B مصفوفتين مربعتين -n. إذن، $\det AB = (\det A)(\det B)$.

■ من مبرهنة 1.5 (iii) $|e_3(A)| = |A|$. لدينا $E_3 = |e_3(I)| = |I| = 1$.
إذن

$$|E_3A| = |e_3(a)| = |A| = |E_3||A|$$

83.5 اثبت المبرهنة 5.3.

■ إذا كانت A شاذة، إذن AB شاذة أيضاً [بواسطة المسألة 124.4 والمبرهنة 2.5]، وبذلك، $|AB| = 0 = |A||B|$. لدينا، من جهة أخرى، أنه إذا كانت A غير شاذة، إذن $A = E_p \ldots E_2E_1$، [أنظر المبرهنة 3.4]، وهو جداء مصفوفات أولية. وبذلك، من التوطئة 1، لدينا

$$|A| = |E_p \cdots E_2E_1I| = |E_p| \cdots |E_2||E_1||I| = |E_p| \cdots |E_2||E_1|$$

ومنها

$$|AB| = |E_p \cdots E_2E_1B| = |E_p| \cdots |E_2||E_1|E_1||B| = |A||B|.$$

84.5 حقق المبرهنة 3.5 من أجل المصفوفتين في المسألتين 34.5 و 35.5.

■ كنا حسبنا $\det A = 24$ و $\det B = -5$. لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 17 & 13 & -17 \\ 18 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

نستخدم المبرهنة 1.5 (iii)، فنجد أن

$$\det AB = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 17 & 13 & -17 \\ 18 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 \\ 17 & 30 & 0 \\ 18 & 21 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 10 \\ 17 & 30 & 0 \\ 0 & 21 & -41 \end{vmatrix}$$

$$= 3(30)(-41) + 10(17)(21) = -3690 + 3570 = -120$$

وبالتالي، $-120 = (24)(-5)$.

85.5 إذا كانت P غير - شاذة، بيّن أن $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

■ $P^{-1}P = I$. وبالتالي، $|P^{-1}||P| = |P^{-1}P| = |I| = 1$، وبالتالي $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

86.5 نفترض أن B «مشابهة» لـ A؛ أي، نفترض أنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن $B = P^{-1}AP$. بيّن أن $|B| = |A|$.

■ باستخدام المبرهنة 3.5 والمسألة 85.5، نجد $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A||P^{-1}||P| = |A|$. [رغم أنه ليس من الضروري أن تكون المصفوفتان P^{-1} و A تبديليتين، إلا أن محدديتهما تتبادلان لكونهما عددين سلميين.]

87.5 إذا كانت A متعامدة، بيّن أن $|A| = \pm 1$.

■ لدينا من التعريف $AA^T = I$ والمسألة 56.5، أن $|AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 = |I| = 1$؛ وبالتالي $|A| = \pm 1$.

88.5 لتكن $D_k = kI$ مصفوفة سلمية مربعة -n. بيّن أن $|D_k| = k^n$.

■ المسألة 72.5 تعطينا $|D_k| = k.k.k....k = k^n$.

89.5 إذا كانت A مصفوفة مربعة -n، بين أن $|kA| = k^n|A|$.

■ من المسألة 88.5، $|kA| = |kIA| = |kI||A| = k^n|A|$.

6.5 حساب قيم المحددات؛ مفكوك لابلاس

90.5 عرّف «صغيرات» مصفوفة مربعة.

■ لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة -n. ولتكن M_{ij} المصفوفة الجزئية في A المربعة ـ $(n-1)$ التي يتحصل عليها بشطب الصف i والعمود j في A. تسمى المحددة $|M_{ij}|$، عندئذ، الصغير ـ ij لـ A.

91.5 عرّف «متعاملات» مصفوفة مربعة.

■ لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة. إن المتعامل -ij لـ A (أو متعامل a_{ij})، ويرمز له بـ A_{ij}. هو الصغير «المؤشّر»:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

لاحظ أن إشارة الحدّ $(-1)^{i+j}$ تتناوب على النمط الشطرنجي، مع علامات + على القطر الرئيسي:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

المسائل 92.5-99.5 تتعامل مع المصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

92.5 أوجد M_{21} والصغير $|M_{21}|$ في A.

■ اشطب الصف الثاني والعمود الأول في A:

$$M_{21} = \left(\begin{array}{|c|cc} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 1 \\ \hline \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{وبذلك} \quad |M_{21}| = 3-36 = -33$$

93.5 احسب المتعامل A_{21}.

■ نضرب الصغير $|M_{21}|$ في الإشارة $(-1)^{2+1} = -1$؛ أي أن $A_{21} = (-1)(-33) = 33$.

94.5 إحسب الصغير $|M_{22}|$ لـ A.

■ أشطب الصف الثاني والعمود الثاني من A، ثم إحسب المحددة:

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{3} & 4 \\ \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} \\ 8 & \boxed{9} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 2-32 = -30$$

95.5 أوجد المتعامل A_{22}.

■ إضرب الصغير في الإشارة المناسبة: $A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = (+1)(-30) = -30$.

96.5 إحسب الصغير $|M_{23}|$ في A.

$$|M_{23}|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=18-24=-6$$

97.5 أوجد المتعامل A_{23}.

■

$$A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=(-1)(-6)=6$$

98.5 إحسب متعامل 7 في B، أي إحسب B_{23}.

■

$$B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=-(0-9-32-0-12-8)=-(-61)=61$$

99.5 أوجد متعامل 2 في العمود الأخير لـ B؛ أي B_{44}.

■

$$B_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$=-48+28+0-48-0-30=-98$$

المبرهنة 4.5: (مبرهنة مفكوك لابلاس): إن محددة مصفوفة مربعة -n $A=(a_{ij})$ يساوي مجموع الجداءات التي يتحصل عليها بضرب عناصر أي صف (عمود) في متعاملاتها المقابلة:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{و} \qquad |A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

100.5 إثبت المبرهنة 4.5.

■ كل حدٍّ في $|A|$ [أنظر (1) في المسألة 62.5] يحتوي مدخلاً واحداً وواحداً فقط في الصف i لـ A، أي $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$، وبالتالي، نستطيع كتابة $|A|$ في الشكل

$$|A|=a_{i1}A^*_{i1}+a_{i2}A^*_{i2}+\cdots+a_{in}A^*_{in}$$

حيث A^*_{ij} مجموع الحدود التي لا تحتوي مداخل من الصف i في A. وبذلك، سوف تكون المبرهنة مثبتة إذا استطعنا تبيان أن

$$A^*_{ij}=A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

ننظر أولاً في الحالة $j=n$، $i=n$. إذن، مجموع الحدود في $|A|$ التي تحتوي a_{nn} يكون

$$a_{nn}A^*_{nn}=a_{nn}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}$$

حيث نجمع فوق كل التباديل $\sigma \in S_n$ التي تحقق $\sigma(n)=n$. ولكن، هذا يكافيء الجمع فوق كل تباديل $\{1,\ldots,n-1\}$. [لدينا، من المسألة 51.5، $\operatorname{sgn}\sigma(1)\ldots\sigma(n-1)n=\operatorname{sgn}\sigma(1)\ldots\sigma(n-1)$]. وبالتالي، $A^*_{nn}=|M_{nn}|=(-1)^{n+n}|M_{nn}|$.

ننظر الآن في أي i و j. نبادل بين الصف i وكل صف يليه حتى يصبح الأخير، ونبادل بين العمود j وكل عمود يليه حتى يصبح الأخير. لاحظ أن المحددة $|M_{ij}|$ لا تتأثر لأن المواضع النسبية للصفوف والأعمدة الأخرى لا تتأثر بهذه المبادلات. ولكن، إشارة $|A|$ وإشارة A^*_{ij} تغيرت عدد $(n-i)$ و $(n-j)$ من المرات. وبالتالي،

$$A^*_{ij}=(-1)^{n-i+n-j}|M_{ij}|=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

101.5 لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة n- غير صفرية، حيث $n>$. أعط خوارزمية تختزل محددة A إلى محددة مرتبتها $(n-1)$.

■ **خطوة 1:** إختر عنصراً $a_{ij} = 1$، وإذ لم تجد فاختر $a_{ij} \neq 0$.

خطوة 2: باستخدام a_{ij} كمرتكز، طبق عمليات صفية [عمودية] أولية لوضع أصفار في كل المواضع الأخرى من العمود j [الصف i].

خطوة 3: فك المحددة وفق متعاملات العمود j [الصف i]. إذا تضمنت الخطوة 2 ضرب صف [أو عمود] في عدد سلمي، فإن الجواب النهائي يجب أن يعدَّل وفق المبرهنة 1.5 (ii).

102.5 احسب محددة المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

■ استخدم $a_{23} = 1$ كمرتكز لوضع أصفار في المداخل الأخرى للعمود الثالث؛ أي طبق العمليات $R_1 \to -2R_2 + R_1$، $R_3 \to 3R_2 + R_3$، $R_4 \to R_2 + R_4$. من المبرهنة 1.5 (iii)، لا تتغير قيمة المحددة نتيجة لهذه العمليات:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

الآن، نفك وفق العمود الثالث، ويمكننا إهمال الحدود التي تحتوي أصفاراً. إذن

$$|A|=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-(4-18+5-30-3+4)=-(-38)=38$$

103.5 إحسب قيمة محددة

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

■ إستخدم $a_{31} = 1$ كمرتكز، وطبق العمليات الصفية $R_1 \to -2R_3 + R_1$، $R_2 \to 2R_3 + R_2$ و $R_4 \to R_3 + R_4$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=+\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=10+3-36+36-2-15=-4$$

104.5 إحسب قيمة محددة

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

■ استخدم $b_{21} = 1$ كمرتكز، وضع أصفاراً في المداخل الأخرى للصف الثاني بواسطة العمليات العمودية $C_2 \to 2C_1 + C_2$، $C_3 \to 2C_1 + C_3$ و $C_4 \to -3C_1 + C_4$. إذن

$$|B|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2+2(3) & -5+2(3) & 4-3(3) \\ 1 & -2+2(1) & -2+2(1) & 3-3(1) \\ -2 & 4+2(-2) & 7+2(-2) & -3-3(-2) \\ 2 & -3+2(2) & -5+2(2) & 8-3(2) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-(24+3+0+15+12-0)=-54$$

المسائل 107.5-105.5 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

105.5 إحسب det A.

■ استخدم $a_{21}=1$ كمرتكز، وطبق $C_3 \to 2C_1 + C_3$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=-(28+24-24+63+32+8)=-131$$

106.5 إحسب det B.

■ استخدم $b_{12}=1$ كمرتكز، وطبق $R_3 \to R_1 + R_3$ و $R_4 \to -2R_1 + R_4$:

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}=63+10-42+28-105-9=-55$$

[لاحظ أننا استخرجنا -1 كعامل مشترك من الصف الثالث، بحيث تتغير إشارة الناقص أمام المحددة إلى إشارة زائد].

107.5 إحسب det C.

■ نختزل |C| أولا إلى محددة من المرتبة الرابعة، ثم إلى محددة من المرتبة الثالثة. استخدم $c_{22}=1$ كمرتكز ثم طبق $R_1 \to -2R_2 + R_1$ ، $R_3 \to -R_2 + R_3$ ، و $R_5 \to R_2 + R_5$:

$$|C|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=21+20+50+15+10-140=-24$$

108.5 إحسب محددة $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

■ أولاً، نضرب الصف الأول في 6 والصف الثاني في 4، إذن

$$6\cdot 4|A|=24|A|=\begin{vmatrix}3 & -6 & -2\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=6+24+24+4-48+18=28$$

وبالتالي، $|A| = 28/24 = 7/6$ ، [لاحظ أن عمليتي الضرب الأصليتين تخلصتا من الكسور، وبذلك أصبح الحساب سهلا.]

109.5 إحسب محددة

$$A=\begin{pmatrix}t+3 & -1 & 1\\ 5 & t-3 & 1\\ 6 & -6 & t+4\end{pmatrix}$$

■ أضف العمود الثاني إلى العمود الأول، ثم أضف العمود الثالث إلى العمود الثاني، للحصول على صفرين:

$$|A|=\begin{vmatrix}t+2 & 0 & 1\\ t+2 & t-2 & 1\\ 0 & t-2 & t+4\end{vmatrix}$$

إستخرج الآن العامل المشترك $t+2$ من العمود الأول، والعامل المشترك $t-2$ من العمود الثاني، نتحصل على

$$|A|=(t+2)(t-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & t+4\end{vmatrix}$$

أخيراً، إطرح العمود الأول من العمود الثالث، لنحصل على:

$$|A|=(t+2)(t-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & t+4\end{vmatrix}=(t+2)(t-2)(t+4)$$

110.5 صف خوارزمية الحذف الجاوس من أجل حساب محددة مصفوفة مربعة -n $A=(a_{ij})$.

■ تستخدم الخوارزمية الحذف الجاوس لتحويل A إلى مصفوفة مثلثية عليا [تكون محددتها جداء مداخلتها القطرية: المسألة 72.5]. بما أن الخوارزمية تتضمن تبادل صفوف، وهذا يغير إشارات المحددة، فلا بد من متابعة مثل هذه التغيرات باستخدام متغير ما، مثلاً SIGN. كما أن الخوارزمية نستخدم «التمركز»؛ أي، استخدام العنصر ذي القيمة المطلقة الأكبر كمرتكز. تكون الخوارزمية كما يلي:

خطوة 1: ضع $SIGN = 0$، [ينشىء هذا المتغير SIGN].

خطوة 2: أوجد في العمود الأول، المدخل a_{i1}، الذي له القيمة المطلقة الأكبر. (أ) إذا $a_{i1}=0$، ضع $\det A = 0$ ثم أخرج/ Exit. (ب) إذا $i \neq 1$، بادل بين الصف i والصف الأول، ثم ضع $SIGN = SIGN + 1$.

خطوة 3: استخدم a_{11} كمرتكز، وطبق عمليات صفية أولية من الشكل $R_p \to kR_q + R_p$ لوضع أصفار تحت a_{11}.

خطوة 4: كرر الخطوتين 2 و 3 على المصفوفة الجزئية المتحصل عليها بشطب الصف الأول والعمود الأول.

خطوة 5: واصل الأسلوب السابق حتى تصبح A مصفوفة مثلثية عليا.

خطوة 6: ضع $\det A = (-1)^{SIGN}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$، وأخرج/ EXIT.

لاحظ أن العملية $R_p \to kR_p$، المسموح بها في الخوارزمية الجاوسية من أجل منظومة معادلات خطية، مستبعدة هنا، لأنها تغير قيمة المحددة.

111.5 إحسب محددة

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 6\\ -2 & -3 & 1\\ 5 & 10 & 15\end{pmatrix}$$

باستخدام ـ خوارزمية الحذف الجاوسي في المسألة 110.5

■
$$A \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 17/2 \end{pmatrix}$$

تكون A الآن في شكل مصفوفة مثلثية [عليا] ولدينا SIGN = 2، لأن هناك تبديلين للصفوف. وبالتالي، $|A| = (-1)^{SIGN}(5)(2)(17/2) = 85$.

112.5 لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة n×n، ولتكن B المصفوفة المتحصل عليها من A بإحلال العمود المتجه ـ الصفي $(b_{i1} \ldots b_{in})$ محل الصف i في A. بيّن أن

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} A_{ij}$$

■ لتكن $B = (b_{ij})$. نجد، من المبرهنة 4.5، أن

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{ij}$$

ولكن B_{ij} لا تعتمد على الصف i في B، إذن $B_{ij} = A_{ij}$ من أجل $j = 1, \ldots, n$.

113.5 استخدم المسألة 112.5 لإثبات «مبرهنة مفكوك لابلاس المعمم»:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} |A| \qquad (1)$$

■ إذا $i = k$، تكون (1) هي المبرهنة 4.5. إذا $i \neq k$، إختر $(b_{i1}, \ldots, b_{in}) = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ في المسألة 112.5، وبذلك

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij}$$

ولكن $|B| = 0$، لأن B لها صفان متطابقان؛ وبذلك تتحقق (1) أيضاً [بعد تبادل i و k الاختياريين موقعيهما].

نطبق (1) على A^T فنحصل على نتيجة مماثلة بالنسبة «للأعمدة»:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} |A| \qquad (2)$$

7.5 القرين الكلاسيكي

114.5 عرّف «القرين الكلاسيكي» لمصفوفة مربعة A.

■ يعرّف القرين الكلاسيكي [ويطلق عليه تقليدياً «القرين»] لـ A، ويرمز له بواسطة adj A، بأنه منقول مصفوفة متعاملات A.

115.5 أوجد adj A من أجل المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

■ نحسب أولاً المتعاملات A_{ij} التسعة لـ A:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -57 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 51 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 33 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -30 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

ثم ناخذ منقول مصفوفة المتعاملات أعلاه:

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix}-57 & 33 & -3\\ 51 & -30 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

116.5 أوجد adj A من أجل المصفوفة المربعة 2- الإختيارية $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

■ $$\text{adj } A=\begin{pmatrix}+|d| & -|c|\\ -|b| & +|a|\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

117.5 بيّن أن $\text{adj(adj } A) = A$ من أجل المصفوفة 116.5.

■ $$\text{adj(adj } A)=\text{adj}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+|a| & -|-c|\\ -|-b| & +|d|\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A$$

المبرهنة 5.5: لدينا، من أجل أي مصفوفة مربعة A:

$$A\,(\text{adj } A)=(\text{adj } A)\,A=\text{diag}\,(|A|,|A|,\ldots,|A|)=|A|\,I$$

118.5 اثبت المبرهنة 5.5.

■ ببساطة، نكتب (1) و (2) في المسألة 113.5 في شكل مصفوفي.

119.5 بافتراض أن $|A| \neq 0$، بين أن $A^{-1} = (1/|A|)(\text{adj } A)$.

■ لدينا، من المبرهنة 5.5 عندما $|A| \neq 0$،

$$A\,\frac{1}{|A|}\,(\text{adj } A)=\frac{1}{|A|}\,(\text{adj } A)\,A=I$$

وبالتالي، وتعريفاً، يكون لدينا $A^{-1} = (1/|A|)(\text{adj } A)$.

في المسائل 120.5-123.5، نكون $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

120.5 إحسب det A.

■ $|A| = 21 + 8 + 30 - 9 - 20 - 28 = 2$.

121.5 أوجد adj A.

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & -10 & 7\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -10 & 4 & 2\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

122.5 تحقق من أن $A\,(\text{adj } A) = |A|\,I$.

$$A\,(\text{adj } A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -10 & 4 & 2\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=|A|\,I$$

123.5 استخدم adj A لحساب A^{-1}.

■ بما أن $|A| \neq 0$ ،

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -10 & 4 & 2\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -5 & 2 & 1\\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

في المسائل 124.5-127.7 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

124.5 أوجد det A.

■ $|A| = -40+6+0-16+4+0=-46$.

125.5 أوجد adj A.

■ نحسب أولاً المتعاملات A_{ij} التسعة لـ A:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-18 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=\ 2 \qquad A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\ 4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11 \qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=\ 14 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\ 5$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-8$$

إذن، adj A هو منقول مصفوفة المتعاملات:

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix}$$

126.5 تحقق أن $A(\text{adj } A) = |A|I$.

■ $$A(\text{adj } A)=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-46 & 0 & 0\\ 0 & -46 & 0\\ 0 & 0 & -46\end{pmatrix}=-46\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-46I=|A|\,I$$

127.5 استخدم adj A لحساب A^{-1}.

■ بما أن $|A| \neq 0$ ،

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)=\begin{pmatrix}-18/-46 & -111/-46 & -10/-46\\ 2/-46 & 14/-46 & -4/-46\\ 4/-46 & 5/-46 & -8/-46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/23 & 11/46 & 5/23\\ -1/23 & -7/23 & 2/23\\ -2/23 & -5/46 & 4/23\end{pmatrix}$$

المسائل 128.5-130.5، $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

128.5 احسب $|B|$.

■ $|B|=27+20+16-15-32-18=-2$.

129.5 أوجد adj B.

■ $$\text{adj } B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 8\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

130.5 أوجد B^{-1}، باستخدام adj B.

■ لدينا $|B| \neq 0$،

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\text{adj } B)=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & 1/2 & -1/2\\ -1 & -2 & 1\\ -1/2 & 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

131.5 اثبت أن مصفوفة مربعة تكون شاذة إذا وفقط إذا كان قرينها الكلاسيكي شاذاً.

■ إذا كانت A غير شاذة، إذن $|A|\neq 0$، المبرهنة 5.5 تبين أن معكوس adj A هو $|A|^{-1}A$ ؛ وبالتالي، تكون adj A غير شاذة هي أيضاً.

من جهة أخرى، إذا كانت A شاذة ولكنها غير صفرية، فإن المبرهنة 5.5 تعطينا $A\text{ adj }A = \mathbf{0}$، وهذا يقتضي أن adj A غير عكوسة، وتكون بالتالي شاذة. (إذا كان معكوس B موجوداً، إذن $A = A[(\text{adj }A)B] = \mathbf{0}B = \mathbf{0}$). أخيراً، إذا $A=0$ [شاذة]، إذن $\text{adj }A = \mathbf{0}$ [شاذة].

132.5 لتكن A مصفوفة مربعة -n $(n \geqslant 2)$. بين أن

$$|\text{adj } A|=|A|^{n-1} \tag{1}$$

■ نجد، من المبرهنة 5.5، أن $A\text{ adj }A = |A|I$، وبالتالي $|A||\text{adj }A| = |A|^n$. إذا $|A| \neq 0$، فإن الاختصار يعطينا (1). إذا $|\text{adj }A| = 0 = |A|$ [المسألة 131.5]، إذن تتحقق (1) بديهياً.

133.5 لتكن A مصفوفة مربعة -n $(n\geqslant 2)$ وغير شاذة. بيّن أن

$$\text{adj}(\text{adj } A)=|A|^{n-2} A \tag{1}$$

■ نجد، من المبرهنة 5.5 والمسألة 132.5، أن $(\text{adj } A)[\text{adj}(\text{adj } A)]=|A|^{n-1} I$، فيعطينا الضرب في A

$$|A|[\text{adj}(\text{adj } A)]=|A|^{n-1} A$$

الآن، نضرب الطرفين في $|A|^{-1}$ فنحصل على (1).

134.5 لنفرض أن A مصفوفة مثلثية علوية [سفلية]. بيّن أن adj A مصفوفة علوية [سفلية].

■ لتكن $A = (a_{ij})$ و $\text{adj }A = (b_{ij})$. إذا كانت A مثلثية علوية، فإن المصفوفة الجزئية M_{ij} في A تكون، من أجل $i<j$ مثلثية علوية أيضاً، ويكون لـ M_{ij} صفر أو أكثر على قطرها. وبالتالي، $|M_{ij}| = 0$. إذن، ومن أجل $i < j$، يكون لدينا $b_{ji} = A_{ij} = |M_{ij}| = 0$، وبذلك تكون adj A مثلثية علوية.

135.5 إذا كانت A قطرية، بيّن أن adj A تكون قطرية.

■ إذا كانت A قطرية، فهي مثلثية علوية وسفلية معاً. وبالتالي، تكون adj A مثلثية علوية وسفلية معاً، وبذلك تكون adj A قطرية.

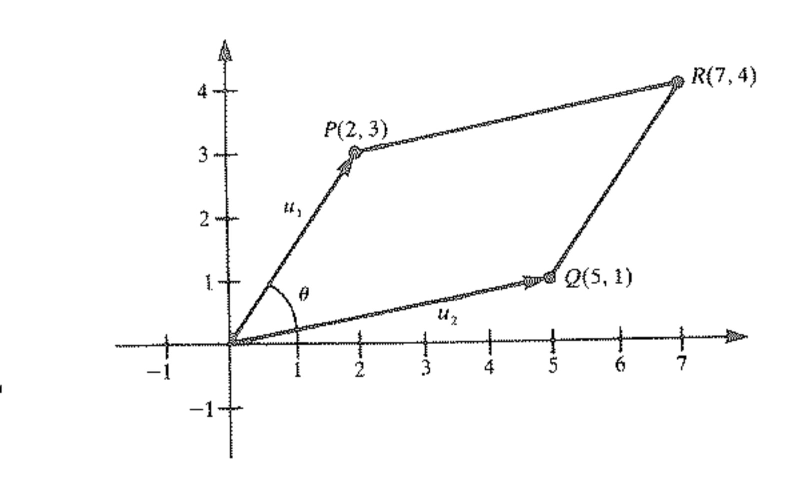
8.5 الحجم كمحددة

136.5 كيف ترتبط المحددات بالمساحات والحجوم؟

■ لتكن $u_1,u_2,\ldots,u_n$ متجهات (سهام) في $\mathbf{R}^n$. وليكن $\mathcal{S}$ متوازي السطوح المكون بواسطة هذه المتجهات وليكن A المصفوفة التي صفوفها $u_1,u_2,\ldots,u_n$. إذن، يكون الحجم $\mathcal{S}$ (أو: المساحة $\mathcal{S}$، عندما $n = 2$)، والذي نرمز له بـ $V(\mathcal{S})$، مساوٍ للقيمة المطلقة لـ det A.

137.5 ليكن $u_1 = (2,3)$ و $u_2 = (5,1)$ متجهين في $\mathbf{R}^2$. ارسم متوازي الأضلاع $\mathcal{S}$ المحدد بهذين المتجهين (السهمين).

■ أنظر شكل 5-2.



شكل 5-2

138.5 تحقق من نتيجة المسألة 136.5 من أجل متوازي أضلاع المسألة 137.5.

■ لدينا، من أجل $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}$

$AA^T=\begin{pmatrix}u_1\cdot u_1 & u_1\cdot u_2\\ u_2\cdot u_1 & u_2\cdot u_2\end{pmatrix}$ وبالتالي $(\det A)^2=(u_1\cdot u_1)(u_2\cdot u_2)-(u_1\cdot u_2)^2$

ولكننا نحصل، من المسألة 177.1 [الصالحة من أجل الفضاء الجزئي $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^3$]، على

$$(u_1\cdot u_1)(u_2\cdot u_2)-(u_1\cdot u_2)^2=\|u_1\times u_2\|^2=(\|u_1\|\,\|u_2\|\sin\theta)^2=[V(\mathscr{S})]^2$$

إذن، $V(\mathscr{S})=\sqrt{(\det A)^2}=|\det A|$.

139.5 أوجد $V(\mathscr{S})$ من أجل متوازي السطوح $\mathscr{S}$ في $\mathbf{R}^3$، والمحدد بواسطة المتجهات $u_1=(2,5,2)$، $u_2=(4,2,3)$، و $u_3=(1,1,4)$ في $\mathbf{R}^3$.

■ إحسب قيمة محددة المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

[والتي صفوفها المتجهات u_1، u_2، u_3]:

$|A|=16+15+8-4-6-80=-51$ وبالتالي $V(\mathscr{S})=51$

140.5 ليكن u_1 و u_2 متجهين [سهمين] في $\mathbf{R}^2$، ولتكن A المصفوفة التي صفاها u_1 و u_2. أعط شرطا هندسياً يحدد ما إذا كانت det A موجبة، أو صفرية، أو سالبة.

■ إذا كان أصغر دوران، الذي ينقل u_1 إلى u_2، ضد عقارب الساعة [في اتجاه حركة عقارب الساعة]، فإن det A تكون موجبة [سالبة]. إذا كان لـ u_1 نفس الاتجاه أو الاتجاه المضاد كما u_2، فإن det A تساوي صفراً.

141.5 لتكن u_1، u_2، u_3 متجهات [سهام] في $\mathbf{R}^3$. ولتكن A المصفوفة ذات الصفوف u_1، u_2، u_3. أعط شرطاً هندسياً يحدد عما إذا كانت det A موجبة، أو صفرية، أو سالبة.

■ تكون det A موجبة أو سالبة وفقاً لكون u_1، u_2، u_3 تكون منظومة إحداثية يمنى أو يسرى. إذا وقعت المتجهات الثلاثة في مستوٍ، فإن det A تساوي صفراً.

142.5 بيّن أن المتجهات $u_1=(1,2,4)$، $u_2=(2,1,-3)$، و $u_3=(5,7,9)$ تقع في مستوٍ واحد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 30 + 56 - 20 + 21 - 36 = 0$$ ■

[لاحظ أيضاً أن $u_3 = 3u_1 + u_2$].

143.5 أوجد الحجم $V(\mathscr{S})$ لمتوازي السطوح $\mathscr{S}$ في R^4، والمحدد بواسطة $u_1 = (2,-1,4,-3)$، $u_2 = (-1,1,0,2)$، $u_3 = (3,2,3,-1)$، $u_4 = (1,-2,2,3)$.

■ إحسب قيمة المحددة التالية

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 21 + 20 - 10 - 3 + 10 - 140 = -102$$

وبالتالي $V(\mathscr{S}) = 102$.

9.5 قاعدة كرامر. المصفوفات المركبة

المبرهنة 6.5: (قاعدة كرامر): لتكن $AX = B$ منظومة $n \times n$ من المعاملات الخطية، ذات مصفوفة معاملات $A = (a_{ij})$ غير شاذة. ولتكن A_i المصفوفة المتحصل عليها من A بإحلال المتجه العمود B محل العمود i في A. ولتكن $D \equiv |A|$ ، ولتكن $N_i \equiv |A_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,n$. إذن، يكون للمنظومة الحل الوحيد $x_i = N_i/D$ ($i = 1,2,\ldots,n$).

144.5 اثبت المبرهنة 6.5.

■ لدينا من المسألة 112.5 [في حالة الأعمدة بدل الصفوف]، $N_i = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki}$. وبالتالي

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right) b_k$$

ومن (1) في المسألة 113.5، تكون قيمة المجموع (محسوباً على j) $\delta_{ij} D$ ؛ لدينا عندئذ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} D b_k = \frac{1}{D} (D b_i) = b_i$$

ويكون هذا الحل وحيداً لأن A غير شاذة.

145.5 استخدم قاعدة كرامر لحل المنظومة

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

■ إحسب:

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \qquad N_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -4$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 18 \qquad N_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -12 \qquad N_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

إذن $x_1=N_1/D=-2$ ، $x_2=N_2/D=9$ ، $x_3=N_3/D=-6$ ، $x_4=N_4/D=1$.

146.5 استخدم قاعدة كرامر لحل المنظومة

$$\begin{aligned}2x_1+x_2+5x_3+x_4&=5\\x_1+x_2-3x_3-4x_4&=-1\\3x_1+6x_2-2x_3+x_4&=8\\2x_1+2x_2+2x_3-3x_4&=2\end{aligned}$$

■ إحسب:

$$D=\begin{vmatrix}2&1&5&1\\1&1&-3&-4\\3&6&-2&1\\2&2&2&-3\end{vmatrix}=-120 \qquad N_1=\begin{vmatrix}5&1&5&1\\-1&1&-3&-4\\8&6&-2&1\\2&2&2&-3\end{vmatrix}=-240$$

$$N_2=\begin{vmatrix}2&5&5&1\\1&-1&-3&-4\\3&8&-2&1\\2&2&2&-3\end{vmatrix}=-24 \qquad N_3=\begin{vmatrix}2&1&5&1\\1&1&-1&-4\\3&6&8&1\\2&2&2&-3\end{vmatrix}=0 \qquad N_4=\begin{vmatrix}2&1&5&5\\1&1&-3&-1\\3&6&-2&8\\2&2&2&2\end{vmatrix}=-96$$

إذن، $x_1=N_1/D=2$ ، $x_2=N_2/D=1/5$ ، $x_3=N_3/D=0$ ، $x_4=N_4/D=4/5$.

147.5 أدرس المنظومة

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=5\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=3\\4x_1+x_2+2x_3+3x_4&=7\\3x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=2\end{aligned}$$

■ بما أن

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&2&3&4\end{vmatrix}=0$$

فإنه لا يمكن استخدام قاعدة كرامر لحل المنظومة. في الحقيقة، المنظومة غير متساوية (متنافية) وليس لها حل. لرؤية ذلك، نطرح ضعف المعادلة الرابعة من مجموع المعادلات الثلاث الأولى، فنحصل على $13=0$.

148.5 لنفترض أن $M=\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة ·r، وأن $\det M=(\det A)(\det B)$.

■ نفترض أن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة ·r، وأن $B=(b_{ij})$، مصفوفة مربعة ·s، وأن $M=(m_{ij})$ مصفوفة مربعة n، حيث $n=r+s$. نجد من التعريف أن

$$\det M=\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)}\cdots m_{n\sigma(n)}$$

إذا $i>r$ و $j\leqslant r$، إذن $m_{ij}=0$. إذن، نحتاج إلى أن ننظر فقط في تلك التباديل σ بحيث أن $\sigma\{r+1,r+2,\ldots,r+s\}=\{r+1,r+2,\ldots,r+s\}$، وبالتالي $\sigma\{1,2,\ldots,r\}=\{1,2,\ldots,r\}$. لتكن $\sigma_1(k)=\sigma(k)$ من أجل $k\leqslant r$، ولتكن $\sigma_2(k)=\sigma(r+k)-r$ من أجل $k\leqslant s$. إذن

$$(\operatorname{sgn}\sigma)m_{1\sigma(1)}m_{2\sigma(2)}\cdots m_{n\sigma(n)}=(\operatorname{sgn}\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)}\cdots a_{r\sigma_1(r)}(\operatorname{sgn}\sigma_2)b_{1\sigma_2(1)}b_{2\sigma_2(2)}\cdots b_{s\sigma_2(s)}$$

وهذا يقود إلى أن $\det M=(\det A)(\det B)$.

149.5 لنفترض أن M مصفوفة مركبة مثلثية علوية [سفلية] ذات مصفوفات جزئية قطرية [مربعة]، A_1، A_2، ...، A_n. بيِّن أن $\det M = (\det A_1)(\det A_2)\ldots(\det A_n)$.

■ يكون الإثبات بالاستقراء على n، وباستخدام المسألة 148.5 من أجل الحالة $n = 2$. نكتب

$$M=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A_n \end{pmatrix}$$

نجد، بفرضية الاستقراء، أن $|B| = |A_1||A_2|..|A_{n-1}|$. وبالتالي، $|M| = |B||A_n| = |A_1||A_2|\ldots|A_{n-1}||A_n|$.

150.5 أوجد $|M|$ إذا

$$M=\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

■ لاحظ أن M مصفوفة مركبة مثلثية علوية. إحسب قيمة محددة كل مصفوفة جزئية قطرية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10+3=13 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12+20+30+25-16-18=29$$

إذن، $|M| = (13)(29) = 377$.

151.5 إحسب $\det M$، حيث

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

■ نجزىء M إلى مصفوفة مركبة مثلثية سفلية، كما يلي:

$$M=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

نحسب محددة كل مصفوفة جزئية قطرية:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15-8=7 \qquad |2|=2 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24-21=3$$

إذن، $|M| = (7)(2)(3) = 42$.

10.5 المصفوفات الجزئية، الصغيرات العامة، الصغيرات الرئيسية

152.5 لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة -n. ولتكن $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(r<n)$ مجموعة مرتبة لأدلة صفية، ولتكن $j_1, j_2, \ldots, j_r$ مجموعة مرتبة لأدلة أعمدة. عرِّف «المصفوفة الجزئية» في A المقابلة لهاتين المجموعتين الدليليتين.

■
$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_2} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$$

المصفوفة الجزئية من المرتبة r.

153.5 عرّف «صغيراً مرتبته r»، وكذلك «الصغير المؤشر» المقرون به، لمصفوفة A مربعة n-.

■ ان المحددة $|A^{j_1,j_2,\ldots,j_r}_{i_1,i_2,\ldots,i_r}|$ لمصفوفة جزئية مرتبتها r تسمى صغيرا من المرتبة r، يكون

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r}|A^{j_1,j_2,\ldots,j_r}_{i_1,i_2,\ldots,i_r}|$$

الصغير المؤشر المقابل له. لاحظ أن صغيرا من المرتبة $(n-1)$ هو صغير وفق مفهوم المسألة 90.5.

154.5 إرجع إلى المسألة 153.5. بيّن أن صغيراً مؤشراً من المرتبة $(n-1)$ هو متعامل، كما عرفناه في المسألة 91.5.

■ ليكن $|A^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}}|$ بحذف الصف i والعمود j في A. إذن، وبوضع $1+2+\ldots+n\equiv s$، يكون لدينا

$$(i+j)+(i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+j_1+j_2+\cdots+j_{n-1})=(i+i_1+\cdots+i_{n-1})+(j+j_1+\cdots+j_{n-1})=2s$$

وهذا يقتضي

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+j_1+j_2+\cdots+j_{n-1}}=(-1)^{i+j}$$

155.5 إحسب الصغير $|A^{1,4}_{3,5}|$ وصغيره المؤشر إذا كانت $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة 5-.

■ الدليلان السفليان 3 و 5 يعودان إلى صفين وA، والدليلان السفليان 1 و 4 يتعلقان بعمودين في A. وبالتالي،

$$|A^{1,4}_{3,5}|=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}=a_{31}a_{54}-a_{3451} \quad \text{و} \quad (-1)^{3+5+1+4}|A^{1,4}_{3,5}|=-|A^{1,4}_{3,5}|$$

156.5 أوجد «الصغير المتمم» لـ $|A^{1,4}_{3,5}|$ في المسألة 155.5.

■ نوجد متممة المصفوفة الجزئية $A^{1,4}_{3,5}$، في A، ثم نحسب محددتها:

$$|A^{2,3,5}_{1,2,4}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

157.5 متى تكون أدلة الصفوف هي نفسها أدلة الأعمدة في المصفوفة ـ الجزئية؟ أي عندما تكون العناصر القطرية في الصغير عناصر في قطر المصفوفة الأصلية.

■ عندما تكون أدلة صفوف وأعمدة مصفوفة جزئية متساوية، أي عندما يُتحصل على العناصر القطرية للصغير من قطر المصفوفة.

تتعلق المسائل 158.5-162.5 بالصغيرات التالية لمصفوفة مربعة 5- $A=(a_{ij})$:

$$M_1=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} \qquad M_3=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$$

158.5 هل M_1 صغير رئيس؟

■ نعم، لأن عناصره القطرية تنتمي إلى قطر A.

159.5 هل M_2 صغير رئيس؟

■ لا، لأن a_{23} تنتمي إلى قطر M_2 ولكنها لا تنتمي إلى قطر A.

160.5 هل M_3 صغير رئيس؟

■ نعم، لأن عناصره القطرية تنتمي إلى قطر A.

161.5 أوجد متمم M_1.

■ الدليلان الصفيان الغائبان هما 1 و 3، والدليلان العموديان الغائبان هما 1 و 3. وبالتالي، يكون

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

متمم M_1. [عموماً، يكون الصغير صغيراً رئيسياً إذا وفقط إذا كان متممه صغيراً رئيسياً].

162.5 أوجد متمم M_2.

■ $\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$ (ليس رئيسياً)

11.5 مسائل متنوعة

163.5 ليكن $\mathscr{A}$ جبراً لمصفوفات مربعة n- تنتمي عناصرها إلى حقل K. بين أن دالة المحددة $D: \mathscr{A} \to K$ متعددة الخطية.

■ لنفترض أن الصف i من $A \in \mathscr{A}$ يكون في الشكل $(\alpha_{i1} + \beta_{i1}, \alpha_{i2} + \beta_{i2}, \ldots, \alpha_{in} + \beta_{in})$؛ إذن

$$\det A = \sum_{S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} (\alpha_{i\sigma(i)} + \beta_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{i\sigma(1)} \cdots \alpha_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \beta_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\equiv \det A_\alpha + \det A_\beta$$

وبذلك تكون D( ) جمعية بالنسبة لأي صف. أيضاً، ومن المسألة 68.5، تكون D( ) متجانسة من المرتبة 1 في أي صف. إذن، تكون D( ) متعددة الخطية.

164.5 إحسب

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$$

■ نضرب الصف الثاني في $1 + i$ والصف الثالث في $1 + 2i$؛ إذن

$$(1+i)(1+2i)|A| = (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6+18i$$

وتكون $|A| = 6$.

165.5 إحسب

$$|B| = \begin{vmatrix} 0.921 & 0.185 & 0.476 & 0.614 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix}$$

■

$$|B| = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921 \begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0 & 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0 & 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921 \begin{vmatrix} 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384) \begin{vmatrix} 0 & -0.320 & 1 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$=0.921(-0.384)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.309 & 0.265 & 0.217 \\ 0.492 & 0.757 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384)\begin{vmatrix} 0.309 & 0.265 \\ 0.492 & 0.757 \end{vmatrix}$$

$$=0.921(-0.384)(0.104) = -0.037$$

166.5 بيّن أن

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

وذلك، بدون فك المحددة.

■ أضف العمود الثاني إلى العمود الثالث، ثم استخرج العامل المشترك من العمود الثالث؛ يقود هذا إلى:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(0) = 0$$

167.5 بيّن أن جداء الفروق $g(x_1,...,x_n)$ في المسألة 58.5 يمكن تمثيله بواسطة محددة.

■ أنظر في «محددة ڤاندرموند» لـ x_1، x_2، ...، x_{n-1}، x:

$$V_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & X_{n-1}^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

وهي حدودية من الدرجة $n-1$ في x، تكون جذورها x_1، x_2، ...، x_{n-1}؛ أيضاً، المعامل المقدم [متعامل x^{n-1}] يساوي $V_{n-2}(x_{n-1})$. وبذلك، نحصل من الجبر على:

$$V_{n-1}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})V_{n-2}(x_{n-1})$$

وبالتالي، نحصل إرتدادياً على

$$V_{n-1}(x) = [(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})][(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})]V_{n-3}(x_{n-2})$$
$$= \cdots$$
$$= [(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})][(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})]\cdots[(x_2-x_1)]$$

وينتج عن ذلك أن

$$V_{n-1}(x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j) = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$$

أو

$$g(x_1,\ldots,x_n) = (-1)^{n(n-1)/2}V_{n-1}(x_n)$$

الفصل 6
البنى الجبرية

1.6 المجموعات، الاستقراء الرياضي، المجموعات الجدائية

في المسائل التالية تكون C، R، Q، Z، N على الترتيب مجموعات الأعداد العقدية والحقيقية والقياسية والصحيحة والصحيحة الموجبة.

1.6 اذكرالمجموعات المتساوية، من بين المجموعات: $\{1,3,4\}$ ، $\{4,3,1,4\}$ ، $\{3,4,3,1\}$ ، $\{4,1,4,3\}$

■ المجموعات كلها متساوية، لأن الترتيب والتكرار لا يغيران المجموعة.

2.6 اكتب قائمة عناصر المجموعة $A = \{x:x\in N, 3<x<12\}$.

■ تتكون A من الأعداد الصحيحة الموجبة بين 3 و 12؛ وبالتالي فهي $A = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

3.6 اكتب المجموعة $B = \{x:x\in N$، و x زوجي، $x<15\}$.

■ تتكون B من الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية الأصغر من 15؛ وبالتالي، فهي $B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$.

4.6 اكتب تفصيلا عناصر المجموعة $C = \{x:x\in N, 4+x=3\}$.

■ لا يوجد عدد صحيح موجب يحقق الشرط $4+x=3$؛ وبذلك، لا تحتوي أي عنصر. بتعبير آخر، تكون $C = \varnothing$، أي المجموعة الخالية.

5.6 اثبت أن $A = \{2,3,4,5\}$ ليس مجموعة جزئية في $B = \{x:x\in N$ زوجي $x\}$.

■ يكفي أن نبين أن هناك عنصراً في A لا ينتمي إلى B. الآن، $3\in A$ وبما أن B تتكون من أعداد زوجية، فإن $3\notin B$.

المسائل 6.6-12.6 تتعلق بالمجموعات $A = \{2,3,4,5\}$، $B = \{3,5,7\}$، $C = \{1,4\}$، $D = \{3,4,6\}$.

6.6 أوجد $A\cup B$.

■ تتكون المجموعة $A\cup B$ من عناصر تنتمي إلى A أو B (أو معاً)؛ وبالتالي، فإن $A\cup B = \{2,3,4,5,7\}$.

7.6 أوجد $A\cap B$.

■ $A\cap B$ من عناصر في A و B معًا؛ وبالتالي، $A\cap B = \{3,5\}$.

8.6 أوجد $3+A$.

■ نضيف 3 إلى كل عنصر في A لنحصل على $3+A = \{5,6,7,8\}$.

9.6 أوجد $4.B$.

■ نضرب كل عنصر من عناصر B في 4، فنحصل على $4.B = \{12,20,28\}$.

10.6 أوجد $C+D$.

■ أضف كل عنصر في C إلى كل عنصر في D [مع إهمال التكرار]، فتحصل على $C+D = \{1+3,\ 1+4,\ 1+6,\ 4+3,\ 4+4,\ 4+6\} = \{4,5,7,8,10\}$.

11.6 أوجد $C+C$.

■ أضف كل عنصر في C إلى كل عنصر في المجموعة نفسها، فتحصل على $C+C = \{1+1,\ 1+4,\ 4+1,\ \{4+4\} = \{2,5,5,8\} = \{2,5,8\}$.

12.6 أوجد $D + D$.

■ أضف كل عنصر في D إلى كل عنصر في المجموعة نفسها، فتحصل على $D + D = \{3 + 3, 3 + 4, 3 + 6, 4 + 3, 4 + 4, 4 + 6, 6 + 3, 6 + 4, 6 + 6\} = \{6,7,9,8,10,12\}$.

13.6 أوجد مجموعة لا نهائية A بحيث تكون $A + A$ و A منفصلتين؛ أي أن $(A + A)\cap A = \varnothing$. [ترمز $\varnothing$ هنا إلى المجموعة الخالية].

■ لتكن $A = \{1,3,5,...\}$ = {مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الفردية}. إذن، تتكون $A + A$ من الأعداد الصحيحة الزوجية فقط.

14.6 أوجد مجموعة لا نهائية B بحيث أن $B + B = B$.

■ $B = \{0,1,2,...\}$ = {مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة}.

15.6 أوجد مجموعة منتهية C بحيث أن $C + C = C$.

■ $C = \{0\}$.

16.6 عرّف «مجموعة أجزاء المجموعة» أو «مجموعة القوة»، $\mathcal{P}(A)$، للمجموعة $A = \{a,b,c,d\}$.

■ عناصر المجموعة $\mathcal{P}(A)$ هي مجموعات A الجزئية: $\mathcal{P}(A) = \{A,\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing\}$. لاحظ أن $\mathcal{P}(A)$ $2^4 = 16$ عنصراً.

17.6 اكتب «مبدأ الاستقراء الرياضي» في شكلين متكافئين:

■ **شكل 1**: لتكن P قضية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N، أي أن $P(n)$ تكون صحيحة أو خاطئة من أجل كل n في N. لنفترض أن P لها الخاصيتين التاليتين:

(i) $P(1)$ صحيحة.

(ii) تكون $P(n + 1)$ صحيحة كلما كانت $P(n)$ صحيحة. إذن، تكون P صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب.

شكل 2: («الاستقراء التام»): لتكن P قضية معرفة على N، بحيث أن:

(i) $P(1)$ صحيحة.

(ii) تكون $P(n)$ صحيحة كلما كانت $P(k)$ صحيحة من أجل $1 \leqslant k < n$.

18.6 بيّن أن مبدأ الاستقراء التام [الشكل التام] مكافئة للتأكيد بأن كل مجموعة غير خالية من أعداد صحيحة تمتلك عنصراً أصغر [«مبدأ الترتيب الجيد» من أجل N].

■ لنفترض أن N مرتبة جيداً، وأن لدينا قضية $P(n)$ تحقق الفرضيتين (i) و (ii) لمبدأ الاستقراء. لتكن F مجموعة جزئية في N لا تتحقق عليها P. إذا كانت E غير خالية، فإن لها عنصراً أصغر q؛ لدينا، من (i)، $q \geqslant 2$. إذن، $P(1),...,P(q - 1)$ تكون صحيحة؛ وبالتالي، وبسبب (ii)، تكون $P(q)$ صحيحة. يبين هذا التناقض بأن F يجب أن تكون خالية. وبذلك، تكون P صحيحة من أجل كل عدد صحيح موجب، ويكون مبدأ الاستقرار صالحاً.

بالعكس، لنفترض أن مبدأ الاستقراء متحقق، وانه توجد مجموعة جزئية S، في N، لا يكون لها عنصر أصغر. لتكن S^* متممة S، وعرّف القضية $P(n)$: n تنتمي إلى S^*. تحقق $P(n)$ (i) و (ii) للاستقراء [إذا لم يحدث ذلك، يكون لـ S حداً أصغر]؛ وبالتالي، $S^* = N$، وهذا يعني أن S خالية. إذن تكون N مرتبة جيداً.

19.6 اثبت أن مجموع الأعداد الصحيحة الفردية الـ n الأولى يساوي n^2؛ أي، اثبت أن $P(n)$: $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

■ بما أن $1 = 1^2$، فإن $P(1)$ صحيحة. لنفترض أن $P(n)$ صحيحة. نضيف $2n + 1$ إلى طرفي $P(n)$ فنحصل على

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

وهو $P(n + 1)$، أي أن $P(n + 1)$ صحيحة عندما تكون $P(n)$ صحيحة. من مبدأ الاستقراء الرياضي، نجد أن P صحيحة من أجل كل n.

20.6 عرّف «المجموعة الجداثية» للمجموعتين A و B.

■ يتكون الجداء المجموعي لـ A و B، ويرمز له بـ $A \times B$، من كل الأزواج المرتبة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$: $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$. ويرمز لجداء مجموعة في نفسها، أي $A \times A$، بواسطة A^2.

المسائل 21.6-23.6 تتعلق بالمجموعتين $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{a,b\}$.

21.6 أوجد $A \times B$.

■ تتكون $A \times B$ من كل الأزواج المرتبة (x,y) حيث $x \in A$ و $y \in B$. وبالتالي:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

22.6 أوجد $B \times A$.

■ تتكون $B \times A$ من كل الأزواج المرتبة (y,x) حيث $y \in B$ و $x \in A$ وبالتالي،

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq A \times B$$

23.6 أوجد B^2.

■ تتكون $B^2 = B \times B$ من كل الأزواج المرتبة (x,y) حيث $x,y \in B$. وبالتالي

$$B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

24.6 إذا أعطينا $A = \{1,2\}$، $B = \{a,b,c\}$، $C = \{c,d\}$. أوجد $(A \times B) \cap (A \times C)$ و $A \times (B \cap C)$.

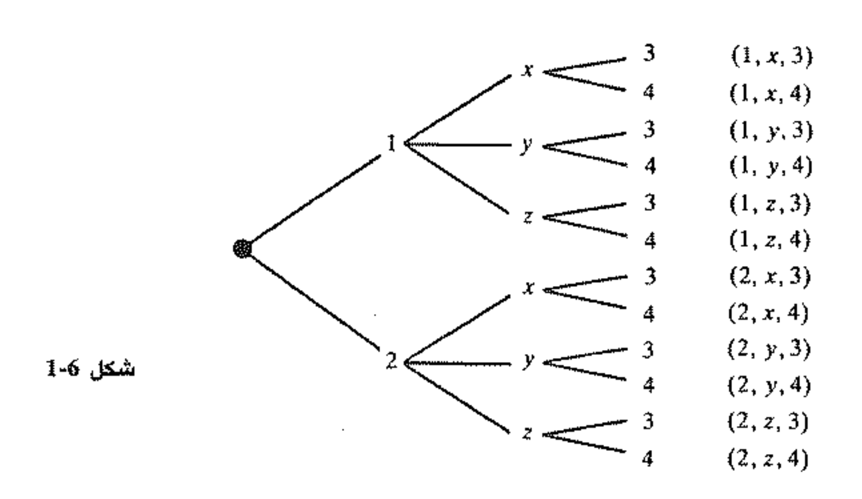
■ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$ و $A \times C = \{(1,c),(1,d),(2,c),(2,d)\}$

إذن، $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,c),(2,c)\}$ بما أن $B \cap C = \{c\}$, $A \times (B \cap C) = \{(1,c),(2,c)\}$.

لاحظ أن $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$. [هذا صحيح من أجل أي مجموعات A و B و C].

25.6 إذا أعطينا $A = \{1,2\}$، $B = \{x,y,z\}$ و $C = \{3,4\}$. أوجد $A \times B \times C$.

■ تتكون $A \times B \times C$ من كل الثلاثيات المرتبة (a,b,c)، حيث $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$. بما أن A، B، C مجموعات منتهية، فإن $A \times B \times C$ يمكن أن يكتب باستخدام «مخطط الشجرة» في شكل 6-1. أي أن العناصر في $A \times B \times C$ عددها تماماً 12 ثلاثية مرتبة، مبينة على يمين مخطط الشجرة.

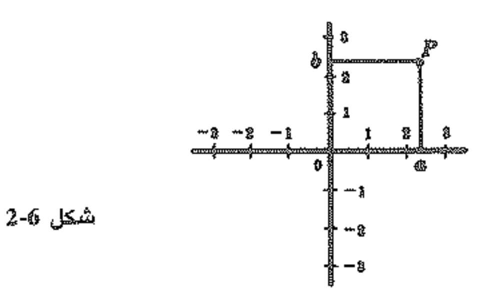


شكل 6-1

26.6 صف التمثيل الهندسي للمجموعة الجداثية $R \times R$.

■ تمثل $R \times R$ بنقط المستوى، كما في الشكل 6-2. هنا، كل نقطة P تمثل زوجا مرتباً (a,b) من الأعداد الحقيقية،

وبالعكس؛ يقطع الخط الرأسي عند P محور -x عند a، والخط الأفقي عبر P يقابل محور -y عند P. غالباً ما يسمى $\mathbb{R}^2$ بالمستوى الديكارتي.



شكل 2-6

27.6 أذكر النونيات المرتبة المتساوية في: (1,3,4)، (4,3,1,4)، (3,4,3,1)، (4,1,4,3)؟ [قارن بالمسألة 1.6].

▩ كل هذه المجموعات غير متساوية؛ فإن الترتيب والتكرار مهمان في النونيات المرتبة.

2.6 العلاقات

28.6 عرِّف «علاقة [ثنائية]».

▩ نعرِّف علاقة ثنائية، أو ثنائية فقط، من مجموعة A إلى مجموعة B بأنها مجموعة جزئية $R \subset A \times B$. إذا أعطينا $a \in A$، $b \in B$، نكتب aRb [تقرأ «a ترتبط بـ b»] إذا وفقط إذا $(a,b) \in R$.

29.6 عرِّف علاقة R على مجموعةٍ A.

▩ تكون R علاقة على A إذا كانت R علاقة من A إلى A؛ أي إذا $R \subset A \times A$.

30.6 عرِّف «معكوس/عكس» علاقة.

▩ لتكن R علاقة من A إلى B. يعرَّف معكوس R، ويرمز له بواسطة R^{-1}، بأنه العلاقة من B إلى A المتكونة من تلك الأزواج المرتبة التي إذا عكس ترتيبها أصبحت تنتمي إلى R.

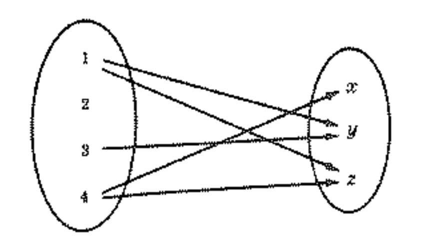
$$R^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in R\}$$

بتعبير آخر، لدينا $bR^{-1}a$ إذا وفقط إذا aRb. لاحظ أن كل علاقة تمتلك معكوساً، وليس فقط تلك العلاقات التي تعرِّف تطبيقاً واحداً ـ لواحد.

المسائل 31.6-34.6 تتعلق بالمجموعتين $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{x,y,z\}$، والعلاقة $R = \{(1,y), (1,z), (3,y), (4,x), (4,z)\}$ من A إلى B.

31.6 أرسم «مخطط السهم» للعلاقة R.

▩ اكتب عناصر A، وعناصر B، في قرصين منفصلين، ثم ارسم سهماً من $a \in B$ إلى $b \in B$، بحيث aRb. انظر شكل 3-6.



شكل 3-6

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

شكل 4-6

32.6 مثّل R بواسطة مصفوفة.

■ تظهر المصفوفة M_R للعلاقة R في شكل 6-4. لاحظ أن صفوف المصفوفة معنّونة بعناصر A، وأعمدتها بعناصر B. لاحظ أن المدخل في المصفوفة المقابل لـ $a \in A$ و $b \in B$ يكون 1 إذا aRb و 0 في غير ذلك.

33.6 حدّد «نطاق» و «مدى» R.

■ نطاق R هو مجموعة جزئية في A تتكون من العناصر الأولى للأزواج المرتبة في R، أما المدى فهو المجموعة الجزئية في B المتكونة من العناصر الثانية:

نطاق R = $\{1,3,4\}$، و مدى R = $\{x,y,z\}$

34.6 أوجد العلاقة العكسية R^{-1} لـ R.

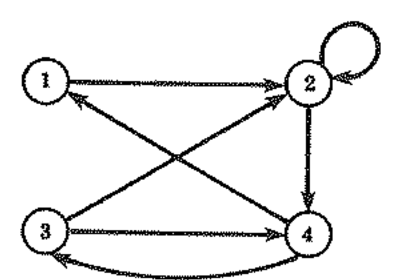
■ اعكس ترتيب الأزواج المرتبة R لتحصل على R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3), (x,4), (z,4)\}$$

[عكس الأسهم في شكل 6-3 يعطينا «مخطط السهم» لـ R^{-1}، وأخذ منقول المصفوفة في شكل 6-4 يعطينا مصفوفة R^{-1}]

35.6 لتكن $A = \{1,2,3,4\}$، ولتكن $R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$ علاقة على A. ارسم «البيان الموجّه» لـ R.

■ نكتب كل عناصر A، ثم نرسم سهما من عنصر x إلى عنصر y، حيث xRy. أنظر شكل 6-5.



شكل 6-5

$R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

تتعلق المسائل 6.36-6.39 بالمجموعة $A = \{1,2,3,4,6\}$ والعلاقة R على A المعرّفة بواسطة «x تقسم y»، وتكتب $x|y$. لاحظ أن $x|y$ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح z بحيث أن $xz = y$.]

36.6 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

■ $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\}$.

37.6 أوجد العلاقة العكسية R^{-1} لـ R، ثم صفها بالكلمات؟

■ اعكس ترتيب الأزواج المرتبة في R لتحصل على R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (6,1), (2,2), (4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4), (6,6)\}$$

يمكن وصف R^{-1} بأنها المنطوق «x مضاعف لـ y».

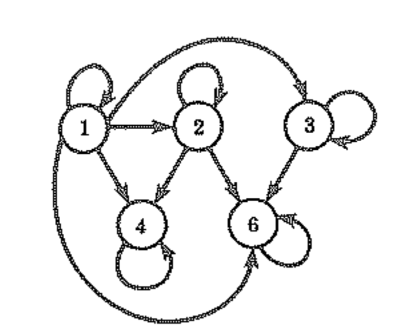
38.6 أوجد المصفوفة التمثيلية لـ R.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[نفترض أن صفوف وأعمدة M_g معنْونة بالعناصر 1، 2، 3، 4، 6 على الترتيب. من الواضح، أن ترتيباً مختلفاً لعناصر A يعطي مصفوفة مختلفة].

39.6 أوجد البيان الموجه لـ R.

■ أنظر شكل 6-6:



شكل 6-6

40.6 عرّف «علاقات التركيب».

■ لتكن A، B، C مجموعات، ولتكن R علاقة من A إلى B و S علاقة من B إلى C؛ أي أن R مجموعة جزئية في A×B و S مجموعة جزئية في B×C. إذن، تنشأ عن R و S علاقة، R°S، من A إلى C؛ تحديداً، المجموعة الجزئية في A×C المعرّفة بواسطة

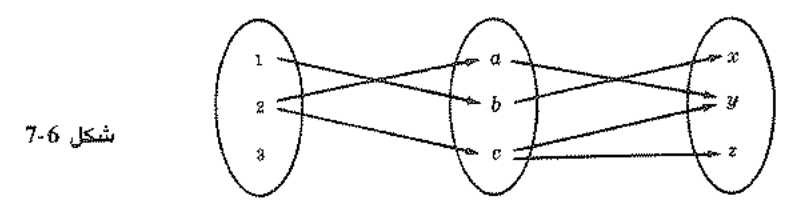
(a,c)∈R°S إذا وفقط إذا (a,b)∈R و (b,c)∈S من أجل بعض b ∈ B

العلاقة R°S تسمى «تركيب» R و S، ويرمز لها أحياناً بـ RS.

المسائل 41.6-43.6 تتعلق بالمجموعات A = {1,2,3} و B = {a,b,c}، و C = {x,y,z}، والعلاقتين R = {(1,b), (2,a), (2,c)} (من A إلى B) و S = {(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)} (من B إلى C).

41.6 أوجد التركيب R°S.

■ ارسم مخطط السهم للعلاقتين R و S كما في الشكل 7-6. لاحظ أن 1 في A مرتبطة بـ x في C بواسطة المسار 1 → b → x؛ وبالتالي (1,x) تنتمي إلى R°S. بالمثل، (2,y) و (2,z) تنتميان إلى R°S؛ إذن، R°S = {(1,x), (2,y), (2,z)}.



شكل 7-6

42.6 أوجد المصفوفات M_S، M_R، و $M_{R°S}$ للعلاقات R، S، و R°S على الترتيب.

■

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{R\circ S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

43.6 قارن المصفوفة الجداثية M_RM_S مع المصفوفة $M_{R°S}$.

■

$$M_RM_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن $M_{R°S}$ و M_RM_S لهما عناصر غير صفرية متقابلة. يظل هذا صالحاً من أجل اي ترتيب لـ A، B، C.

المبرهنة 1.6: (قانون التجميع): لتكن A، B، C، D مجموعات. لنفترض أن R علاقة من A إلى B، S علاقة من B إلى C، T علاقة من C إلى D. إذن، $(R^\circ S)^\circ T = R^\circ(S^\circ T)$.

44.6 اثبت المبرهنة 1.6.

■ نحتاج لإثبات أن كل زوج مرتب في $(R^\circ S)^\circ T$ في $R^\circ(S^\circ T)$، وبالعكس. لنفترض إذن أن (a,d) تنتمي إلى $(R^\circ S)^\circ T$. يوجد عندئذ عنصر c في C بحيث أن (a,c) ينتمي إلى $R^\circ S$ و (c,d) ينتمي إلى T. بما أن (a,c) ينتمي إلى $R^\circ S$، يوجد عنصر b في B بحيث أن (a,b) ينتمي إلى R و (b,c) ينتمي إلى S. بما أن (b,c) في S و (c,d) في T، يكون لدينا (b,d) في $S^\circ T$؛ وبما أن (a,b) في R و (b,d) في $S^\circ T$، يكون لدينا (a,d) في $(a,d) \in (R^\circ(S^\circ T))$. وبذلك، $(R^\circ S)^\circ T \subset R^\circ(S^\circ T)$، بالمثل، $R^\circ(S^\circ T) \subset (R^\circ S)^\circ T$. ينتج عن علاقتي التضمين معاً أن $(R^\circ S)^\circ T = T = R^\circ(S^\circ T)$.

المسائل 45.6-49.6 تتعلق بعلاقة R على مجموعة A.

45.6 متى تكون R «إنعكاسية»؟

■ تكون R إنعكاسية إذا aRb من أجل كل a في A.

46.6 متى تكون R «متناظرة»؟

■ تكون R متناظرة إذا كانت aRb تقتضي bRa.

47.6 متى تكون R «متخالفة تناظرية»؟

■ تكون R «متخالفة تناظر» إذا aRb و bRa تقتضي $a = b$.

48.6 متى تكون R «متعدية»؟

■ تكون R متعدية إذا كانت aRb و bRc تقتضي aRc.

49.6 انقد الحجة التالية: لتكن R متناظرة ومتعدية. إذن، aRb تقتضي bRa، وهاتان تقتضيان معاً aRa. إذن، تكون R إنعكاسية.

■ يعني الانعكاس أن aRa من أجل كل a. ولكن الحجة أعلاه تؤكد aRa فقط من أجل تلك العناصر a المرتبطة بـ b.

المسائل 50.6-53.6 تتعلق بالعلاقات الخمس التالية على المجموعة $A = \{1,2,3\}$:

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$

$S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ علاقة خالية $= \emptyset$

$T = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)\}$ علاقة شاملة $= A \times A$

50.6 أي من العلاقات الخمس انعكاسية؟

■ R ليست انعكاسية لأن $2 \in A$ ولكن $(2,2) \notin R$. T ليست انعكاسية لأن $(3,3) \notin T$ وبالمثل، $\emptyset$ ليست انعكاسية. S و $A\times A$ انعكاسيتان.

51.6 أي من العلاقات الخمس متناظرة؟

■ R ليست متناظرة لأن $(1,2) \in R$ ولكن $(2,1) \notin R$. وبالمثل T ليست متناظرة. S و $\emptyset$ و $A\times A$ علاقات متناظرة.

52.6 أي من العلاقات الخمس متعدية؟

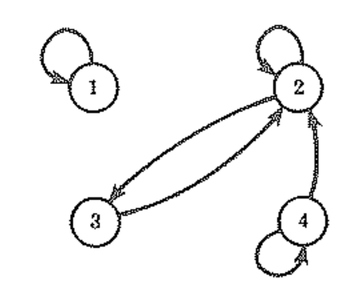
■ T ليست متعدية لأن (1,2) و (2,3) تنتميان إلى T، ولكن (1,3) لا تنتمي إلى T. العلاقات الأربع الأخرى متعدية.

53.6 أي من العلاقات الخمس متخالفة تناظرياً؟

■ S ليست متخالفة تناظرياً لأن $(1,2)$ و $(2,1)$ ينتميان كلاهما إلى S، ولكن $2 \neq 1$. بالمثل، $A \times A$ ليست متخالفة تناظرياً. العلاقات الثلاث الاخرى متخالفة تناظرياً.

54.6 إذا أعطينا $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (4,2), (4,4)\}$ على $A = \{1,2,3,4\}$. ارسم البيان الموجه لـ R.

■ أنظر شكل 8-6.



شكل 8-6

55.6 هل R في المسألة 54.6 انعكاسية؟

■ R ليست انعكاسية، لأن $3 \in A$ لكن $(3,3) \notin R$.

56.6 هل R في المسألة 54.6 متناظرة؟

■ R ليست متناظرة، لأن $(4,2) \in R$ لكن $(2,4) \notin R$.

57.6 هل R في المسألة 54.6 متعدية؟

■ R ليست متعدية، لأن $(4,2) \in R$ و $(2,3) \in R$ لكن $(4,3) \notin R$.

58.6 هل R في المسألة 54.6 متخالفة تناظرياً؟

■ R ليست متخالفة تناظرياً، لأن $(2,3) \in R$ و $(3,2) \in R$.

59.6 لنفترض أن R و S علاقتان متعديتان على مجموعة A. بين أن $R \cap S$ متعدية.

■ لتكن (a,b) و (b,c) في $R \cap S$. إذن، (a,b) و (b,c) في R و S معاً. بما أن العلاقتين متعديتان كليهما، فإن (a,c) في R، و (a,c) في S. وبذلك، تكون $(a,c) \in R \cap S$، أي أن $R \cap S$ متعدية.

60.6 لتكن R و S علاقتين متخالفتين تناظرياً على مجموعة A. بيّن أن $R \cap S$ متخالفة تناظرياً.

■ لنفترض (a,b) و (b,a) في $R \cap S$. إذن، تكون (a,b) و (b,a) في R. بما أن R متخالفة تناظرياً، فإن $a = b$. وبالتالي، تكون $R \cap S$ متخالفة تناظرياً.

61.6 أعطِ علاقة R على $A = \{1,2,3\}$، لها خاصية ان: (أ) R متناظرة ومتخالفة تناظرياً في آنٍ معاً؛ (ب) R ليست متناظرة ولا متخالفة تناظرياً؛ (ج) R متعدية ولكن $R^{-1} \cup S$ ليست متعدية.

■ (أ) $R = \{(1,1), (2,2)\}$؛ (ب) $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$؛ (ج) $R = \{(1,2)\}$.

62.6 لتكن $\perp$ ترمز إلى علاقة تعامد في $\mathbf{R}^3$. هل $\perp$ انعكاسية؟

■ لا: إذا $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$، إذن $u \not\perp u$؛ أي أن $u.u \neq 0$.

63.6 هل $\perp$ متناظرة؟

■ نعم: إذا $u.v = 0$، إذن $u.u = 0$.

64.6 هل $\perp$ متعدية؟

■ لا: $u = (1,1,1)$ متعامدة مع $v = (1,1,-2)$، و v متعامدة مع $w = (4,0,2)$، ولكن $u.w = 6 \neq 0$.

65.6 أثبت أن علاقة R تكون متناظرة إذا وفقط إذا $R = R^{-1}$.

■ إذا R متناظرة،

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R \Leftrightarrow (a, b) \in R^{-1}$$

وبذلك $R = R^{-1}$. بالعكس، إذا $R = R^{-1}$،

$$(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R^{-1} \Rightarrow (b, a) \in R$$

وبذلك تكون r متناظرة.

3.6 علاقات التجزئة والتكافؤ

66.6 عرّف «تجزئة» على مجموعة.

■ لتكن S أي مجموعة غير خالية. نعرف تجزئة لـ S بأنها تجميع لمجموعات جزئية في S، تسمى «خلايا»، بحيث أن كل a في S تنتمي إلى خلية واحدة وواحدة فقط.

المسائل 67.6-69.6 تتعلق بالتجميعات التالية لمجموعات جزئية في $X = \{1,2,3,...,8,9\}$:

$P_1 = [\{1,3,6\},\{2,8\},\{5,7,9\}]$ $P_2 = [\{1,5,7\}, \{2,4,8,9\},\{3,5,6\}]$ $P_3 = [\{2,4,5,8\}, \{1,9\}, \{3,6,7\}]$

67.6 هل P_1 تجزئة لـ X؟

■ لا؛ لأن 4 تنتمي إلى X، ولكنها لا تنتمي إلى خلية.

68.6 هل P_2 تجزئة لـ X؟

■ لا؛ لأن 5 تنتمي إلى X، ولكنها تنتمي إلى خليتين مختلفتين.

69.6 هل P_3 تجزئة لـ X؟

■ نعم؛ لأن كل عنصر في X ينتمي إلى خلية واحدة فقط. بشكل مكافيء: الخلايا منفصلة واتحادها X.

70.6 أوجد كل التجزءات لـ $X = \{a,b,c,d\}$.

■ لاحظ أولاً أن كل تجزئة لـ X تحتوي على 1 أو 2 أو 3 أو 4 خلايا. التجزءات تكون كما يلي:

(1) $[\{a, b, c, d\}]$
(2) $[\{a\}, \{b, c, d\}], [\{b\}, \{a, c, d\}], [\{c\}, \{a, b, d\}], [\{d\}, \{a, b, c\}],$
$[\{a, b\}, \{c, d\}], [\{a, c\}, \{b, d\}], [\{a, d\}, \{b, c\}]$
(3) $[\{a\}, \{b\}, \{c, d\}], [\{a\}, \{c\}, \{b, d\}], [\{a\}, \{d\}, \{b, c\}],$
$[\{b\}, \{c\}, \{a, d\}], [\{b\}, \{d\}, \{a, c\}], [\{c\}, \{d\}, \{a, b\}]$
(4) $[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}]$

هناك خمسة عشر تجزّؤا لـ X

71.6 لتكن $f(n,k)$ ممثلة لعدد التجزءات لمجموعة S، عدد عناصرها n، إلى عدد k من الخلايا $(k = 1,2,...,n)$. أوجد صيغة تكرارية من $f(n,k)$ واستخدمها للتحقق من نتائج المسألة 70.6.

■ ليكن b عنصراً مميزاً في S. إذا كان b يشكل خلية، فإنه يمكن تجزئة S-b إلى (k-1) خلية بعدد $f(n-1,k-1)$ من الطرق. من جهة أخرى، كل تجزئة لـ S-b إلى k خلية يسمح بضم b إلى خلية بعدد k من الطرق. نكون بذلك قد بينا أن

$$f(n, k) = f(n-1, k-1) + kf(n-1, k) \quad (1)$$

وهي الصيغة التكرارية المطلوبة.

إن حل (I) في شكل مثلث باسكال

$$\begin{array}{l} k\rightarrow \\ 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 7\quad 6\quad 1 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

($m\downarrow$)

يؤكد المسألة 70.6.

72.6 ما هي علاقة تكافؤ؟

■ نقول عن علاقة R على مجموعة A بأنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، ومتناظرة، ومتعدية. [من الواضح أن المساواة العادية نموذج لعلاقات التكافؤ].

73.6 لتكن L مجموعة المستقيمات في المستوى الإقليدي. بين أن R المعرفة بواسطة: «تكون موازية لـ (∥) أو منطبقة مع (≡)» تكون علاقة تكافؤ على L.

■ بما أن $a = a$، من أجل أي مستقيم في L، فإن R تكون انعكاسية. إذا $a\|b$، إذن $b\|a$، وبذلك تكون R متناظرة وإذا $a \| b$ و $b\|c$، إذن $a\|c$ أو $a = c$، وبالتالي، تكون R متعدية. وبذلك، فإن R علاقة تكافؤ.

74.6 في المجموعة L للمسألة 73.6، هل العلاقة S: «له نقطة مشتركة مع» علاقة تكافؤ؟

■ لا: مثلا، إذا كان a و c مستقيمين أفقيين مختلفين، و b مستقيما رأسياً، فإن aSb و bSc، ولكن $a\not{S}c$.

75.6 لتكن T مجموعة المثلثات في المستوى الإقليدي. بيّن أن علاقة التشابه R هي علاقة تكافؤ على T.

■ كل مثلث مشابه لنفسه، وبذلك تكون R انعكاسية. إذا كان مثلث a مشابهاً لمثلث b، فإن b يكون مشابهاً لـ a، وبالتالي، تكون R متناظرة. إذا كان a مشابهاً لـ b، و b مشابهاً لـ c، فإن a مشابه لـ c. وبالتالي، تكون R علاقة تكافؤ.

76.6 برهن أن العلاقة ⊆ لمجموعة احتواء ليست علاقة تكافؤ.

■ العلاقة ⊆ انعكاسية ومتعدية، ولكنها ليست متناظرة؛ أي أن $A \subseteq B$ لا تقتضي $B \subseteq A$.

77.6 لتكن مجموعة الأعداد الصحيحة Z وعدد صحيح $m > 1$. نقول أن x مطابقة لـ y، بمقاس m، ونكتبها

$$x \equiv y(\text{mod } m)$$

إذا كانت $x-y$ قسومة على m. بيّن أن هذا يعرّف علاقة تكافؤ على Z.

■ من أجل أي x في Z، لدينا $x \equiv x(\text{mod } m)$، لأن $x - x = 0$ قسومة على m. وبذلك، تكون العلاقة انعكاسية. لنفترض أن $x \equiv y(\text{mod } m)$، أي أن $x-y$ قسومة على m. إذن، $-(x-y) = y - x$ قسومة أيضاً على m، أي أن $y \equiv x(\text{mod } m)$. وبذلك، تكون العلاقة متناظرة.

لنفترض الآن أن $x \equiv y(\text{mod } m)$ وأن $y \equiv z(\text{mod } m)$ وبذلك يكون $x-y$ و $y-z$ كلاهما قسوم على m. إذن، المجموع

$$(x - y) + (y - z) = x - z$$

قسوم على m أيضاً؛ وبالتالي، $x \equiv z(\text{mod } m)$. أي أن العلاقة متعدية.

المبرهنة 2.6: إن تشابه المصفوفات علاقة تكافؤ.

78.6 اثبت خاصية الانعكاس في المبرهنة 2.6. [تذكر أن A تكون مشابهة لـ B إذا كانت توجد مصفوفة عكوسة P بحيث أن $A = P^{-1}BP$].

■ المصفوفة المتطابقة عكوسة و $I = I^{-1}$. بما أن $A = I^{-1}AI$، إذن A مشابهة لـ A.

79.6 اثبت خاصية التناظر في المبرهنة 2.6.

■ إذا $A = P^{-1}BP$، إذن $B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$.

المبرهنة 13.6: إن تطابق المصفوفات علاقة تكافؤ.

80.6 برهن خاصيّة التعدية في النظرية 2.6.

■ إذا $A = P^{-1}BP$ و $B = Q^{-1}CQ$، إذن $A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (P^{-1}Q^{-1})C(QP) = (QP)^{-1}C(QP)$

81.6 اثبت المبرهنة 3.6 [تكون A متطابقة مع B إذا $A = P^TBP$، من أجل مصفوفة P].

■ البرهان يماثل المسائل 78.6-80.6، بسبب $(XY)^T = Y^TX^T$ و $(X^T)^{-1} = (X^{-1})^T$.

82.6 لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة A. عرّف «صنف تكافؤ» لعنصر a في A، وأرمز له بـ [a].

■ إن صنف التكافؤ [a] هو مجموعة عناصر A المرتبطة بـ a، أي $[a] = \{x:(a,x) \in R\}$.

83.6 لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة A. عرّف مجموعة «خارج قسمة» A على R، أرمز لها بـ A/R.

■ A/R هي تجميع أصناف التكافؤ، أي $A/R = \{[a]: a \in A\}$.

المبرهنة 4.6: لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة A. إذن، مجموعة «خارج القسمة» A/R تشكل تجزئة لـ A.

84.6 اثبت المبرهنة 4.6.

■ ليكن a عنصراً إختيارياً في A. بما أن R انعكاسية، إذن $a \in [a]$. لنفترض أن $a \in [b]$؛ سوف نبين أن $[a] = [b]$.

في الحقيقة،

$$\left.\begin{array}{r} x \in [b] \Rightarrow bRx \\ a \in [b] \Rightarrow bRa \Rightarrow aRb \end{array}\right\} \Rightarrow aRx \Rightarrow x \in [a]$$

وبالعكس. إذن، كل عنصر في A ينتمي إلى صنف تكافؤ واحد وواحد فقط، وهذا يجعل A/R تجزئة لـ A.

85.6 لتكن R علاقة التكافؤ التالية على المجموعة $A = \{1,2,3,4,5,6\}$:

$$R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

أوجد التجزئة المدخلة بواسطة R: أي أصناف تكافؤ R.

■ العناصر المرتبطة بـ 1 هي 1 و 5، إذن $\{1,5\} = [1]$. نختار عنصراً لا ينتمي إلى [1]، وليكن 2. العناصر المرتبطة بـ 2 هي 2 و 3 و 6؛ إذن $\{2,3,6\} = [2]$. العنصر الوحيد الذي لا ينتمي إلى [1] أو [2] هو 4، والعنصر الوحيد المرتبط به هو 4. وبذلك، $\{4\} = [4]$. وبالتالي، فإن $\{\{1, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}\}$ هي التجزئة المطلوبة.

86.6 إن العلاقة $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)\}$ هي علاقة تكافؤ للمجموعة $S = \{1,2,3\}$. أوجد مجموعة «خارج القسمة» S/R.

■ لدينا، بسبب R، أن $[1] = \{1,2\}$، $[2] = \{1,2\}$ و $[3] = \{3\}$. بملاحظة أن $[1] = [2]$، يكون لدينا $S/R = \{[1], [3]\}$.

87.6 لتكن R_5 العلاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة، المعرفة بواسطة $x \equiv y (\text{mod } 5)$. نعرف من المسألة 77.6 أن R_5 علاقة تكافؤ على **Z**. أوجد أصناف التكافؤ المدخلة.

■ هناك عدد خمس أصناف تكافؤ مختلفة في Z/R_5:

$$A_0 = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\} \qquad A_3 = \{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$$
$$A_1 = \{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\} \qquad A_4 = \{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$$
$$A_2 = \{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$$

يمكن التعبير عن أي عدد صحيح x، وبشكل وحيد، في الشكل $x = 5q + r$ حيث $0 \leqslant r \leqslant 4$: $x \in A_r$.

4.6 العمليات وأنصاف الزمر

88.6 عرّف «عملية ثنائية».

▩ نعرّف عملية ثنائية [أو «عملية»] على مجموعة غير خالية S بأنها دالة ✻ من $S \times S$ إلى S.

إذا كانت ✻ عملية ثنائية على مجموعة S، فإننا نكتب $a*b$ أو ab بدلاً عن (a,b) ✻ إذا كانت S مجموعة منتهية، فإن العملية يمكن أن تعطى بجدولها العملياتي، حيث المدخل في الصف المعنْوَن a والعمود المعنْوَن b هو $a*b$. إذا كانت A مجموعة جزئية في S، فإننا نقول أن A «مغلقة تحت ✻» إذا كان $a*b$ ينتمي إلى A من أجل أي عنصرين a و b في A.

المسائل 100.6-89.6 تتعلق بالمجموعات الجزئية التالية في مجموعتي الأعداد الصحيحة الموجبة N:

$A = \{0,1\}$ $\quad D = \{2,4,6,\ldots\} = \{x:$ عدد زوجي $x\}$

$B = \{1,2\}$ $\quad E = \{1,3,5,\ldots\} = \{x:$ عدد فردي $x\}$

$C = \{$ عدد أولي $x:x\}$ $\quad F = \{2,4,8,\ldots\} = \{x:x = 2^n, n \in N\}$

89.6 هل A مغلقة تحت الضرب؟

▩ نحسب: $0.0 = 0$، $0.1 = 0$، $1.0 = 0$، و $1.1 = 1$. نعم، A مغلقة تحت الضرب.

90.6 هل A مغلقة تحت الجمع؟

▩ لا، لأن $1 + 1 = 2$، و 2 لا تنتمي إلى A.

91.6 هل B مغلقة تحت الضرب؟

▩ بما أن $2.2 = 4$، وحيث أن 4 لا تنتمي إلى B، فإن B ليست مغلقة تحت الضرب.

92.6 هل B مغلقة تحت الجمع؟

▩ لا، لأن $1 + 2 = 3$، و 3 لا ينتمي إلى B.

93.6 هل C مغلقة تحت الضرب؟

▩ لاحظ أن 3,2 أوليان، ولكن $2.3 = 6$ ليس أولياً. إذن، C ليست مغلقة تحت الضرب.

94.6 هل C مغلقة تحت الجمع؟

▩ لا، لأن العنصر $5 + 3 = 8$ لا ينتمي إلى C.

95.6 هل D مغلقة تحت الضرب؟

▩ إن جداء عددين زوجيين هو عدد زوجي، وبالتالي D مغلقة تحت الضرب.

96.6 هل D مغلقة تحت الجمع؟

▩ نعم، لأن مجموع عددين صحيحين زوجيين يكون عدداً زوجياً.

97.6 هل E مغلقة تحت الضرب؟

▩ جداء عددين فرديين هو عدد فردي، وبالتالي، تكون E مغلقة تحت الضرب.

98.6 هل E مغلقة تحت الجمع؟

▩ لا لأن $3 + 5 = 8$ عنصر لا ينتمي إلى E.

99.6 هل F مغلقة تحت الضرب؟

▩ بما أن $2^r.2^s = 2^{r+s}$، إذن F مغلقة تحت الضرب.

100.6 هل F مغلقة تحت الجمع؟

■ لا، لأن $2+4=6$ لا ينتمي إلى F.

101.6 عرّف عملية «تجميعية»؟

■ نقول عن عملية * على مجموعة S أنها تجميعية إذا $(a*b)*c=a*(b*c)$.

102.6 هل مجموعة الأعداد الصحيحة **Z** تجميعية؟

■ نعم.

103.6 هل الطرح في **Z** عملية تجميعية؟

■ لا. مثلاً، $(12-6)-2=6-2=4$، ولكن $12-(6-2)=12-4=8$.

104.6 هل الضرب على **Z** عملية تجميعية؟

■ نعم.

105.6 هل العملية $p*q=\max(p,q)$، المعرفة على **Z** تجميعية؟

■ نعم: إذا أعطينا $p,q,r\in \mathbf{Z}$، ليكن $a\leqslant b\leqslant c$ نسقها في الترتيب الطبيعي إذن

$$(p*q)*r=(c*q)*r \text{ أو } (p*c)*r \text{ أو } (p*q)*c$$
$$c*r= \text{ أو } c*r \text{ أو } c=c \text{ أو } c \text{ أو } c=c$$

وبالمثل، $p*(q*r)=c$.

106.6 هل الأسس في **Z** عملية تجميعية؟

■ لا. مثلاً، إذا وضعنا $a*b=a^b$، إذن

$$(2*2)*3=(2^2)^3=4^3=64 \quad \text{ولكن} \quad 2*(2*3)=2^{2^3}=2^8=256$$

107.6 لنفترض أن عمليةً [مكتوبة كجداء] على مجموعة S ليست تجميعية. كم طريقة يمكن بها كتابة الجداء abcd للعناصر الأربعة؟

■ هناك خمس طرق لإدخال الأقواس: $((ab)c)d$، $(ab)(cd)$، $(a(bc(d)$، $a((bc)d)$، و $a(b(cd))$.

المبرهنة 5.6: لنفترض أن * عملية تجميعية على مجموعة S. إذن، كل «الجداءات» الممكنة لنونية مرتبة في S تكون متساوية.

108.6 اثبت المبرهنة 5.6.

■ يكون البرهان بالاستقراء على n. الحالتان $n=1$ و $n=2$ صحيحتان بداهةً، والحالة $n=3$ صحيحة لأن * تجميعية. لتكن $n>3$، استخدم الترميزات

$$\text{أي جداء } \equiv [a_1a_2...a_n] \quad \text{و} \quad (a_1a_2...a_n)\equiv((a_1a_2)a_3)...)a_n$$

سنبين الآن أن $[a_1a_2...a_n]=(a_1a_2...a_n)$. في الحقيقة، بما أن $[a_1a_2...a_n]$ ترمز إلى جداء ما، فإنه يوجد عدد $r<n$ بحيث أن $[a_1a_2...a_n]=[a_1a_2...a_r][a_{r+1}...a_n]$. وبالتالي، وبالاستقراء [المسألة 17.6]،

$$\begin{aligned}[a_1a_2\cdots a_n]&=[a_1a_2\cdots a_r][a_{r+1}\cdots a_n]=[a_1a_2\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_n)\\&=[a_1\cdots a_r]((a_{r+1}\cdots a_{n-1})a_n)=([a_1\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_{n-1}))a_n\\&=[a_1\cdots a_{n-1}]a_n=(a_1\cdots a_{n-1})a_n=(a_1a_2\cdots a_n)\,.\end{aligned}$$

وبذلك، يتم إثبات المبرهنة.

لذلك، فإننا عند تعاملنا مع العمليات التجميعية نهمل الأقواس ونكتب ببساطة $a_1*a_2*...*a_m$.

109.6 عرّف «نصف زمرة».

■ هي مجموعة S عرّفت عليها عملية تجميعية ✻. نرمز للزمرة بـ $(S, *)$ أو بـ S فقط عندما تكون العملية مفهومة.

110.6 عرّف «عنصر مطابقة» من أجل عملية ✻ على مجموعة S.

■ يكون عنصر e في S عنصر مطابقة من أجل ✻ إذا $a*e = e*a = a$ من أجل أي عنصر a في S. بعمومية أكبر، يكون c عنصر مطابقة أيمن إذا $a*e = a$ من أجل كل a في S، وعنصر مطابقة أيسر إذا $e*a = a$ من أجل كل a في S. [لاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون لعملية عنصر مطابقة أيمن أو أيسر.]

111.6 ليكن e عنصر مطابق أيسر و f عنصر مطابقة أيمن لعملية ✻ بيّن أن $e = f$.

■ بما أن e عنصر مطابقة أيسر، $e*f = f$؛ ولكن بما أن f عنصر مطابقة أيمن، إذن $e*f = e$. وبالتالي، $e = f$.
تخبرنا هذه النتيجة، بخاصة، بأن عنصر المطابقة وحيد، وأنه إذا كان لعملية أكثر من عنصر مطابقة أيسر [أيمن] واحد، فليس لها عنصر مطابقة أيمن (أيسر).

■ لا يوجد عنصر مطابقة على Z؛ $e = 1$ من أجل N.

112.6 هل للعملية في المسألة 105.6 عنصر مطابقة عندما تعرّف على Z؟ على N؟

■ لا يوجد عنصر مطابقة على Z؟ $e = 1$ من أجل N.

113.6 عرّف «قانون الاختصار الأيمن والأيسر» من أجل عملية ✻ على مجموعة S.

■ العملية ✻ على S تحقق قانون الاختصار الأيسر إذا

$$a*b = a*c \quad \text{تقتضي} \quad b = c$$

وقانون الاختصار الأيمن إذا

$$b*a = c*a \quad \text{تقتضي} \quad b = c$$

114.6 عرّف عملية «تبديلية»؟

■ تكون ✻ عملية تبديلية على S [أو تحقق «قانون التبديل»] إذا $a*b = b*a$ من أجل كل a,b في S.

115.6 ليكن ليكن لـ ✻ على S عنصر مطابقة (وحيد) e. ما المقصود «بمعكوس» عنصر a في S؟

■ يكون b معكوساً لعنصر a في S، إذا $a*b = b*a = e$.

116.6 لنفترض أن لـ S عملية تجميعية بعنصر متطابق e. بيّن أنه يكون لأي عنصر a في S معكوس واحد على الأكثر.

■ ليكن b و b′ معكوسين لـ a. إذن

$$b*(a*b') = b*e = b \quad \text{و} \quad (b*a)*b' = e*b' = b'$$

بما أن S تجميعية، إذن $(b*a)*b' = b*(a*b')$؛ وبالتالي، $b = b'$.

المسائل 117.6-120.6 تتعلق بعملية أخذ المضاعف المشترك الأصغر: $(p,q \in N)$ $p*q = \text{l.c.m.}(p,q)$.

117.6 إحسب $4*6$، $3*5$، $9*18$، و $1*6$.

■ بما أن $x*y$ تعني المضاعف المشترك الأصغر لـ x و y، إذن $4*6 = 12$، $3*5 = 15$، $9*18 = 18$، $1*6 = 6$.

118.6 هل $(N, *)$ نصف زمرة؟ هل هي تبديلية؟

■ نبرهن في نظرية الأعداد أن $(a*b)*c = a*(b*c)$؛ أي أن العملية l.c.m تجميعية، وبما أن $a*b = b*a$؛ أي أن العملية تبديلية. وبالتالي، تكون $(N, *)$ نصف زمرة تبديلية.

119.6 أوجد عنصر المتطابقة لـ ✻.

■ العدد الصحيح 1 هو عنصر المطابقة، لأن l.c.m لـ 1 وأي عدد صحيح موجب a هو a.

120.6 ما هي عناصر N، إن وجدت، التي لها معكوس؟

■ بما أن $l.c.m(a,b) = 1$ إذا وفقط إذا $a = 1$ و $b = 1$، فإن العدد الوحيد الذي له معكوس هو 1، وهو معكوسه نفسه.

المسائل 121.6-125.6 تتعلق بالمجموعة Q (مجموعة الأعداد المنطقة) والعملية ✻ المعرف على Q بواسطة $a * b = a + b - ab$.

121.6 أوجد $3 * 4$، $2 * (-5)$ و $7 * 1/2$.

■
$$3*4=3+4-(3)(4)=3+4-12=-5$$
$$2*(-5)=2(-5)-(2)(-5)=2-5+10=7$$
$$7*\tfrac{1}{2}=7+\tfrac{1}{2}-7(\tfrac{1}{2})=4$$

122.6 هل $(Q,*)$ نصف زمرة؟

■ حدد عما إذا كانت ✻ تجميعية:

$$(a*b)*c=(a+b-ab)*c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$$
$$=a+b-ab+c-ac-bc+abc=a+b+c-ab-ac-bc+abc$$

و

$$a*(b*c)=a*(b+c-bc)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$
$$=a+b+c-bc-ab-ac+abc$$

وبالتالي، تكون ✻ تجميعية و $(Q,*)$ نصف زمرة.

123.6 هل ✻ تبديلية؟

■ $a * b = a + b - ab = b + a - ba = b * a$؛ وبالتالي، ✻ تبديلية.

124.6 أوجد عنصر المطابقة من أجل ✻.

■ $a * 0 = 0 * a = a$. إذن، 0 هو عنصر المطابقة.

125.6 هل يكون لأي عنصر في Q معكوس؟ ما هو؟

■ لكي يكون لـ a معكوس x، يجب أن يكون لدينا $a * x = 0$، لأن 0 هو عنصر المطابقة. نحسب كما يلي:

$$a*x=0,\quad a+x-ax=0,\quad a=ax-x,\quad a=x(a-1),\quad x=a/(a-1)$$

وبذلك، إذا $a \neq 1$، يكون لـ a معكوس وحيد $a/(a-1)$.

المسائل 126.6-128.6 تتعلق بمجموعة غير خالية S والعملية $a * b = a$.

126.6 هل العملية تجميعية؟

■ نعم، لدينا في الحقيقة $(a * b) * c = a * c = a$ و $a * (b * c) = a * b = a$.

127.6 هل العملية تبديلية؟

■ إذا كان لـ S أكثر من عنصر واحد، فإن ✻ ليست تبديلية. تحديداً، من أجل $a \neq b$، $a * b = a$ ولكن $b * a = b$.

128.6 بيّن أن قانون الاختصار الأيمن يتحقق. هل يتحقق قانون الاختصار الأيسر؟

■ لنفترض أن $a * c = b * c$. لدينا $a * c = a$ و $b * c = b$، إذن $a = b$. قانون الاختصار الأيسر لا يتحقق. مثلاً، من أجل $b \neq c$. يظل لدينا $a * b = a * c (= a)$.

129.6 لتكن S مجموعة رموز. عرّف «نصف زمرة حرة» على S.

■ نعرّف «كلمة» على S بأنها متتالية منتهية من عناصرها. مثلاً، $V = ababb$ و $V = accba$ كلمتان على $S = \{a,b,c\}$. عند مناقشة الكلمات على S، نسمي S غالباً «الألفبائية» وعناصرها «الحروف». وللملاءمة، نعتبر المتتالية الخالية، والتي نرمز لها بـ ε أو 1، بأنها أيضاً كلمة في S. وسوف نختصر ترميزنا بكتابة a^2 بدلاً عن aa، a^3 بدلاً عن aaa، وهكذا. ونرمز، عادة، لمجموعة كل الكلمات على S بواسطة S^*.

ننظر الآن في كلمتين U و V على S. يمكننا تكوين كلمة UV بكتابة كل حروف V بعد حروف U. مثلاً، إذا كانت U و V الكلمتين أعلاه، إذن

$$UV = ababbaccba = abab^2ac^2ba$$

هذه العملية تسمى «تنضيداً». من الواضح أن العملية تجميعية. وبذلك تكون مجموعة الكلمات على S نصف زمرة تحت عملية التنضيد. وتسمى نصف الزمرة، هذه، «نصف زمرة حرة» على S [أو مولّدة بواسطة S]. من الواضح أن الكلمة الخالية ε عنصر مطابقة من أجل نصف الزمرة، وأن نصف الزمرة تحقق قانوني الاختصار الايمن والأيسر.

5.6 الزمر والزمر الجزئية

130.6 عرّف «زمرة».

■ لتكن G مجموعة غير خالية بعملية ثنائية. إذن، تسمى G زمرة إذا تحققت الموضوعات التالية:

$[G_1]$ «قانون التجميع»، أي أن يكون لدينا $(ab)c = a(bc)$ من أجل أي a، b، c في G.

$[G_2]$ «عنصر المطابقة»، أي أنه يوجد عنصر e في G بحيث أن $ae = ea = a$ من أجل أي عنصر a في G.

$[G_3]$ «المعكوسات»، أي أنه يوجد، من أجل كل a في G، عنصر a^{-1} [معكوس a] في G بحيث أن $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

[$[G_2]$ و $[G_3]$ تحولان نصف زمرة إلى زمرة].

131.6 عرّف زمرة «أبيلية».

■ نقول عن زمرة G أنها أبيلية [أو تبديلية] إذا تحقق قانون التبديل، أي إذا $ab = ba$ من أجل a و b في G.

عندما يرمز لعملية ثنائية بواسطة كتابة العناصر متجاورة كما أعلاه، فإننا نقول أن الزمرة G مكتوبة في «ضربياً». وعندما تكون G أبيلية، فإن العملية الثنائية تكتب «جمعياً» ويرمز لذلك بـ + . في مثل هذه الحالات، يرمز لعنصر المطابقة بواسطة 0 ويسمى «العنصر الصفري»، ويرمز للمعكوس بواسطة $(-a)$ ويسمى «سالب» a. إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين في G، فإننا نكتب عندئذ

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad \text{أو} \quad AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

ويطلق على عدد العناصر في زمرة G اسم مرتبة G، ويرمز له بواسطة $|G|$. وتكون G زمرة منتهية لذا كانت مرتبتها منتهية.

132.6 أي المجموعات التالية تكون زمراً تحت الجمع: **N,Z,Q,R,C**؟

■ إن كل واحدة من مجموعات الأعداد الصحيحة **Z**، والأعداد المنطقة **Q**، والأعداد الحقيقية **R**، والاعداد العقدية **C**. زمرة (أبيلية) تحت الجمع. أما مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة **N** فلا تشكل ـ زمرة تحت الجمع، لأن $0 \notin N$.

133.6 مجموعة الأعداد المنطقة غير الصفرية $Q \setminus \{0\}$ تشكل زمرة أبيلية تحت الضرب. ما هو عنصر المطابقة، وما هي المعكوسات؟

■ العدد المنطق 1 هو عنصر المطابقة، و q/p هو المعكوس الضربي للعدد المنطق p/q.

134.6 لتكن S مجموعة المصفوفات $n \times n$ ذات المداخل المنطقة، وعملية الضرب المصفوفي. هل تكون S زمرة؟

■ لا. رغم أن ضرب المصفوفات عملية تجميعية، ولها عنصر مطابقة I [بمداخل منطقة]، إلا أن S ليست زمرة حيث أن المعكوسات لا توجد دائماً.

135.6 إن المجموعة G للمصفوفات $n \times n$ غير الشاذة تشكل فعلا زمرة تحت عملية الضرب. ما هو عنصر المطابقة، وما هي المعكوسات؟

■ عنصر المطابقة هو المصفوفة المتطابقة I، ومعكوس A هو المصفوفة العكسية A^{-1}. هذا مثال عن زمرة غير أبيلية، لأن الضرب المصفوفي غير تبديلي.

136.6 ما هي «الزمرة المتناظرة ذات الدرجة n»؟

■ هذا اسم آخر من أجل S_n لتباديل $\{1,2,...,n\}$ تحت عملية التركيب [انظر مسألة 54.4].

137.6 أوجد عناصر الزمرة المتناظرة S_3 وجدولها الضربي.

■ يكون لـ S_3 عدد $3! = 6$ من العناصر، كما يلي:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ويظهر الجدول الضربي لـ S_3 في الشكل 6-9.

	ϵ	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
ϵ	ϵ	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
σ_1	σ_1	ϵ	ϕ_1	ϕ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ϕ_2	ϵ	ϕ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	ϕ_1	ϕ_2	ϵ	σ_1	σ_2
ϕ_1	ϕ_1	σ_3	σ_1	σ_2	ϕ_2	ϵ
ϕ_2	ϕ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ϵ	ϕ_1

شكل 6-9

المسائل 138.6-142.6 تتعلق بزمرة G ذات عنصر مطابق e.

138.6 بيّن أن عنصر المطابقة e وحيد.

■ ينتج ذلك من المسألة 111.6.

139.6 بيّن أن المعكوس a^{-1} لأي عنصر a في G وحيد.

■ يتبع من المسألة 116.6.

140.6 اثبت تحقق قانون الاختصار الأيمن والأيسر في G.

■ إذا $ab = ac$، إذن $b = eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c$. بالمثل، إذا $ba = ca$، إذن $b = c$.

141.6 بيّن أن $(a^{-1})^{-1} = a$ من أجل أي عنصر a في G.

■ بما أن a^{-1} معكوس a، إذن $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. وبالتالي، يكون a معكوس a^{-1}؛ أي أن $a = (a^{-1})^{-1}$.

142.6 بيّن أن $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

■ $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$. بالمثل، $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$. وبذلك يكون $b^{-1}a^{-1}$ معكوس ab؛ أي أن $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$.

143.6 عرّف «زمرة جزئية» في زمرة.

■ تكون مجموعة جزئية H، في زمرة G، زمرة جزئية في G إذا كانت H نفسها تشكل زمرة تحت عملية G.

144.6 لتكن H مجموعة جزئية في زمرة G. اثبت أن H تكون زمرة جزئية في G إذا (i) كان عنصر المطابقة e ينتمي إلى H (ii) كانت H مغلقة تحت عملية G، (iii) H مغلقة بالنسبة للمعكوسات [أي، إذا $a \in H$، إذن $a^{-1} \in H$].

■ H غير خالية وتحتوي عنصر مطابقة، بواسطة (i). العملية معرّفة جيداً على H، بواسطة (ii) المعكوسات موجودة على H، بواسطة (iii). أخيراً، يتحقق قانون التجميع على H، لأنه يتحقق على G. وبذلك، تكون H زمرة جزئية G.

145.6 لتكن زمرة الأعداد الصحيحة Z الأعداد الصحيحة Z تحت الجمع. ولتكن H المجموعة الجزئية في Z لكل مضاعفات عدد صحيح $m > 1$: $H = \{\ldots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \ldots\}$. بيّن أن H زمرة جزئية في Z.

■ (i) H تحتوي عنصر المطابقة 0 لـ Z. (ii) إذا rm و sm أي عنصرين في H، إذن $rm + sm = (r + s)m$ عنصر في H أيضاً. (iii) إذا rm أي عنصر في H، إذن سالبه $-rm$ ينتمي أيضاً إلى H.

146.6 لتكن G زمرة ما، و a أي عنصر في G. عرّف «الزمرة الجزئية الدورية» المولدة بواسطة a، والتي يرمز لها بـ gp(a).

■ نعرّف كالمعتاد $a^0 \equiv e$، $(a)^{-1} \equiv a^{-1}$، و $a^{n+1} = a^n a$. من الواضح، أن $a^m a^n = a^{m+n}$ و $(a^m)^n = a^{mn}$، من أجل أي عددين صحيحين m و n. لتكن gp(a) مجموعة كل قوى a:

$$gp(a) = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \ldots\}$$

إذن، gp(a) تحتوي e، وتكون مغلقة تحت عملية الزمرة، وتحتوي المعكوسات. وبذلك، تكون gp(a) زمرة جزئية في G.

147.6 ليكن a أي عنصر في زمرة G. صف الزمرة الجزئية الدورية gp(a) عندما تكون gp(a) منتهية، وعرّف مرتبة a.

■ إذا كانت gp(a) منتهية، فإن بعض قوى a ليست مختلفة؛ مثلاً، $a^r = a^s$، عندما $r>s$. إذن، $a^{r-s} = e$، حيث $r-s > 0$. إن أصغر عدد صحيح موجب m بحيث $a^m = e$ يسمى مرتبة a ونرمز له بـ $|a|$.
إذا $|a| = m$، يكون لزمرته الدورية الجزئية m عنصراً: $gp(a) = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$. [إذا gp(a) ليست منتهية، إذن نعرّف $|a| = 0$.]

المسائل 151.6-148.6 تتعلق بالزمرة $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تحت عملية الضرب بمقاس 7.

148.6 أوجد الجدول الضربي لـ G.

■ لإيجاد $a * b$ في G، نبحث عن الباقي عن تقسيم الجداء ab على 7. مثلاً، $5.6 = 30$، وهذا يعطي باقياً 2 عند القسمة على 7؛ وبالتالي، $5 * 6 = 2$ في G. يظهر الجدول الضربي لـ G في الشكل 6-10.

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

شكل 6-10

149.6 أوجد $2^{-1}, 3^{-1}, 6^{-1}$.

■ يبين شكل 6-10 أن 1 هو عنصر المطابقة لـ G. تذكر أن a^{-1} هو ذلك لعنصر في G الذي يحقق $aa^{-1} = 1$. وبالتالي، $2^{-1} = 4$، $3^{-1} = 5$، $6^{-1} = 6$.

150.6 أوجد الزمرتين الجزئيتين المولّدتين بواسطة 2 و 3 ومرتبتيهما.

■ لدينا $2^1 = 2$، $2^2 = 4$، ولكن $2^3 = 1$. وبالتالي، $|2| = 3$ و $gp(2) = \{1, 2, 4\}$. ولدينا $3^1 = 3$، $3^2 = 2$، $3^3 = 6$، $3^4 = 4$، $3^5 = 5$، $3^6 = 1$ وبالتالي، $|3| = 6$ و $gp(3) = G$.

151.6 هل G دورية؟

■ G دورية لأن $G = gp(3)$.

152.6 لتكن H زمرة جزئية في زمرة G. عرّف «مجموعة مصاحبة» يمنى (يسرى) لـ H.

■ ليكن a أي عنصر في G. إذن، نقول عن المجموعة $Ha = \{ha : h \in H\}$ بأنها مجموعة مصاحبة يمنى لـ H. بالمثل، تسمى aH مجموعة مصاحبة يسرى لـ H.

المبرهنة 6.6: لتكن H زمرة جزئية في زمرة G. إذن، المجموعات المصاحبة اليمنى Ha تشكل تجزئة لـ G.

153.6 اثبت المبرهنة 6.6.

■ نعرف العلاقة R على G بواسطة $aRb \Leftrightarrow b \in Ha$. سنبين أن R علاقة تكافؤ.

(1) $e \in H \Rightarrow a \in Ha \Rightarrow aRa$ [R انعكاسية].

(2) $aRb \Rightarrow b = ha \Rightarrow a = h^{-1}b \Rightarrow a \in Hb \Rightarrow bRa$ [R متناظرة].

(3) $\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = h_1 a \\ c = h_2 b \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = (h_2 h_1)a \Rightarrow c \in Ha \Rightarrow aRc$ [R متعدية]

لدينا، تحت R، أن $[a] = Ha$، وبذلك فإن المبرهنة 6.6 تتبع مباشرة من 4.6.

154.6 لتكن H زمرة جزئية منتهية في G. بيّن أن يكون لـ H، وأي مجموعة مصاحبة Ha، نفس العدد من العناصر.

■ لتكن $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$، حيث يكون لـ H عدد k من العناصر. إذن، $Ha = \{h_1a, h_2a, \ldots, h_ka\}$. ولكن $h_ia = h_ja$ تقتضي $h_i = h_j$؛ وبالتالي، فإن العناصر الـ k المذكورة في Ha مختلفة.

المبرهنة 7.6 (لاغرانج): لتكن H زمرة جزئية في زمرة منتهية G. إذن، مرتبة H تقسم مرتبة G.

155.6 اثبت المبرهنة 7.6.

■ لنفترض أن لـ H عدد r من العناصر، وأن هناك s مجموعة مصاحبة يمنى مختلفة. من المبرهنة 6.6، تشكل المجموعات المصاحبة تجزئة لـ G، ومن المسألة 154.6 يكون لكل مجموعة مصاحبة r عنصراً. إذن، يكون لـ G عدد rs من العناصر، وبذلك مرتبة H تقسم مرتبة G.

156.6 لتكن h زمرة جزئية في زمرة G. عرّف «دليل» H في G، والذي يرمز له بـ $[G:H]$.

■ يساوي دليل H في G عدد المجموعات المصاحبة اليمنى (اليسرى) المختلفة لـ H في G. إذا كانت G منتهية، فإن $[G:H] = |G|/|H|$

157.6 لتكن H زمرة جزئية في زمرة G. عرّف «منظومة ممثلة للمجموعات المصاحبة» من أجل H في G.

■ تكون مجموعة جزئية C في G منظومة ممثلة للمجموعات المصاحبة لـ H إذا كانت C تحتوي تماماً على عنصر واحد فقط من كل مجموعة مصاحبة. يسمى عنصر، مثل هذا، ممثلاً للمجموعة المصاحبة.

158.6 لتكن H زمرة جزئية في زمرة منتهية G. كم توجد منظومة ممثلة للمجموعات المصاحبة من أجل H؟

■ هي عبارة عن العدد $|H|$ لطرف اختيار عنصر من أي مجموعة مصاحبة [أنظر المسألة 154.6]، وهناك $[G:H]$ مجموعة مصاحبة مختلفة، وبالتالي، فإن العدد المطلوب هو $|H|^{[G:H]}$.

في المسائل 159.6-161.6، ترمز **Z** إلى زمرة الأعداد الصحيحة تحت الجمع، وتكون $H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 5, 10, \ldots\}$ الزمرة الجزئية في **Z** المتكونة من مضاعفات 5.

159.6 أوجد المجموعات المصاحبة لـ H في **Z**.

■ هناك خمس مجموعات مصاحبة [يسرى] لـ H في **Z**، وهي كما يلي:

$0 + H = H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$1 + H = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

$2 + H = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$3 + H = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

$4 + H = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

أي مجموعة مصاحبة أخرى $n + H$ تنطبق على واحدة من تلك المجموعات.

160.6 أوجد دليل H في Z.

▩ رغم أن H و Z لانهائيتان كلاهما، إلا أن دليل H في Z عدد منته. تحديداً، $[Z:H] = 5$، وهو عدد المجموعات المصاحبة.

161.6 أوجد ممثلي المجموعات المصاحبة لـ H في Z.

▩ اختر عنصراً واحداً تماماً من كل مجموعة مصاحبة؛ مثلاً، $\{0,1,2,3,4\}$ أو $\{-1,0,1,2,3\}$.

المسائل 162.6-166.6 تتعلق بالزمرة المتناظرة S_3، التي يظهر جدولها الضربي في شكل 6-9.

162.6 أوجد مرتبة كل عنصر في S_3، والزمرة الجزئية المولدة بواسطة.

▩ $\varepsilon^1 = \varepsilon$، إذن $|\varepsilon| = 1$ و $gp(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. $\sigma_1^1 = \sigma_1$، $\sigma_1^2 = \varepsilon$؛ وبذلك $|\sigma_1| = 2$ و $gp(\sigma_1) = \{\sigma,\varepsilon\}$. بالمثل، $|\sigma_2| = 2$، $gp(\sigma_2) = \{\sigma_2,\varepsilon\}$؛ و $|\sigma_3| = 2$، $gp(\sigma_3) = \{\sigma_3,\varepsilon\}$. لدينا

$$\phi_1^1 = \phi_1 \quad \phi_1^2 = \phi_2, \qquad \phi_1^3 = \phi_2 \cdot \phi_1 = \varepsilon$$

وبالتالي، $|\phi_1| = 3$ و $gp(\phi_1) = \{\varepsilon, \phi_1, \phi_2\}$. أيضاً، $\phi_2^1 = \phi_2$، $\phi_2^2 = \phi_1$، $\phi_2^3 = \phi_1 \cdot \phi_2 = \varepsilon$؛ وبالتالي، $|\phi_2| = 3$ و $gp(\phi_2) = \{\varepsilon,\phi_2,\phi_1\}$.

163.6 هل يمكنك إيجاد زمرة جزئية H من المرتبة الرابعة؟

▩ إن مرتبة S_3 ستة. من مبرهنة لاغرانج، لا بد أن تقسم مرتبة H مرتبة S_3. وبالتالي، لا توجد زمرة جزئية من المرتبة الرابعة.

164.6 لتكن $A = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ و $B = \{\phi_1,\phi_2\}$. أوجد (أ) AB، (ب) $\sigma_3 A$، و (ج) $A\sigma_3$.

▩ اضرب كل عنصر من A في كل عنصر لـ B: $\sigma_1\phi_1 = \sigma_2$، $\sigma_1\phi_2 = \sigma_3$، $\sigma_2\phi_1 = 3$، $\sigma_2\phi_2 = \sigma_1$. وبالتالي، $AB = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$. (ب) أضرب σ_3 في كل عنصر لـ A: A: $\sigma_3\sigma_1 = \phi_1$، $\sigma_3\sigma_2 = \phi_2$. وبالتالي، $c_3A = \{\phi_1,\phi_2\}$. (ج) اضرب كل عنصر لـ A في σ_3: $\sigma_1\sigma_3 = \phi_2, \sigma_2\sigma_3 = \phi_1$. وبالتالي، $A\sigma_3 = \{\phi_1,\phi_2\}$.

165.6 لتكن $H = gp(\sigma_1)$ و $K = gp(\sigma_2)$. هل HK زمرة جزئية في S_3؟

▩ $H = \{\varepsilon,\sigma_1\}$، $K = \{\varepsilon,\sigma_2\}$ وهي ليست زمرة جزئية في S_3، لأن لـ HK أربعة عناصر. [قارن بالمسألة 163.6].

166.6 هل S_3 دورية؟

▩ S_3 ليست دورية، لأنها غير مولدة بواسطة أي عنصر من عناصرها.

167.6 إذا كانت H زمرة جزئية في G، بيّن أن $HH = H$.

▩ بما أن H مغلقة تحت عملية G، يكون لدينا $HH \subseteq H$. من جهة أخرى، لنفترض أن $h \in H$. بما أن H زمرة جزئية، فإن عنصر المطابقة e ينتمي إلى H. وبالتالي، $eh = h \in HH$. وبذلك $H \subseteq HH$. نحصل من التضمينين على $HH = H$.

168.6 بيّن أن $Ha = Hb$ إذا وفقط إذا $ab^{-1} \in H$.

▩ إذا $Ha = Hb$ إذن $a \in Ha = Hb$. وبالتالي، يوجد $h \in H$ بحيث أن $a = hb$، وبذلك ينتمي $ab^{-1} = h$ إلى H. لنفترض، من جهة أخرى، أن $h = ab^{-1} \in H$. إذن، $a = hb \in Hb$. ولكن $a \in Ha$. وبذلك، $Ha = Hb$، لأن المجموعات المصاحبة تشكل تجزئة لـ G.

169.6 لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n. بين أن $a^n = e$ من اجل أي $a \in G$.

▩ إذا $|gp(a)| = m$، إذن $a^m = e$. من مبرهنة لاغرانج، m تقسم n؛ ليكن $n = mr$. إذن، $a^n = a^{mr} = (a^m)^r = e^r = e$.

6.6 زمر جزئية ناظمية، زمر عاملية، تشاكل زمر

170.6 عرّف زمرة جزئية «ناظمية» في زمرة G.

■ نقول عن زمرة جزئية H في G أنها زمرة جزئية ناظمية إذا $a^{-1}Ha \subset H$ من أجل كل $a \in G$. بشكل مكافىء، تكون H ناظمية إذا $aH = Ha$ من أجل كل $a \in G$.

171.6 لتكن G زمرة مصفوفات 2×2 غير شاذة، تحت عملية الضرب المصفوفي. ولتكن H مجموعة جزئية في G متكونة من المصفوفات المثلثية السفلية، أي مصفوفات في الشكل $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. بيّن أن H زمرة جزئية في G، ولكنها ليست زمرة جزئية ناظمية.

■ H مغلقة تحت الضرب المصفوفي، والمعكوسات والمصفوفة المتطابقة I تنتمي إلى H. وبالتالي، تكون H زمرة جزئية في G. ولكن H ليست ناظمية لأن

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثلاً، لا تنتمي إلى H.

172.6 لتكن G زمرة المصفوفات في المسألة 171.6. ولتكن K مجموعة جزئية في G متكونة من مصفوفات تساوي محدداتها 1. بيّن أن K زمرة جزئية ناظمية في G.

■ بما أن $\det I = 1$، فإن I تنتمي إلى K. إذا كانت A و B في K، فإن $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (1)(1) = 1$، وبذلك تنتمي AB إلى K. أيضاً، $\det A^{-1} = 1/\det A = 1$، وبذلك تنتمي A^{-1} إلى K. إذن، تكون K زمرة جزئية. بالإضافة إلى ذلك، يكون لدينا $(X^{-1}AX) = 1$. وبالتالي، تنتمي $X^{-1}AX$ إلى K. وبذلك، تكون K زمرة جزئية ناظمية في G.

173.6 لتكن زمرة التباديل S_3، التي يظهر جدولها الضربي في شكل 6-9 هل الزمرة الجزئية $H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$ ناظمية؟

■ تكون المجموعات المصاحبة اليمنى واليسرى لـ H كما يلي:

المجموعات المصاحبة اليمنى	المجموعات المصاحبة اليسرى
$H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$	$H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$
$H\phi_1 = \{\phi_1, \sigma_2\}$	$\phi_1 H = \{\phi_1, \sigma_3\}$
$H\phi_2 = \{\phi_2, \sigma_3\}$	$\phi_2 H = \{\phi_2, \sigma_2\}$

بما أن $H\phi_1 \neq \phi_1 H$. إذن H ليست زمرة جزئية ناظمية في S_3.

174.6 بيّن أن أي الزمر جزئية H في زمرة أبلية G تكون ناظمية.

■ ليكن h أي عنصر في H، وليكن g أي عنصر في G. إذن، $g^{-1}hg = hg^{-1}g = h$ تنتمي إلى H. وبالتالي، تكون H زمرة جزئية ناظمية.

175.6 لتكن H زمرة جزئية، و K زمرة جزئية ناظمية، في G. اثبت أن HK زمرة جزئية في G [راجع المسألة 165.6].

■ يجب أن نبين أن $e \in HK$ وأن HK مغلقة تحت عملية الضرب والمعكوسات. بما أن H و K زمرتان جزئيتان، إذن $e \in H$ و $e \in K$. وبالتالي، $e = ee$ تنتمي إلى HK. ليكن x و y عنصرين في HK. إذن، $x = h_1k_1$ و $y = h_2k_2$ حيث $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. إذن

$$xy = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2(h_2^{-1}k_1h_2)k_2$$

بما أن K ناظمية، إذن $h_2^{-1}k_1h_2 \in K$؛ وبما أن H و K زمرتان جزئيتان، إذن $h_1h_2 \in H$ و $(h_2^{-1}k_2h_2)k_2 \in K$. وبذلك، $xy \in HK$، وبالتالي تكون HK مغلقة تحت الضرب. لدينا أيضاً أن

$$x^{-1} = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1k_1^{-1}h_1^{-1})$$

بما أن K زمرة جزئية ناظمية، إذن تنتمي $h_1k_1^{-1}h_1^{-1}$ إلى K. أيضاً، تنتمي h_1^{-1} إلى H. وبذلك، $x^{-1} \in HK$، أي أن HK مغلقة تحت عملية المعكوسات. وبالتالي، تكون HK زمرة جزئية.

المبرهنة التالية تعرّف «زمرة خوارج القسمة»، G/H المقابلة لزمرة جزئية ناظمية H في G.

المبرهنة 8.6: لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G. إذن، تشكل المجموعات المصاحبة لـ H في G زمرة تحت عملية «ضرب المجموعات المصاحبة»، والمعرّفة بواسطة $(aH)(bH) = abH$.

176.6 اثبت المبرهنة 8.6.

▩ إن عملية ضرب المجموعات المصاحبة معرّفة جيداً، لأن

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = ab(HH) = abH$$

[أستخدمنا هنا حقيقة أن H ناظمية، أي أن $Hb = bH$، وأن $HH = H$ (مسألة 167.6)]. تتبع خاصية التجميع لضرب المجموعات المصاحبة من حقيقة أن هذه الخاصية متحققة في G. كما أن H هي عنصر المطابقة في G/H، لأن

$$(aH)H = a(HH) = aH \quad \text{و} \quad H(aH) = (Ha)H = (aH)H = aH$$

أخيراً، يكون $a^{-1}H$ معكوساً لـ aH لأن

$$(a^{-1}H)(aH) = a^{-1}aH = eH = H \quad \text{و} \quad (aH)(a^{-1}H) = aa^{-1}H = eH = H$$

وبذلك تكون G/H زمرة تحت عملية ضرب المجموعات المصاحبة.

177.6 لتكن **Z** زمرة الأعداد الصحيحة تحت الجمع، ولتكن H زمرة جزئية في Z متكونة من مضاعفات 5. بيّن أن H زمرة جزئية ناظمية في **Z**، وأوجد زمرة خوارج القسمة Z/H.

▩ بما أن **Z** أبيلية، فإن H تكون زمرة جزئية ناظمية. ليكن $\bar{0}$، $\bar{1}$، $\bar{2}$، $\bar{3}$، و $\bar{4}$ ترمز على الترتيب للمجموعات المصاحبة الخمسة المذكورة في المسألة 159.6. يظهر الجدول الجمعي من أجل زمرة خوارج القسمة $Z/H = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ في الشكل 6-11. [هذه الزمرة تسمى عادةً «مجموعة الأعداد الصحيحة بمقاس 5» وتكتب غالباً Z_5].

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

شكل 6-11

178.6 عرّف «تشاكل زمرة». عرّف أيضاً التشاكل التقابلي (التماكل) للزمر.

▩ نقول عن تطبيق g من زمرة G [بعملية ✻] إلى زمرة G′ [بعملية ✻′] أنه تشاكل إذا

$$f(a * b) = f(a) *' f(b)$$

من أجل كل a، b في G. أضف إلى ذلك، إذا كانت f واحد ـ لواحد رفوفية فإن f تكون تشاكلاً تقابلياً (تماكلاً)، ونقول أن G و G′ متشاكلان تقابليا (متماكلان)، ونكتب، $G \simeq G'$.

179.6 لتكن G زمرة الأعداد الحقيقية تحت الجمع، ولتكن G′ زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت الضرب. بيّن أن التطبيق $f: G \to G'$ المعرّف بواسطة $f(a) = 2^a$ تشاكل. هل هو تشاكل تقابلي (تماكل)؟

▩ التطبيق f تشاكل لأن $f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a2^b = f(a)f(b)$. كما أنه تشاكل تقابلي، لأن f دالة واحد ـ لواحد وفوقية.

180.6 لتكن G زمرة المصفوفات الحقيقية المربعة -n تحت الجمع. بيّن أن دالة الاثر تشاكل من G إلى زمرة الأعداد الحقيقية R تحت الجمع.

▩ لتكن A و B مصفوفتين في G. إذن، $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. وبالتالي، تكون دالة المحددة تشاكلاً.

181.6 لتكن G زمرة المصفوفات المربعة -n تحت الضرب لأعداد حقيقية غير شاذة. برهن أن دالة المحددة تشاكل من G إلى زمرة الأعداد الحقيقية غير الصفرية G' تحت الضرب.

■ لتكن A و B مصفوفتين في G. إذن $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. إذن تكون دالة المحددة تشاكلاً.

182.6 أعطينا تشاكلاً $f: G \to G'$، بيّن أن $f(e) = e'$ حيث e و e' عنصرا المطابقة في G و G' على الترتيب.

■ بما أن $e = e * e$ و f تشاكل، إذن $f(e) = f(e * e) = f(e) *' f(e)$. وبالتالي، $e' = f(e)^{-1} *' f(e) = [f(e)^{-1} *' f(e)] *' f(e) = e' * f(e) = f(e)$.

183.6 أعطينا تشاكلا $f:G \to G'$، بيّن أن $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$، من أجل أي عنصر a في G.

■ من المسالة 182.6،

$$f(a) *' f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e) = e' = f(e) = f(a^{-1} * a) = f(a^{-1}) *' f(a)$$

إذن، $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

184.6 عرّف «النواة» أو «الصورة» التشاكل الزمري $f:G \to G'$.

■ تعرف نواة f، وتكتب $\operatorname{Ker} f$، بأنها مجموعة العناصر التي صورتها e' في G': $\ker f = \{a \in G : f(a) = e'\}$.
وتعرّف صورة f، وتكتب $f(G)$ أو $\operatorname{Im} f$، بأنها مجموعة صور عناصر G تحت f:

لقيمة: $\operatorname{Im} f = \{b \in G' :\ b = f(a) \quad a \in G\}$

[يستخدم أيضاً المصطلح «مدى» من أجل صورة].

المبرهنة 9.6: ليكن $f: G \to G'$ تشاكلاً بنواة K. إذن، (i) K زمرة جزئية ناظمية في G، و (ii) زمرة خوارج القسمة G/K متشاكلة تقابلياً (متماكلة) مع صورة f.

185.6 اثبت (i) في المبرهنة 9.6.

■ مـن المسـالـة 182.6، $f(e) = e'$، وبـذلـك $e \in K$. لنفتـرض الآن أن $a, b \in K$ و $g \in G$. إذن $f(a) = e'$ و $f(b) = e'$. وبالتالي، وباستخدام ترميز التجاور/ juxtaposition للدلالة على عمليتي الزمرتين]:

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(a)f(b) = e'e' = e' \\ f(a^{-1}) &= f(a)^{-1} = e'^{-1} = e' \\ f(gag^{-1}) &= f(g)f(a)f(g^{-1}) = f(g)e'f(g)^{-1} = e' \end{aligned}$$

إذن، a^{-1}، و gag^{-1} تنتميان إلى K، وبذلك تكون K ناظمية.

186.6 اثبت (ii) في المبرهنة 9.6.

■ لتكن $H \subseteq G'$ صورة f، وعرّف تطبيقاً $\phi: G/K \to H$ بواسطة $\phi(Ka) = f(a)$. نبين أن ϕ معرّف جيداً؛ أي إذا $Ka = Kb$ فإن $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. لنفترض أن $Ka = Kb$. إذن $ab^{-1} \in K$ [المسالة 168.6]. إذن، $f(ab^{-1}) = e'$، وبذلك

$$f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = e'$$

وبالتالي $f(a) = f(b)$، وبذلك $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. وهكذا، يكون ϕ معرّفاً جيداً. نبين بعد ذلك أن ϕ تكون تشاكلاً:

$$\phi(KaKb) = \phi(Kab) = f(ab) = f(a)f(b) = \phi(Ka)\phi(Kb)$$

وبالتالي، يكون هذا التطبيق تشاكلا. نبين الآن أن ϕ واحد ـ لواحد. لنفرض أن $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. إذن

$$f(a) = f(b) \quad \text{أو} \quad f(a)f(b)^{-1} = e' \quad \text{أو} \quad f(a)f(b^{-1}) = e' \quad \text{أو} \quad f(ab^{-1}) = e'$$

وهكذا $ab^{-1} \in K$، ومنها، باستخدام المسالة 168.6 مرة أخرى، يكون $Ka = Kb$. وبذلك، يكون ϕ واحداً ـ لواحد. أخيراً، بيّـن أن ϕ تطبيـق فـوقـي. لتكـن $h \in H$. بمـا أن H صـورة f، يـوجـد إذن $a \in G$ بحيـث أن $f(a) = h$. وبـذلـك، $\phi(Ka) = f(a) = h$؛ أي أن التطبيق فوقي. نستنتج من ذلك أن $G/K \cong H$، وهذا يكمل البرهان.

المسائل 187.6-189.6 تتعلق بـزمر التطبيقات التالية:

$G =$ زمرة الأعداد العقدية غير الصفرية تحت الضرب،

$G' =$ زمرة الأعداد الحقيقية غير الصفرية تحت الضرب، $f: G \to G'$ معرّف بواسطة $f(z) = |z|$.

187.6 بيّن أن f تشاكل زمري.

▩ $f(z_1z_2) = |z_1z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1)f(z_2)$.

188.6 صف هندسياً النواة K للتشاكل f.

▩ تتكون K من تلك الأعداد العقدية التي تحقق $|z| = 1$ ؛ أي أن K دائرة الوحدة.

189.6 صف زمرة خوارج القسمة G/K.

▩ G/K متشاكلة تقابلياً (متماثلة) مع صورة f، وهي زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت الضرب.

190.6 بيّن أن أي زمرة دورية تكون متشاكلة تقابلياً إما مع مجموعة الأعداد الصحيحة Z تحت الجمع أو مع Z_m مجموعة الأعداد الصحيحة تحت الجمع بمقاس m.

▩ لتكن a أي عنصر في زمرة G. أن الدالة $f: Z \to G$ المعرّفة بواسطة $f(n) = a^n$ تكون تشاكلاً، لأن $f(m+n) = a^{m+n} = a^m.a^n = f(m)f(n)$. وتكون gp(a) صورة f، وهي زمرة جزئية دورية مولّدة بواسطة a. وبذلك، $gp(a) \simeq Z/K$، حيث K نواة f. إذا $K = \{0\}$، إذن $gp(a) \simeq Z$. من جهة أخرى، إذا كانت m مرتبة a، فإن K={ مضاعفات m} ، وبذلك $gp(a) \simeq Z_m$.

7.6 الحلقات والمثاليات

191.6 عرّف «حلقة».

▩ لتكن R مجموعة غير فارغة بعمليتين ثنائيتين، عملية جمع (نرمز لها بـ +) وعملية ضرب (نرمز لها بتجاور الرموز). إذن، تسمى R «حلقة» تحقق الموضوعات التالية:

$[R_1]$ من أجل أي $a,b,c \in R$، لدينا $(a+b)+c = a+(b+c)$.

$[R_2]$ يوجد عنصر $0 \in R$، يسمى العنصر الصفري، بحيث أن $a+0 = 0+a = a$ من أجل كل $a \in R$.

$[R_3]$ من أجل أي $a \in R$ يوجد عنصر $-a \in R$ ، يسمى «سالب» a بحيث أن $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

$[R_4]$ من أجل أي $a,b \in R$، لدينا $a+b = b+a$.

$[R_5]$ من أجل أي $a,b,c \in R$، لدينا $(ab)c = a(bc)$.

$[R_6]$ من أجل أي $a,b,c \in R$، لدينا:

(i) $a(b+c) = ab+ac$، (ii) $(b+c)a = ba+ca$

إن الموضوعات من $[R_1]$ إلى $[R_4]$ تجعل R زمرة أبيلية تحت الجمع.

192.6 كيف تعرّف الطرح في حلقة R؟

▩ $a - b \equiv a + (-b)$

193.6 عرّف «حلقة تبديلية».

▩ تكون حلقة R «تبديلية» إذا $ab = ba$ من أجل كل $a,b \in R$.

194.6 عرّف «عنصر محايد» في حلقة R.

▩ نقول عن عنصر غير صفري $1 \in R$ أنه «عنصر محايد» إذا $a.1 = 1.a = a$ من أجل كل عنصر $a \in R$.

195.6 لتكن R حلقة ذات عنصر مطابقة 1. عرف «وحدة» على R.

■ يكون عنصر $a \in R$، وحدة إذا كان له معكوس ضربي، $a^{-1} \in R$، بحيث أن $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

196.6 لتكن حلقة الاعداد الصحيحة **Z**. (أ) هل **Z** تبديلية؟ (ب) هل لـ **Z** عنصر وحدة؟ (ج) ما هي الوحدات في **Z**؟

■ (أ) **Z** حلقة تبديلية لأن $ab = ba$ لأي عددين صحيحين $a,b \in \mathbf{Z}$. (ب) العنصر 1 هو عنصر وحدة في **Z**، (ج) الوحدتان الوحيدتان في **Z** هما 1 و -1.

197.6 أوجد الوحدات في $\mathbf{Z}_m$، حلقة الأعداد بمقاس m.

■ إذا كان a وحدة في $\mathbf{Z}_m$، إذن $a^{-1}a \equiv 1 \pmod m$، أو في z،

$$a^{-1}a = 1 + rm \qquad \text{أو} \qquad a^{-1}a - rm = 1$$

في **Z**. يبين هذا أن أي قاسم مشترك لـ a و m لا بد أن يقسم 1؛ أي أن a و m أوليان نسبياً. وبالعكس، إذا كان a و m أولين نسبياً في **Z**، فإن

$$1 = \gcd(a,m) = pa + qm \qquad \text{أو} \qquad pa \equiv 1 \pmod m$$

وهذا يبين أن a وحدة في $\mathbf{Z}_m$ [لمعكوس p]. إذن، وحدات $\mathbf{Z}_m$ هي تلك الأعداد الصحيحة التي تكون أولية بالنسبة إلى m.

198.6 أوجد -3، -8، 3^{-1} في $\mathbf{Z}_{10}$.

■ نعني بـ $(-a)$ في حلقة R ذلك العنصر الذي يحقق $a + (-a) = (-a) + a = 0$. وبالتالي، فإن $-3 = 7$ لأن $3 + 7 = 7 + 3 = 0$ في $\mathbf{Z}_{10}$. بالمثل، $-8 = 2$. ونعني بـ a^{-1} في حلقة R ذلك العنصر الذي يحقق $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$. وبالتالي، فإن $3^{-1} = 7$ لأن $3.7 = 7.3 = 1$ في $\mathbf{Z}_{10}$.

199.6 لتكن $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$. أوجد جذور $f(x)$ فوق $\mathbf{Z}_{10}$.

■ نعوض بالعناصر العشرة لـ $\mathbf{Z}_{10}$ في $f(x)$ لنرى أيها يعطي 0. لدينا:

$$f(0) = 4,\quad f(2) = 0,\quad f(4) = 2,\quad f(6) = 0,\quad f(8) = 4$$
$$f(1) = 0,\quad f(3) = 4,\quad f(5) = 4,\quad f(7) = 0,\quad f(9) = 2$$

وبذلك، فإن الجذور هي 1، 2، 6، 7. [يبين هذا المثال أنه قد يكون لحدودية من الدرجة n أكثر من n جذراً فوق حلقة اختيارية. هذا لا يمكن أن يحدث إذا كانت الحلقة حقلاً.]

المسائل 200.6-202.6 تتعلق بالحلقة R للمصفوفات الحقيقية المربعة -n.

200.6 هل R تبديلية؟

■ لا؛ ضرب المصفوفات ليس تبديلياً.

201.6 هل لـ R عنصر محايد؟

■ نعم؛ للمصفوفة المتطابقة I.

202.6 أوجد الوحدات في R.

■ كل المصفوفات غير الشاذة أو العكوسة هي وحدات في R.

203.6 اثبت أن $a.0 = 0.a = 0$ في حلقة R.

■ بما أن $0 + 0 = 0$، لدينا $a.0 = a(0 + 0) = a.0 + a.0$. بإضافة $-(a.0)$ إلى الطرفين نحصل على $0 = a.0$. وبالمثل، $0.a = 0$.

204.6 بين أن «السوالب» وحيدة في أي حلقة.

■ إذا أعطينا عنصراً a، نفترض عنصراً x بحيث أن $a + x = 0$ [وهذا يقود مباشرة إلى $x + a = 0$]. لدينا:

$$a = -a + 0 = -a + (a + x) = (-a + a) + x = 0 + x = x -$$

205.6 بين أن $a(-b) = (-a)b = -ab$ في حلقة R.

■ $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a.0 = 0$، وبالتالي [المسألة 204.6]، $a(-b) = ab$ بالمثل، $(-a)b = -ab$.

206.6 بين أن $(-1)a = -a$ في حلقة ذات عنصر محايد 1.

■ $a + (-1)a = 1.a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0.a = 0$؛ وبالتالي $(-1)a = -a$ [المسألة 204.6].

207.6 لتكن R حلقة ذات عنصر محايد 1. بين المجموعة R^* للوحدات في R تشكل زمرةً تحت الضرب.

■ إذا كان a و b وحدتين في R، فإن ab وحدة أيضاً، لأن $b^{-1}a^{-1}$ معكوس ab. وبذلك، تكون R^* مغلقة تحت الضرب. كما أن R^* ليست خالية، لأن $1 \in R^*$؛ وهي تجميعية لأن R تجميعية. أخيراً، إذا a وحدة في R، فكذلك الأمر لـ a^{-1} [لأن له معكوساً a]؛ نتيجة لذلك، تكون R^* مغلقة بالنسبة للمعكوسات. إذن، تكون R^* زمرة تحت الضرب.

208.6 عرّف «حلقة جزئية» في حلقة R.

■ تكون مجموعة جزئية غير فارغة S زمرة جزئية في R إذا كانت هي نفسها تشكل زمرة تحت عملية R. من الواضح أن S تكون حلقة جزئية في R إذا وفقط إذا $a,b \in S$ يقتضي $a - b \in S$ و $ab \in S$. [الإغلاق تحت الطرح يقتضي تضمين 0، وتضمين السوالب، وبالتالي الإغلاق تحت الجمع.]

209.6 عرّف «مثالياً» في حلقة R.

■ تكون مجموعة جزئية J مثالياً في R إذا:

(i) $0 \in j$ (أو: j ليست خالية).

(ii) j مغلقة تحت الطرح؛ أي أن $a - b \in j$ من أجل أي a، b في J.

(iii) j مغلقة بالنسبة للمضاعفات من R؛ أي أن $ra, ar \in J$ من أجل a في J، و r في R. بالنسبة إلى (iii)، تسمى J مثالياً أيسر فقط إذا $ra \in J$، ومثالياً أيمن فقط إذا $ar \in J$. وبذلك، فإن المصطلح مثالي سوف يعني مثالياً من الجانبين، كما أعلاه. في حالة حلقة تبديلية، أي مثالي أيسر أو أيمن يكون مثالياً.

210.6 بيّن أن $\{0\}$ مثالي في أي حلقة R.

■ يتبع ذلك من حقيقة أن $0 - 0 = 0$ ينتمي إلى $\{0\}$، ومن أجل أي $r \in R$، يكون لدينا $r.0 = 0.r = 0$ ينتمي إلى $\{0\}$.

211.6 لتكن Z حلقة الأعداد الصحيحة، و J_m متكونة من مضاعفات $m \geqslant 2$. بين أن J_m مثالي في Z.

■ من الواضح أن $0 \in J_m$. لنفترض أن ma و mb عنصران اختياريان في J_m. إذن، $ma - mb = m(a - b)$ ينتمي أيضاً إلى J_m. أيضاً، من أجل كل $r \in Z$، لدينا $r(ma) = (ma)r = m(ar)$ كعنصر في J_m. وبذلك، يكون J_m مثالياً في Z.

212.6 لتكن M حلقة المصفوفات الحقيقية 2×2. أعط مثالاً لمثالي أيسر J، لا يكون مثالياً أيمن، ومثالي أيمن K، لا يكون مثالياً أيسر.

■ $$K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad J = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\}$$

213.6 ليكن J و K مثاليين في R. اثبت أن $J \cap K$ مثالي في R.

■ بما أن J و K مثاليان، إذن $0 \in J$ و $0 \in K$، وبالتالي $0 \in J \cap K$. ليكن الآن $a,b \in J \cap K$ و $r \in R$. إذن $a,b \in J$ و $a,b \in K$. لأن J و K مثاليان.

$$a - b, ra, ar \in J \quad \text{و} \quad a - b, ra, ar \in K$$

وبالتالي $a - b, ra, ar \in J \cap K$. إذن، يكون $J \cap K$ مثالياً.

214.6 ليكن J مثاليا في حلقة R ذات عنصر مطابقة 1. اثبت: (أ) إذا $1 \in J$ إذن $J = R$. (ب) إذا كان أي عنصر وحدة $u \in J$ إذن $J = R$.

■ (أ) إذا $1 \in J$، إذن لدينا $r.1 \in J$، أو $r \in J$، من أجل أي $r \in R$، وبالتالي $J = R$. (ب) إذا $u \in J$، أو $r \in J$، إذن $u^{-1}.u \in J$، أو $1 \in J$. وبالتالي، $J = R$، باستخدام (أ).

تستخدم المبرهنة التالية حقيقة أن مثالياً J في حلقةٍ R يكون زمرة جزئية [ناظمية بالضرورة] في الزمرة الجمعية لـ R. وبذلك، يشكل تجميع المجموعات المصاحبة $\{a + J: a \in R\}$ تجزئة لـ R.

المبرهنة 10.6: ليكن J مثاليا في حلقة R. إذن، تشكل المجموعات المصاحبة $\{a + J: a \in R\}$ حلقة تحت عمليتي المجموعات المصاحبة:

$$(a + J) + (b + J) = (a + b) + J \quad \text{و} \quad (a + J)(b + J) = ab + J$$

215.6 اثبت المبرهنة 10.6، [يرمز لحلقة المجموعات المصاحبة بـ R/J وتسمى حلقة خوارج القسمة].

■ تبين النظرية المناظرة 8.6 من أجل الزمر أن R/J زمرة تبديلية تحت الجمع، بحيث يكون J عنصرها الصفري. وتكون عملية ضرب المجموعات المصاحبة معرّفة جيداً، لأن

$$(a + J)(b + J) = ab + aJ + Jb + JJ \subseteq ab + J + J + J \subseteq ab + J$$

إن قانوني التجميع والتوزيع صالحان في R/J، لأنهما صالحان في R. وبذلك، تكون R/J حلقة.

216.6 لنفترض أن J مثالي في حلقة تبديلية R. بيّن أن R/J تبديلية.

■ $(a + J)(b + J) = ab + J = ba + J = (b + J)(a + J)$

217.6 لنفترض أن J مثالي في حلقة R بعنصر محايد 1، وأن $1 \notin J$. بيّن أن $1 + J$ عنصر محايد من أجل R/J.

■ لدينا، من أجل أي مجموعة مصاحبة $a + J$، أن $(a + J)(1 + J) = a.1 + J = a + J$ و $(1 + J)(a + J) = 1.a + J = a + J$. وبذلك، يكون $1 + J$ عنصراً محايداً في R/J.

218.6 عرّف «التشاكل الحلقي» و «التشاكل التقابلي (التماكل)» الحلقي.

■ نقول عن تطبيق f من حلقة R إلى حلقة R′ بأنه «تشاكل» إذا $f(a + b) = f(a) + f(b)$ و $f(ab) = f(a)f(b)$، من أجل كل $a,b \in R$. [رغم الترميز لهما بشكل مماثل، إلا أن عمليتي الحلقة على R′ تكونان عموماً مختلفتين عن العمليتين على R.] إضافة إلى ذلك، إذا كان f واحداً ـ لواحد وفوقياً، فإننا نقول أن f «تشاكل تقابلي (تماكل)».

219.6 ناقش العلاقة بين التشاكلات الحلقية والزمرية [قسم 6.6]، واذكر المناظر الحلقي للمبرهنة 9.6.

■ إن تشاكلا حلقياً $f: R \to R'$ هو تشاكل زمري على البنيتين الجمعيتين لـ R و R′. وبذلك، $f(0) = 0'$. إذا كان لـ R و R′ عنصرين محايدين 1 و 1′، على الترتيب، فإننا نتطلب أيضاً أن $f(1) = 1'$، وذلك لكي يكون f تشاكلا حلقياً. نعرّف أيضاً نواة f بواسطة $\text{Ker } f = \{a \in R: f(a) = 0'\}$.

المبرهنة التالية هي النظرية الأساسية للتشاكل الحلقي.

المبرهنة 11.6: ليكن $f: R \to R'$ تشاكلا حلقياً بنواة J. إذن، تكون J مثالياً في R، وتكون R/J متشاكلة تقابلياً (متماكلة) مع صورة f.

220.6 لتكن الحلقتان $R = 2Z$ و $R' = 3Z$ [أي أن R تتكون من كل مضاعفات 2، وتتكون R′ من كل مضاعفات 3]. بيّن أن R ليست متشاكلة تقابلياً مع R′.

■ إذا كان $f: R \to R'$ تشاكلاً حلقياً، فإن $f(2) = 3k$، من أجل بعض عدد صحيح k. بما أن f تشاكل، إذن $f(4) = f(2 + 2) = f(2) + f(2) = 3k + 3k = 6k$؛ كما أن $f(4) = f(2.2) = f(2).f(2) = (3k).(3k) = 9k^2$. ولكن $9k^2 = 6k$ وكون k عدداً صحيحاً يقتضيان معاً أن $k = 0$. وبالتالي، $f(2) = 0$. ولكن $f(0) = 0$. وبذلك، لا تكون f تشاكلاً تقابلياً (تماكلاً).

المسائل 221.6-223.6 تتعلق بمثالي J في حلقة R، والتطبيق (القانوني) $f:R \to R/J$ (تذكر النظرية 10.6) المعرّف بواسطة $f(a) = a + J$.

221.6 بيّن أن f تشاكل حلقي.

■ $$f(a + b) = (a + b) + J = (a + J) - (b + J) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = ab + J = (a + J)(b + J) = f(a)(b)$$

222.6 بيّن أن f تطبيق فوقي.

■ إن أي مجموعة مصاحبة $a + J$ في R/J صورة لـ $a \in R$.

223.6 أوجد النواة K لـ f.

■ العنصر الصفري لـ R/J هو J. وبذلك، تتكون K من تلك العناصر a في R التي تحقق $f(a) = J$، أو $a + J = J$، ولكن $a + J = J$ إذا وفقط إذا كان a في J. إذن، يكون J نواة f.

8.6 الحلقات الصحيحة، المناطق المثالية الرئيسية، مناطق التحليل الوحيدة إلى عوامل أولية

نفترض أن كل الحلقات R في هذا القسم، والقسم 9.6، تكون تبديلية ولها عنصر محايد 1، إلا إذا ذكر غير ذلك.

224.6 عرّف «قاسماً للصفر» في حلقة R.

■ يكون عنصر غير صفري $a \in R$ قاسماً للصفر إذا وجد عنصر غير صفري b بحيث أن $ab = 0$.

225.6 عرّف «حلقة صحيحة».

■ تكون حلقة تبديلية D بعنصر محايد «حلقة صحيحة» إذا لم يكن لـ D قواسم للصفر.

226.6 بيّن أن الحلقة Z_{105} للأعداد الصحيحة بمقاس 105 ليست حلقة صحيحة.

■ كل Z_m، ذات m مركبة، تمتلك قواسم للصفر؛ لأن $m = ab\ (1 < a, b < m)$ تقتضي $ab = 0$ في Z_m.

227.6 بيّن أن الحلقة Z_{29} للأعداد الصحيحة بمقاس 29 حلقة صحيحة.

■ بعكس المسألة 226.6، إذا كان m عدداً أولياً، فإنه لا يكون لـ Z_m قواسم للصفر. في الحقيقة، لدينا من أجل $1 < a, b < m$.

$$ab = 0 + km \Rightarrow m \mid a \quad \text{أو} \quad m \mid b \Rightarrow a = 0 \quad \text{أو} \quad b = 0$$

228.6 لنفترض أن D حلقة صحيحة. بيّن أنه إذا $ab = ac$، من أجل $a \neq 0$، إذن $b = c$.

■ إذا $ab = ac$، إذن $ab - ac = 0$، وبذلك $a(b - c) = 0$. بما أن $a \neq 0$، وليس لـ D قواسم للصفر، فيجب أن يكون لدينا $b - c = 0$ أو $b = c$ كما زعمنا. وبذلك، فإن الضرب في D يخضع لـ «قانون الاختصار».

229.6 عرّف «مثاليا رئيسياً» في حلقة تبديلية R بعنصر مطابقة 1.

■ ليكن a أي عنصر في R. إذن، تكون المجموعة $(a) = \{ra : r \in R\}$ وتسمى «المثالي الرئيسي المولَّد بواسطة a».

230.6 ما هو PID؟

■ PID اختصار لـ Principal Ideal Domain/ منطقة مثالية رئيسية. وتكون حلقة R منطقة مثالية رئيسية PID، إذا كانت R حلقة صحيحة وكان كل مثالي في R رئيسياً.

231.6 بيّن أن Z هو PID.

■ Z حلقة صحيحة، لأنه ليس لها قواسم للصفر. لنفرض أن J مثالي في Z. إذا $J = \{0\}$، إذن $J = (0)$، أي المثالي المولّد بواسطة 0. لنفرض أن $J \neq \{0\}$، وأن $x \neq 0$ تنتمي إلى J. إذن $-x = (-1)x$ تنتمي إلى J؛ وبالتالي، تحتوي J عدداً صحيحاً موجباً واحداً على الأقل. ليكن a أصغر عدد صحيح موجب في J [تذكر المسألة 18.6]. سنبين أن $J = (a)$؛ أي أن J تتكون من مضاعفات a. لنفترض أن $x \in J$. نحصل بواسطة خوارزمية القسمة على $x = qa + r$، حيث $0 \leqslant r \leqslant a$. بما أن J مثالي و $a, x \in J$، يكون لدينا أن $r = x - qa$ تنتمي إلى J. بما أن a أصغر عدد صحيح موجب في J و $r < a$، يجب أن يكون لدينا $r = 0$، وهذا يجعل x مضاعفاً لـ a. وبذلك، $J = (a)$، وبالتالي تكون Z منطقة مثالية رئيسية PID.

232.6 عرّف «العناصر المتشاركة» في حلقة R.

■ نقول عن عنصر $b \in R$ أنه مشارك لـ $a \in R$ إذا $b = ua$ من أجل عنصر وحدة $u \in R$.

233.6 أوجد العناصر المشاركة لـ 4 في Z_{10} (الأعداد الصحيحة بمقاس 10).

■ الوحدات في Z_{10} هي 1، 3، 7، 9 [أنظر مسألة 197.6]. نضرب 4 في كل واحدة من الوحدات فنحصل على $1.4 = 4$، $3.4 = 2$، $7.4 = 8$، $9.4 = 6$. [أجريت عمليات الضرب بمقاس 10]. إذن، تكون 2، 4، 6، 8 العناصر المشاركة لـ 4 في Z_{10}.

234.6 أوجد العناصر المشاركة لـ 5 في Z_{10}.

■ نضرب 5 في كل واحدة من الوحدات فنحصل على $1.5 = 5$، $3.5 = 5$، $7.5 = 5$، $9.5 = 5$. وبذلك، 5 هو العنصر الوحيد المشارك لـ 5 في Z_{10}.

235.6 بيّن أن علاقة المشاركة علاقة تكافؤ في حلقة R.

■ أن أي عنصر a مشارك لنفسه لأن $a = 1.a$ [قانون الانعكاس]. لنفترض أن b عنصر مشارك لـ a. إذن، $b = ua$ حيث u عنصر وحدة. إذن، $a = u^{-1}b$ حيث u^{-1} عنصر وحدة؛ وبالتالي، يكون a عنصراً مشاركاً لـ b [قانون التناظر]. لنفترض، أخيراً، أن a عنصر مشارك لـ b، و b عنصر مشارك لـ c: $a = u_1b$ و $b = u_2c$، حيث u_1 و u_2 عنصرا وحدة. إذن، $a = u_1(u_2c) = (u_1u_2)c$، حيث u_1u_2 عنصر وحدة أيضاً. وبالتالي، يكون a عنصراً مشاركاً لـ c [قانون التعدي].

236.6 عرّف «عنصراً غير خزول» في حلقة صحيحة D.

■ ليكن $p \in D$ عنصراً غير عنصر وحدة؛ يكون p غير خزول إذا كان $p = ab$ يقتضي أن a أو b عنصر وحدة. [من الواضح أن هذا توسيع بمفهوم «الأعداد الأولية» في Z].

237.6 عرّف «حلقة التحليل الوحيد إلى عوامل أولية» UFD.

■ تكون حلقة صحيحة D حلقة تحليل وحيد إلى عوامل أولية UFD إذا أمكن كتابة كل عنصر غير ـ وحدة $a \in D$، وبشكل وحيد [مع فارق العناصر المشاركة والمرتبة] كجداء لعناصر غير خزولة.

238.6 أوجد العناصر المشاركة لـ n في Z.

■ الوحدتان الوحيدتان في Z هما 1 و -1 [مسألة 196.6]. وبالتالي، يكون n و $-n$ العنصرين المشاركين الوحيدين لـ n.

239.6 ما هي العناصر غير الخزولة في Z؟

■ الأعداد الأولية [وسالباتها] هي العناصر غير الخزولة في Z.

240.6 عبر عن 12 في Z كجداء لعناصر غير خزولة.

■ يوجد 12 من هذه الجداءات:

$$\begin{aligned}12 &= 2\cdot 2\cdot 3 = (-2)\cdot(-2)\cdot 3 = (-2)\cdot 2\cdot(-3) = 2\cdot(-2)\cdot(-3)\\ &= 2\cdot 3\cdot 2 = (-2)\cdot(-3)\cdot 2 = (-2)\cdot 3\cdot(-2) = 2\cdot(-3)\cdot(-2)\\ &= 3\cdot 2\cdot 2 = (-3)\cdot(-2)\cdot 2 = (-3)\cdot 2\cdot(-2) = 3\cdot(-2)\cdot(-2)\end{aligned}$$

241.6 هل Z حلقة تحليل وحيد إلى عوامل أولية؟

■ نعم. [رغم أنه يمكن كتابة 12، الخ بطرق عديدة كجداء لعناصر غير خزولة، إلا أن كل مثل هذه الجداءات لا تختلف إلا بالعناصر المشاركة والمرتبة].

242.6 إن المجموعة $D = \{a + b\sqrt{13};\ a,b \in z\}$ حلقة صحيحة. وحدات D هي ± 1 ، $18 \pm 5\sqrt{13}$ ، و $-18 \pm 5\sqrt{13}$ العناصر 2، $3 - \sqrt{13}$ ، و $-3 - \sqrt{13}$ غير خزولة في D. بيّن أن D ليست UFD.

■ $4 = 2.2$ و $4 = (3 - \sqrt{13})(-3 - \sqrt{13})$.

9.6 الحقول

243.6 عرّف «حقلاً».

■ نقول عن حلقة تبديلية F، بعنصر مطابقة 1، أنها «حقل» إذا كان كل عنصر غير صفري a في F عنصر وحدة. أو، بشكل بديل، يكون F حقلاً إذا كانت عناصره غير الصفرية تشكل زمرة تحت الضرب.

244.6 بيّن أن حقلاً F بكونه حلقة صحيحة؛ أي، ليس له قواسم للصفر.

■ إذا $ab = 0$ و $a \neq 0$، إذن $b = 1.b = a^{-1}ab = a^{-1}.0 = 0$.

245.6 أي المجموعات التالية تكون حقولاً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعتادين: الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$، الأعداد المنطقة $\mathbf{Q}$، الأعداد الصحيحة $\mathbf{R}$، الأعداد العقدية $\mathbf{C}$؟

■ $\mathbf{Z}$ مثال كلاسيكي للحلقات الصحيحة التي ليست حقولا [لأن 1 و 1 − هما الوحدتان الوحيدتان]. أما $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ فهي حقول.

246.6 لتكن S مجموعة الأعداد الحقيقية التي في الشكل $a + \sqrt{3}$ ، حيث a و b أعداد منطقة. بيّن أن S حقل.

■ تكون مجموعة S، من أعداد حقيقية أو عقدية، حقلاً إذا كانت تحتوي 0 و 1 وكانت مغلقة تحت الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة [ما عدا على الصفر]. بما أن $0 = 0 + 0\sqrt{3}$ و $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ ، فإن 0 و 1 ينتميان كلاهما إلى S. أيضاً:

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$$
$$(a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$$
$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

وبالتالي، تكون S مغلقة تحت الجمع، والطرح، والضرب. نبين الآن أن S مغلقة تحت القسمة [مما يجعل كل عنصر غير صفري عنصر وحدة]:

$$\frac{(a + b\sqrt{3})}{(c + d\sqrt{3})} = \frac{(a + b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})}{(c + d\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3}$$

وهكذا، تكون S حقلاً.

247.6 لتكن D حلقة المصفوفات الحقيقية 2×2 التي في الشكل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. بيّن أن D متشاكلة تقابلياً مع مجموعة الأعداد العقدية C، وبذلك تكون D حقلاً.

■ لتكن $f: \mathbf{C} \to D$ معرّفة بواسطة $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. من الواضح أن f واحد ـ لواحد وفوقية. لنفترض أن $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$؛ إذن،

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \qquad \text{و} \qquad z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

وبذلك،

$$f(z_1)+f(z_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}=f(z_1+z_2)$$

$$f(z_1)f(z_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}=f(z_1z_2)$$

أخيراً، $f(1) = f(1 + 0i) = I$، المصفوفة المتطابقة. وبذلك تكون f تماكلاً.

المبرهنة 12.6: إن حلقة صحيحة منتهية D تكون حقلاً.

248.6 اثبت المبرهنة 12.6.

■ لنفترض أن D لها n عنصراً، ولتكن $D = \{a_1,a_2,...,a_n\}$. ليكن a أي عنصر غير صفري في D، ولننظر في العناصر الـ n: $aa_1,aa_2,...,aa_n$. بما أن $a \neq 0$، يكون لدينا $aa_i = aa_j$ يقتضي $a_i = a_j$ [المسألة 244.6]. وبذلك، تكون العناصر الـ n أعلاه مختلفة، ولا بد أن تكون إعادة تنسيق لعناصر D. أحدها، وليكن aa_k، لا بد أن يساوي عنصر المطابقة 1 في D؛ أي أن $aa_k = 1$، وبذلك، يكون a_k معكوس a. بما أن a عنصر غير صفري إختياري في D، ينتج من ذلك أن D حقل.

249.6 بيّن أن Z_p، حيث P عدد أولي، تكون حقلاً.

■ Z_p حلقة صحيحة [المسألة 243.6] ومنتهية.

250.6 بيّن أن المثالي الوحيد J في حقل F هو $\{0\}$ أو الحقل F نفسه.

■ إذا $J \neq \{0\}$، إذن J تحتوي عنصراً غير صفري a. بما أن F حقل، إذن a عنصر وحدة. إذن، $J = F$ [مسألة 214.6 (ب)].

251.6 لنفترض أن $f: K \to K'$ تشاكل من حقل K إلى حقل K'. بيّن أن f تطبيق متباين؛ أي أن f واحد ـ لواحد.

■ إن $J = \operatorname{Ker} f$ مثالي في K، بواسطة المبرهنة 11.6. إذا $J = K$ إذن $f(1) = 0'$. ولكن، وبما أن f تشاكل، تتطلب $f(1) = 1'$. وبالتالي، $J \neq K$، وهكذا $J = \{0\}$ [المسألة 250.6]. لنفترض $f(a) = f(b)$. إذن، $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$، وبالتالي $a - b$ تنتمي إلى J، وهكذا $a - b = 0$ أو $a = b$. ينتج من ذلك أن f واحد ـ لواحد.

252.6 ليكن D حلقة صحيحة. عرّف «حقل خوارج القسمة» لـ D.

■ لتكن S مجموعة كل الأزواج المرتبة [خوارج القسمة] a/b، حيث $a,b \in D$، و $b \neq 0$. عرّف $a/b = c/d$ إذا $ad = bc$. [هذه علاقة تكافؤ]. لتكن F(D) صنف علاقات التكافؤ [a/b]، بعمليتي الجمع والضرب المعرّفتين بواسطة:

$$[a/b] + [c/d] = [(ad + bc)/(bd)] \quad \text{و} \quad [a/b].[c/d] = [(ac)/(bd)]$$

إذن، F(D) هو الحقل المطلوب.

253.6 ما هو حقل خوارج القسمة للحلقة الصحيحة Z للأعداد الصحيحة؟

■ $F(Z) = Q$، حيث Q حقل الأعداد المنطقة.

254.6 لتكن $K = D[x]$، حلقة الحدوديات في x بمعاملات حقيقية. ما هو حقل خوارج القسمة لـ K؟

■ F(K) هو حقل الدوال المنطقة من الشكل $f(x)/g(x)$ حيث f(x) و $g(x) \neq 0$ حدوديات.

255.6 لتكن D حلقة صحيحة. بيّن أنه يوجد تطبق متباين بحيث تكون صورة D في حقل خوارج القسمة f(D).

■ ليكن $f: D \to F(D)$ تطبيقاً معرّفاً بواسطة $f(a) = [a/1]$. إذن، f تطبيق متباين؛ أي أن f تشاكل وأن f واحد ـ لواحد. [مثلاً، نطابق عدداً صحيحاً n في Z مع الكسر n/1 في Q].

256.6 عرّف «مثاليا أعظمياً» K في حلقة R.

▩ يكون K مثالياً أعظمياً في R إذا $K \neq R$ وإذا لم يكن هناك أي مثالي J يقع فعلاً بين K و R؛ أي إذا كان $K \subseteq J \subseteq R$ يقتضي $K = J$ أو $J = R$.

257.6 لنفترض أن K مثالي أعظمي في حلقة تبديلية R بعنصر مطابقة 1. اثبت أن حلقة خوارج القسمة R/K تكون حقلاً.

▩ بما أن $K \neq R$، لدينا $1 \notin K$ [المسألة 214.6 (أ)]. من المسألة 217.6، تكون المجموعة المصاحبة $1 + K$ عنصر مطابقة من أجل R/K. ومن المسألة 216.6، تكون R/K تبديلية. يبقى أن نبين أن أي مجموعة، مصاحبة اخرى غير K [العنصر الصفري لـ R/K]، تمتلك معكوساً ضربياً في R/K. لنفترض أن $a + K \neq K$. إذن، $a \notin K$. لتكن $J = \{ra + sk: r,s \in R, k \in K\}$. إذن، J مثالي يحتوي a و K معاً. بما أن $a \notin K$، يكون لدينا $K \neq J$. وبذلك، وبما أن K أعظمي، فإن $J = R$. إذن، $1 \in J$، وهكذا يوجد $r_0, s_0 \in R$ و $k_0 \in K$ بحيث أن $1 = r_0a + s_0k_0$. ينتج من ذلك أن

$$1 + k = r_0a + s_0k_0 + K = r_0a + K = (r_0 + K)(a + K)$$

أي أن $r_0 + K$ هو المعكوس الضربي لـ $a + K$. وبذلك، تكون R/K حقلاً.

الفصل 7
الفضاءات والفضاءات الجزئية المتجهية

يتطلب تعريف فضاء متجهي حقلاً إختيارياً (أنظر قسم 9.6) تسمى عناصره «سلميات». نتبنى الترميز التالي (إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك):

K حقل السلميات

a, b, c, k عناصر K

V الفضاء المتجهي

u, v, w عناصر V.

ولن يفقد الموضوع جوهريته إذا افترض القارىء أن K هو حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ أو حقل الأعداد العقدية $\mathbf{C}$.

1.7 الفضاءات المتجهية

1.7 عرّف «فضاء متجهياً».

■ ليكن K حقلاً معلوماً، و V مجموعة غير خالية بقواعد الجمع والضرب السلمي اللتين تعرّفان من أجل كل $u, v \in V$ «مجموعاً» $u + v \in V$، ولكل $u \in V$ و $k \in K$ جداء $ku \in V$. إذن، نقول أن V «فضاء متجهي فوق K» (ونطلق على عناصر V اسم «متجهات») إذا تحققت الموضوعات التالية:

$[A_1]$: من أجل أي متجهات $u, v, w \in V$، $(u + v) + w = u + (v + w)$.

$[A_2]$: يوجد متجه في V، نرمز له بـ 0 ونسميه «المتجه الصفري»، يحقق $u + 0 = u$ من أجل أي متجه $u \in V$.

$[A_3]$: يوجد، من أجل كل متجه $u \in V$، متجه في V نرمز له بـ $-u$، يحقق $u + (-u) = 0$.

$[A_4]$: لدينا، من أجل أي متجهين $u, v \in V$، أن $u + v = v + u$.

$[M_1]$: من أجل أي سلمي $k \in K$ وأي متجهين $u, v \in V$، $k(u + v) = ku + kv$.

$[M_2]$: من أجل أي سلميين $a, b \in K$ وأي متجه $u \in V$، $(a + b)u = au + bu$.

$[M_3]$: من أجل أي سلميين $a, b \in K$ وأي متجه $u \in V$، $(ab)u = a(bu)$.

$[M_4]$: من أجل وحدة السلميات $1 \in K$، $1u = u$، من أجل أي متجه $u \in V$.

2.7 بيّن أنه في أي فضاء متجهي V يكون لدينا: (أ) أي مجموع متجهات $v_1 + v_2 + \dots + v_m$ لا يتطلب أقواساً ولا يعتمد على ترتيب الحدود المجموعة. (ب) المتجه الصفري 0 وحيد. (ج) السالب $-u$ لأي متجه u وحيد. (د) يتحقق قانون الاختصار، أي يكون لدينا من أجل أي متجهات $u, v, w \in V$، $u + w = v + w$ يقتضي $u = v$.

■ تبين الموضوعات الأربع الأولى للفضاء المتجهي V بأن V زمرة تبديلية تحت الجمع. والخواص المذكورة أعلاه تنتج من هذه الحقيقة.

3.7 كيف يعرّف الطرح في فضاء متجهي V؟

■ يعرف الطرح بواسطة $u - v = u + (-v)$.

4.7 في منطوق الموضوعة $[M_3]$، $(ab)u = a(bu)$، ما هي العملية التي يمثلها كل جداء؟

■ في $(ab)u$ يرمز الجداء ab للمسلمين a، b إلى الضرب في الحقل K، في حين أن الجداء بين السلمي ab والمتجه u يرمز إلى الضرب السلمي.

في (bu) يرمز الجداء bu بين السلمي b والمتجه u إلى الضرب السلمي؛ أيضاً، جداء السلمي a والمتجه bu يرمز إلى الضرب السلمي.

6.7 ليكن $V = K^n$، حيث K حقل إختياري. بين كيف نجعل V فضاء متجهياً فوق K.

■ نعرِّف الجمع والضرب السلمي بواسطة $(a_1,a_2,...,a_n) + (b_1,b_2,...,b_n) = (a_1 + b_1,a_1 + b_2,...,a_n + b_n)$ و $k(a_1,a_2,...,a_n) = (ka_1,ka_2,...,ka_n)$ حيث $a_i,b_i,k \in K$. ويكون المتجه الصفري في V هو نونية الأصفار، $0 = (0,0,...,0)$. إثبات أن $V = K^n$ فضاء متجهي مماثل للبراهين في قسم 3.1 من أجل R^n.

7.7 لتكن، مجموعة الأعداد الصحيحة بمقاس 3 سم عدد العناصر الموجودة في الفضاء المتجهي $V = K^4$.

■ هناك ثلاثة خيارات، 0، 1 أو 2 لكل مركبات متجه في V. وبالتالي V لها $3,3,3,3, = 3^4 = 81$ عنصراً.

8.7 لتكن V مجموعة كل المصفوفات $m \times n$ التي مداخلها في حقل إختياري K. بيِّن كيف تجعل V فضاء متجهياً.

■ إن V فضاء متجهي فوق K بالنسبة إلى عمليتي الجمع المصفوفي والضرب السلمي. إثبات هذه الحقيقة مماثل تماماً لإثبات مبرهنة 3.2 للمصفوفات $m{\times}n$ فوق R.

9.7 لتكن V مجموعة كل الحدوديات $a_0 + a_1t + a_2t^2 +...+ a_nt^n$ التي معاملاتها a_i من حقلٍ K. بيِّن كيف تجعل V فضاء متجهياً.

■ إن V فضاء متجهي فوق K بالنسبة إلى العمليتين المعتادتين لجمع الحدوديات والضرب في ثابت.

10.7 بيِّن أن $V = R^2$ ليست فضاءً متجهياً فوق R بالنسبة للعمليتين التاليتين للجمع المتجهي والضرب السلمي: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ و $k(a,b) = (ka,b)$. بيِّن أن واحدة من موضوعات الفضاءات المتجهية لا تتحقق هنا.

■ لتكن $r = 1$، $s = 2$، $v = (3,4)$. إذن

$$(r + s)v = 3(3,4) = (9,4)$$
$$rv + sv = 1(3,4) + 2(3,4) = (3,4) + (6,4) = (9,8)$$

بما أن $(r + s)v \neq rv + sv$، فإن الموضوعة $[M_2]$ لا تتحقق.

11.7 بيِّن أن $V = R^2$ ليست فضاء متجهياً R بالنسبة إلى العمليتين: $(a,b) + (c,d) = (a,b)$ و $k(a,b) = (ka,kb)$. بين أن واحدة من موضوعات الفضاءات المتجهية لا تتحقق.

■ لتكن $v = (1,2)$، $w = (3,4)$. إذن

$$v + w = (1,2) + (3,4) = (1,2)$$
$$w + v = (3,4) + (1,2) = (3,4)$$

بما أن $v + w \neq w + v$، فإن الموضوعة $[A_4]$ لا تتحقق.

12.7 بيِّن أن $V = R^2$ ليست فضاء متجهياً فوق R بالنسبة للعمليتين: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ و $k(a,b) = (k^2a,k^2b)$. بيِّن أن واحدة من موضوعات الفضاءات المتجهية لا تتحقق.

■ لتكن $r = 1$، $s = 2$، $v = (3,4)$. إذن

$$(r + s)v = 3(3,4) = (27,36)$$
$$rv + sv = 1(3,4) + 2(3,4) = (3,4) + (12,16) = (15,20)$$

وبذلك، $(r + s)\,v \neq rv + sv$، وهكذا لا تتحقق الموضوعة $[M_2]$.

13.7 لنفترض أن E حقل يحتوي حقلاً جزئياً K. بيِّن كيف يمكن النظر إلى E على أنه فضاء متجهي فوق K.

■ ليكن الجمع المعتاد في E جمعاً متجهياً، والجداء السلمي kv لـ $k \in K$ و $v \in E$ هو الجداء بين k و v كعنصرين في الحقل E. إذن، يكون E فضاء متجهياً فوق K.

14.7 هل الحقل الحقيقي R فضاء متجهي: (أ) فوق Q؟، (ب) فوق Z؟ (ج) فوق C؟

■ (أ) نعم، لان Q حقل جزئي في R، (ب) لا، لان Z ليس حقلاً. (ج) لا، لان C ليس حقلاً جزئياً في R.

15.7 هل الحقل العقدي C فضاء متجهي: (أ) فوق R؟، (ب) فوق Q؟ (ج) فوق Z؟ (د) فوق C؟

■ (أ) نعم، لأن **R** حقل جزئي في **C**. (ب) نعم، لأن **Q** حقل جزئي في **C**. (ج) لا، لأن **Z** ليست حقلاً. (د) نعم، كل حقل فضاء متجهي فوق نفسه.

16.7 هل Z_7 فضاء متجهي فوق Z_5؟

■ لا، $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ ليست حقلاً جزئياً في $Z_4 = \{0,1,2,...,6\}$ لأن العمليات مختلفة؛ مثلاً، $2 + 3 = 0$ في Z_5 ولكن $2 + 3 \neq 0$ في Z_7. وبالتالي، Z_7 ليست فضاء متجهياً فوق Z_5.

مبرهنة 1.7: ليكن V فضاء متجهياً فوق حقل K.
(i) من أجل أي سلّمي $k \in K$ و $0 \in V$، $k0 = 0$.
(ii) من أجل $0 \in K$ وأي متجه $u \in V$، $0u = 0$.
(iii) إذا $ku = 0$، حيث $k \in K$ و $u \in V$، إذن $k = 0$ أو $u = 0$.
(iv) من أجل أي $k \in K$ وأي $u \in V$، $(-k)u = k(-u) = -ku$.

17.7 اثبت (i) في المبرهنة 1.7: $k0 = 0$.

■ لدينا، من الموضوعة $[A_2]$ بـ $u = 0$، $0 + 0 = 0$. وبالتالي، ومن الموضوعة $[M_1]$ $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$. نضيف $-k0$ إلى الطرفين، فنحصل على النتيجة المطلوبة.

18.7 اثبت (ii) في المبرهنة 1.7: $0u = 0$.

■ نحصل، من خاصية لـ K، على $0 + 0 = 0$. وبالتالي، وبواسطة الموضوعة $[M_2]$، $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. بإضافة $-0u$ إلى الطرفين، نجد النتيجة المطلوبة.

19.7 اثبت (iii) في المبرهنة 1.7: إذا $ku = 0$، إذن $k = 0$ أو $u = 0$.

■ لنفترض أن $ku = 0$ و $k \neq 0$. يوجد عندئذ سلمي k^{-1} بحيث أن $k^{-1}k = 1$؛ وبالتالي $u = 1u = (k^{-1}k)u = k^{-1}(ku) = k^{-1}0 = 0$.

20.7 اثبت (iv) في المبرهنة 1.7: $(-k)u = k(-u) = -ku$.

■ نستخدم $u + (-u) = 0$، فنحصل على $0 = k0 = k(u + (-u)) = ku + k(-u)$. نضيف $-ku$ إلى الطرفين، فنحصل على $-ku = k(-u)$.
نستخدم $k + (-k) = 0$، فنحصل على $0 = 0u = (k + (-k))u = ku + (-k)u$. إضافة $-ku$ إلى الطرفين تعطينا $-ku = (-k)u$. وبذلك $(-k)u = k(-u) = -ku$.

21.7 بيّن أنه من أجل أي سلمي k وأي متجهين u و v، $k(u - v) = ku - kv$.

■ نستخدم تعريف الطرح، $u - v \equiv u + (-v)$، والنتيجة $k(-v) = -kv$ للحصول على $k(u - v) = k(u + (-v)) = ku + k(-v) = ku + (-kv) = ku - kv$.

مبرهنة 2.7: ليكن K حقلاً إختيارياً ولتكن X أي مجموعة غير خالية. لتكن V مجموعة كل الدوال من X إلى K. نعرّف مجموع أي دالتين $f,g \in V$ بأنها الدالة $f + g \in V$، حيث

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X$$

[الرمز $\forall$ يعني «من أجل كل»]. إذن، V فضاء متجهي فوق K، أي أن V تحقق الموضوعات الثماني للفضاءات المتجهية. [V ليست فارغة لأن X ليست فارغة.]

22.7 اثبت أن V في المبرهنة 2.7 تحقق الموضوعة $[A_1]$.

■ لتكن $f,g,h \in V$. لكن نبيين أن $(f + g) + h = f + (g + h)$، يلزم تبيان أن الدالة $(f + g) + h$ والدالة $f + (g + h)$ تعطيان كلاهما نفس القيمة من أجل كل $x \in X$. الآن،

$$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x) \qquad \forall x\in X$$
$$(f+(g+h))(x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+(g(x)+h(x)) \qquad \forall x\in X$$

ولكن $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ سلميات في الحقل K حيث جمع السلميات عملية تجميعية؛ وبالتالي، $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$. إذن، $(f+g)+h=f+(g+h)$.

23.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[A_2]$.

■ لتكن 0 الدالة الصفرية: $0(x)=0$، $\forall x\in X$. لدينا إذن من أجل أي دالة $f\in V$،

$$(f+0)(x)=f(x)+0(x)=f(x)+0=f(x) \qquad \forall x\in X$$

وبذلك، $f+0=f$، ويكون 0 المتجه الصفري في V.

24.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[A_3]$.

■ من أجل أي دالة $f\in V$، لتكن $-f$ الدالة المعرّفة بواسطة $(-f)(x)=f(x)$. إذن

$$(f+(f))(x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=0=0(x) \qquad \forall x\in X$$

وبذلك، $f+(-f)=0$.

25.7 اثبت أن V في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[A_4]$.

■ لتكن $f,g\in V$ إذن

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x) \qquad \forall x\in X$$

وبالتالي، $f+g=g+f$ [لاحظ أن $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ تتبع من حقيقة أن $f(x)$ و $g(x)$ سلميين في الحقل K حيث يكون الجمع تبديلياً].

26.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[M_1]$.

■ لتكن $f,g\in V$ و $k\in K$. إذن

$$(k(f+g))(x)=k((f+g)(x))=k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$$
$$=(kf)(x)+(kg)(x)=(kf+kg)(x) \qquad \forall x\in X$$

وبالتالي، $k(f+g)=kf+kg$. [لاحظ أن $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ تتبع من حقيقة أن k، $f(x)$، $g(x)$ سلميات في الحقل K حيث الضرب توزيعي فوق الجمع].

27.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[M_2]$.

■ لتكن $f\in V$ و $a,b\in K$، إذن،

$$((a+b)f)(x)=(a+b)f(x)=af(x)+bf(x)=(af)(x)+bf(x)$$
$$=(af+bf)(x) \qquad \forall x\in X$$

وبالتالي $(a+b)f=af+bf$.

28.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[M_3]$.

■ لتكن $f\in V$ و $a,b\in K$، إذن،

$$((ab)f)(x)=(ab)f(x)=a(bf(x))=a(bf)(x)=(a(bf))(x) \qquad \forall x\in X$$

وبالتالي، $(ab)f=a(bf)$.

29.7 اثبت أن V، في المبرهنة 2.7، تحقق الموضوعة $[M_4]$.

■ لتكن $f \in V$. إذن، من أجل الوحدة $1 \in K$، $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$، $\forall x \in X$. وبالتالي $1f = f$.

30.7 لتكن V مجموعة متتالية لا نهائية $(a_1, a_2, \ldots)$ ذات مداخل من حقل K. بيّن كيف تجعل V فضاء متجهياً.

■ تعرّف عمليتا الجمع المتجهي والضرب السلمي على V بواسطة:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$
$$k(a_1, a_2, \ldots) = (ka_1, ka_2, \ldots)$$

حيث $a_i, b_i, k \in K$. ويكون البرهان أن V فضاء متجهي مماثلاً للبراهين في القسم 3.1 من أجل $\mathbf{R}^n$.

31.7 ما هو المتجه الصفري 0 وسالب متجه $u = (a_1, a_2, \ldots)$ في الفضاء المتجهي V للمسالة 30.7؟

■ هما $0 = (0, 0, \ldots)$، متتالية الأصفار؛ و $-u = (-a_1, a_2, \ldots)$، متتالية سوالب المداخل في u.

32.7 لتكن V مجموعة الأزواج المرتبة (a,b) للأعداد الحقيقية، حيث تعرّف عمليتا الجمع في V والضرب السلمي على V بواسطة: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ و $k(a,b) = (ka, 0)$. أي الموضوعات الثماني للفضاءات المتجهية تتحقق من أجل V؟

■ تحقق V كل موضوعات الفضاءات المتجهية باستثناء $[M_4]$: $1u = u$.

33.7 بيّن أن $[M_4]$ ليست نتيجة للموضوعات الأخرى من فضاء متجهي.

■ بما أن البيئة الجبرية V في المسألة 32.7 تحقق كل الموضوعات ما عدا $[M_4]$، فإنه لا يمكن اشتقاق $[M_4]$ من الموضوعات الأخرى.

34.7 لنفترض أن E حقل يحتوي حقلاً جزئياً K. بيّن أنه يمكن اعتبار المجموعة $V = E^n$ فضاء متجهياً فوق K.

■ عرّف الجمع المتجهي والضرب السلمي في V كما يلي:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

حيث $a_i, b_i \in E$ و $k \in K$. إذن، يكون V فضاء متجهياً فوق K. [هذا الفضاء المتجهي يختلف عن الفضاء المتجهي E^n باعتباره فضاء فوق E.]

35.7 هل يمكن تعريف C^2 [أزواج أعداد عقدية] كفضاء متجهي: (أ) فوق **R**؟ (ب) فوق **Q**؟ (ج) فوق **C**؟ (د) فوق **Z**؟

■ نستخدم المسألة 34.7: (أ) نعم، (ب) نعم، (ج) نعم، (د) لا، لأن **Z** ليست حقلاً.

36.7 هل يمكن تعريف $\mathbf{R}^2$ كفضاء متجهي: (أ) فوق **Q**؟ (ب) فوق **R**؟ (ج) فوق **C**؟

■ نستخدم المسألة 34.7: (أ) نعم، (ب) نعم، (ج) لا، لأن C ليست حقلاً جزئياً في **R**.

37.7 كيف نعرّف «الجداء النقطي»، الطول، التعامد على فضاء متجهي مجرد؟

■ لا يعتبر الجداء النقطي، والمفاهيم المتعلقة به مثل الطول والتعامد، جزءاً من البنية الأساسية للفضاءات المتجهية، ولكن يمكن اعتبارها كبنية إضافية قد تعرّف أو لا تعرّف. [سوف ندرس مثل هذه الفضاءات في الفصلين 14 و 20.]

2.7 الفضاءات الجزئية للفضاءات المتجهية

38.7 عرّف فضاء جزئياً في فضاء متجهي.

■ لتكن W مجموعة جزئية في فضاء متجهي فوق حقل K. نقول أن V «فضاء جزئي» في W إذا كانت W نفسها فضاء متجهياً فوق K بالنسبة لقانوني الجمع المتجهي والضرب السلمي على V.

مبرهنة 3.7: تكون W فضاء جزئياً في V إذا وفقط إذا:

(i) W مجموعة غير خالية (أو: $0 \in W$).

(ii) W مغلقة تحت الجمع المنجهي: $v,w \in W$ تقتضي $v + w \in W$.

(iii) W مغلقة تحت الضرب السلمي: $v \in W$ تقتضي $kv \in W$ من أجل كل $k \in K$.

39.7 اثبت مبرهنة 3.7.

▩ لنفترض أن W تحقق (i) و (ii) و (iii). من (i) تكون W غير خالية؛ ومن (i) و (iii)، تكون عمليتا الجمع المتجهي والضرب السلمي معرفتين جيداً على W. كما أن الموضوعات $[A_1]$، $[A_4]$، $[M_1]$، $[M_2]$، $[M_3]$، $[M_4]$ تتحقق على W لأن المتجهات في W تنتمي إلى V. وبالتالي، نحتاج فقط إلى أن نبين أن $[A_2]$ و $[A_3]$ تتحققان أيضاً على W. من (i)، W ليست فارغة، ليكن مثلاً $u \in W$. إذن، من (iii)، يكون لدينا $0u = 0 \in W$ و $v + 0 = 0$ من أجل كل $v \in W$. وبالتالي، تحقق W الموضوعة $[A_2]$. أخيراً، إذا $v \in W$. إذن $(-1)v = -v \in W$ و $v + (-v) = 0$؛ وبالتالي، W يحقق $[A_3]$. إذن، يكون W فضاء جزئياً في V.

وبالعكس، إذا كان W فضاء جزئياً في V، فمن الواضح تحقق (i) و (ii) و (iii).

نتيجة 4.7: يكون W فضاء جزئياً في V إذا وفقط إذا (i) $0 \in W$ (أو $W \neq \varnothing$) و (ii) $v,w \in W$ تقتضي $av + bw \in W$ من أجل كل $a,b \in K$.

40.7 اثبت نتيجة 4.7.

▩ لنفترض أن W تحقق (i) و (ii). إذن، من (i)، W غير خالية. كما أنه إذا $v,w \in W$؛ إذن، من (ii)، $v + w = 1v + 1w \in W$؛ وإذا $v \in W$ و $k \in K$؛ إذن، ومن (ii)، $kv = kv + 0v \in W$. وهكذا، وبواسطة المبرهنة 3.7، يكون W فضاء جزئياً في V.

وبالعكس، إذا كان W فضاء جزئياً في V، فمن الواضح نحقق (i) و (ii) في W.

41.7 ليكن V أي فضاء متجهي. عرّف «أصغر» و «أكبر» فضاء جزئي في V.

▩ المجموعة $\{0\}$ المكونة من المتجه الصفري وحده تكون فضاءً جزئياً في V منضمناً في كل فضاء جزئي آخر في V، والفضاء الكلي V هو نفسه فضاء جزئي في V يحتوي كل فضاء جزئي آخر في V.

المسائل 42.7-46.7 تتعلق بالفضاء المنجهي $W = \{(a,b,0): a,b \in \mathbf{R}\}$.

42.7 برهن أن W فضاء جزئي في $V = \mathbf{R}^3$ حيث W المستوى xy المؤلف من المنجهات اللواتي مركباتها الثالثة تساوي صفراً، أي $W = \{(a,b,0): a,b, \in \mathbf{R}\}$.

▩ $0 = (0,0,0) \in W$ لأن المركبة الثالثة في 0 هي 0. من أجل أي منجهين $v = (a,b,0)$، $w = (c,d,0)$ في W، وأي سلميين (عددين حقيقيين) k و 'k، لدينا

$kv + k'w = k(a,b,0) + k'(c,d,0) = (ka, kb, 0) + (k'c, k'd, 0) = (ka + k'c, kb + k'd, 0)$. وهكذا، $kv + k'w \in W$، وهذا يعني أن W فضاء جزئي في V.

43.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في $V = \mathbf{R}^3$ حيث W تتكون من تلك المتجهات التي مجموع مركباتها يساوي صفراً، أي $W = \{(a,b,c): a + b + c = 0\}$.

▩ $0 = (0,0,0) \in W$ لأن $0 + 0 + 0 = 0$. لنفترض أن $v = (a,b,c)$، $w = (a',b',c')$ ينتميان إلى W، أي أن $a + b + c = 0$ و $a' + b' + c' = 0$. إذن، من أجل أي سلميين k و 'k،

$kv + k'w = k(a,b,c) + k'(a',b',c') = (ka,kb,kc) + (k'a',k'b',k'c') = (ka + k'a', kb + k'b', kc + k'c')$ كما أن

$$(ka + k'a') + (kb + k'b') + (kc + k'c') = k(a + b + c) + k'(a' + b' + c') = k0 + k'0 = 0$$

44.7 بيِّن أن W ليست فضاء جزئياً في $V = \mathbf{R}^3$، حيث تتكون W من تلك المتجهات التي مركباتها الأولى غير سالبة، أي $W = \{(a,b,c): a \geq 0\}$.

■ نبين أن واحدة من الخواص، مثلاً، في المبرهنة 3.7 لا تتحقق. $v = (1,2,3) \in W$ و $k = -5 \in \mathbf{R}$. ولكن، $kv = -5(1,2,3) = (-5,-10,-15)$ لا تنتمي إلى W، لأن -5 عدد سالب. وبالتالي، لا يكون W فضاء جزئياً في V.

45.7 بيِّن أن W ليست فضاءً جزئياً في $V = \mathbf{R}^3$ حيث تتكون W من تلك المتجهات التي لا يتجاوز طولها 1، أي $W = \{(a,b,c): a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$.

■ $v = (1,0,0) \in W$ و $w = (0,1,0) \in W$. ولكن $v + w = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$ لا ينتمي إلى W لأن $1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$. وبالتالي، لا يكون W فضاء جزئياً في V.

46.7 بيِّن أن W ليست فضاءً جزئياً في $V = \mathbf{R}^3$ حيث تتكون W من تلك المتجهات التي مركباتها أعداد مُنْطقة، أي $W = \{(a,b,c): a,b,c \in \mathbf{Q}\}$.

■ $v = (1,2,3) \in W$ و $k = \sqrt{2} \in \mathbf{R}$. ولكن $kv = \sqrt{2}(1,2,3) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ لا ينتمي إلى W لأن مركباته ليست أعداداً منطقة. وبالتالي، لا يكون W فضاء جزئياً في V.

المسألتان 47.7-48.7 تتعلقان بالفضاء المتجهي V لكل المصفوفات المربعة -n فوق حقل K.

47.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في V، حيث W مكون من كل المصفوفات المتناظرة؛ أي كل المصفوفات $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = a_{ji}$.

■ $0 \in W$، لأن كل مداخل 0 أصفار وبالتالي متساوية. لنفترض الآن أن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ تنتميان إلى W، أي أن $a_{ji} = a_{ij}$ و $b_{ji} = b_{ij}$. من أجل أي سلميين $a,b \in K$، تكون $aA + bB$ المصفوفة التي مدخلها الـ ij هو العنصر $aa_{ij} + bb_{ij}$. ولكن $aa_{ji} + bb_{ji} = aa_{ij} + bb_{ij}$. إذن، تكون $aA + bB$ متناظرة هي الأخرى، وبذلك يكون W فضاء جزئياً في V.

48.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في V حيث يتكون W من المصفوفات التي تتبادل مع مصفوفة معطاة T؛ أي، $W = \{A \in V: AT = TA\}$.

■ $0 \in W$ لأن $0T = 0 = T0$. لنفترض الآن أن $A,B \in W$؛ أي أن $AT = TA$ و $BT = TB$. لدينا، من أجل أي سلميين $a,b \in K$،
$(aA + bB)T = (aA)T + (bB)T = a(AT) + b(BT) = a(TA) + b(TB) = T(aA) + T(bB) = T(aA + bB)$. وبذلك، تتبادل $aA + bB$ مع T؛ أي أننا ننتمي إلى W؛ وبالتالي، يكون W فضاءً جزئياً في V.

المسألتان 49.7-50.7 تتعلقان بالفضاء المتجهي V لكل المصفوفات 2×2 فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$.

49.7 بيِّن أن W ليست فضاءً جزئياً في V، حيث تتكون W من كل المصفوفات ذات المحددات الصفرية.

■ [تذكر أن $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$]. المصفوفتان $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تنتميان إلى W، لأن $\det(A) = 0$ و $\det(B) = 0$. ولكن $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ لا تنتمي إلى W لأن $\det(A + B) = 1$. وبالتالي، لا يكون W فضاء جزئياً في V.

50.7 بيِّن أن W ليست فضاءً جزئياً في V، حيث W تتكون من كل المصفوفات A التي تحقق $A^2 = A$.

■ مصفوفة الوحدة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تنتمي إلى W لأن

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ولكن $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ لا تنتمي إلى W لأن

$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq 2I$$

وبالتالي، لا يكون W فضاءً جزئياً في V.

المسائل 51.7-52.7 تتعلق بالفضاء المتجهي V لكل الدوال من الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. هنا، ترمز 0 إلى الدالة الصفرية: $0(x) = 0$، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

51.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في V، حيث $W = \{f: f(3) = 0\}$، أي تتكون W من تلك الدوال التي تطبق 3 إلى 0.

■ $0 \in W$ لأن $0(3) = 0$. لنفترض أن $f, g \in W$، أي أن $f(3) = 0$ و $g(3) = 0$. إذن، يكون لدينا $(af + bg)(3) = af(3) + bg(3) = a0 + b0 = 0$. من أجل أي عددين حقيقيين a و b. وبالتالي، $af + bg \in W$، وبذلك يكون W فضاء جزئياً في V.

52.7 بين أن W فضاء جزئي في V حيث $W = \{f: f(7) = f(1)\}$، أي أن W تتكون من كل الدوال التي تقرن نفس القيمة بـ 7 و 1.

■ $0 \in W$ لأن $0(7) = 0 = 0(1)$. لنفترض أن $f, g \in W$، أي أن $f(7) = f(1)$ و $g(7) = g(1)$. إذن، يكون لدينا $(af + bg)(7) = af(7) + bg(7) = af(1) + bg(1) = (af + bg)(1)$. من أجل كل عددين حقيقيين a و b. وبالتالي، تنتمي $af + bg$ إلى W، أي أن W فضاء جزئي في V.

53.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في V، حيث تتكون W من كل الدوال الفردية، أي تلك الدوال f التي تحقق $f(-x) = -f(x)$.

■ $0 \in W$ لأن $0(-x) = 0 = -0 = -0(x)$. لنفترض أن $f, g \in W$، أي أن $f(-x) = -f(x)$ و $g(-x) = -g(x)$. لدينا إذن، $(af + bg)(-x) = af(-x) + bg(-x) = -af(x) - bg(x) = -(af(x) + bg(x)) = -(af + bg)(x)$ من أجل أي عددين حقيقيين a و b. وبالتالي، $af + bg \in W$ ويكون W فضاء جزئياً في V.

54.7 بيّن أن W ليست فضاءً جزئياً في V حيث $W = \{f: f(7) = 2 + f(1)\}$.

■ نفترض أن $f, g \in W$، أي $f(7) = 2 + f(1)$ و $g(7) = 2 + g(1)$. إذن $(f + g)(7) = f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) = 4 + f(1) + g(1) = 4 + (f + g)(1) \neq 2 + (f + g)(1)$. وبالتالي، $f + g \notin W$، وبذلك لا يكون W فضاءً جزئياً في V.

55.7 بيّن أن W ليست فضاءً جزئياً، حيث تتكون W من كل الدوال غير السالبة، أي كل الدوال f التي تحقق $f(x) \geqslant 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$.

■ ليكن $k = -2$ ولتكن $f \in V$ معرّفة بواسطة $f(x) = x^2$. إذن، $f \in W$ لأن $f(x) = x^2 \geqslant 0$، $\forall x \in \mathbb{R}$. ولكن $(kf)(5) = kf(5) = (-2)(5^2) = -50 < 0$. وبالتالي $kf \notin W$. وبذلك لا يكون W فضاءً جزئياً في V.

56.7 بيّن أن W فضاء جزئي في V، حيث تتكون W من كل الدوال المحدودة. [تكون دالة $f \in V$ «محدودة» إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث أن $|f(x)| \leqslant M$ من أجل كل $x \in X$].

■ من الواضح أن 0 محدودة، لأن $0(x) = 0$ من أجل كل $x \subsetneq \mathbb{R}$. لتكن الآن $f, g \in W$ مع وجود حدين M_f و M_g من أجل f و g على الترتيب. إذن، يكون لدينا من، أجل أي سلميين a و b وكل $x \in \mathbb{R}$، $|(af + bg)(x)| = af(x) + bg(x) \leqslant |af(x)| + |bg(x)| = |a||f(x)| + |b||g(x)| \leqslant |a|M_f + |b|M_g$. أي أن $|a|M_f + |b|M_g$ يكون حدًّا من أجل الدالة $af + bg$. وبذلك، يكون W فضاء جزئياً في V.

57.7 هل يكون W فضاءً جزئياً لـ V حيث (أ) W يتكون من كل الدوال المستمرة؟ (ب) W يتكون من كل الدوال القابلة للاشتقاق؟

■ نعرف من الحسبان أن الدالة الثابتة 0 مستمرة وإشتقاقية (قابلة للاشتقاق). نعرف من الحسبان أيضاً أنه إذا كانت f و g مستمرتين (إشتقاقيتين)، فإن $af + bg$ من أجل أي عددين حقيقيين a و b تكون دالة مستمرة (إشتقاقية). وبذلك، (أ) نعم؛ (ب) نعم.

58.7 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ بمعاملات حقيقية، أي أن $a_i \in \mathbb{R}$. حدّد ما إذا كان W فضاءً جزئياً في V أم لا، حيث

(أ) تتكون W من كل الحدوديات ذات المعاملات الصحيحة.

(ب) يتكون W من كل الحدوديات ذات الدرجة الأقل من 3 أو التي تساويها.

(ج) W يتكون من الحدوديات $b_0 + b_1t^2 + b_2t^4 + \dots + b_nt^{2n}$، أي الحدوديات بقوى زوجية فقط لـ t.

■ (أ) لا، لأن المضاعفات السلمية لحدوديات في W لا تنتمي دائماً إلى W. مثلاً، $v = 3 + 5t + 7t^2 \in W$ لكن $1/2\ v = 3/2 + 5/2\ t + 7/2\ t^2 \notin W$. [لاحظ أن W «مغلقة» تحت الجمع المتجهي، أي أن مجموع عنصرين في W ينتمي إلى W].

(ب) و (ج) نعم. لأنه، في كل حالة، W ليست فارغة، ومجموع عنصرين في W ينتمي إلى W، والمضاعفات السلمية لأي عنصر في W تنتمي إلى W.

مبرهنة 5.7: إن تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية في فضاء متجهي V يكون فضاءً جزئياً فيه.

59.7 اثبت مبرهنة 5.7.

■ ليكن $\{W_i : i \in I\}$ تجميعا لفضاءات جزئية في V، وليكن $W = \cap (W_i : i \in I)$. بما أن كل W_i فضاء جزئي، فإن $0 \in W_i$ من أجل كل $i \in I$، وبالتالي، $0 \in W$. لنفترض أن $u, v \in W$، إذن، $u, v \in W_i$ من أجل كل $i \in I$. بما أن كل W_i فضاء جزئي، فإن $au + bv \in W_i$ من أجل كل $i \in I$، وبالتالي، $au + bv \in W$. وبذلك، يكون W فضاءً جزئياً في V.

60.7 بيِّن أنه ليس من الضروري أن يكون الاتحاد $W_1 \cup W_2$، لفضاءين جزئيين في فضاء متجهي V، فضاءً جزئياً في V.

■ ليكن $V = \mathbf{R}^2$ وليكن $W_1 = \{(a,0) : a \in \mathbf{R}\}$ و $W_2 = \{(0,b) : b \in \mathbf{R}\}$. أي أن W_1 هو محور -x و W_2 محور -y في $\mathbf{R}^2$. إذن، W_1 و W_2 فضاءان جزئيان في V. ليكن $u = (1,0)$ و $v = (0,1)$. إذن u و v ينتميان كلاهما إلى الاتحاد $W_1 \cup W_2$، ولكن $u + v = (1,1)$ لا ينتمي إلى $W_1 \cup W_2$. وبالتالي، لا يكون $W_1 \cup W_2$ فضاءً جزئياً في V.

مبرهنة 6.7: لتكن منظومة معادلات خطية متجانسة في عدد n من المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فوق حقل K:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

إذن، إن مجموعة الحل W فضاء جزئي للفضاء المتجهي K^n.

61.7 اثبت مبرهنة 6.7.

■ المنظومة مكافئة للمعادلة المصفوفية $AX = 0$. بما أن $A0 = 0$، فإن المتجه الصفري ينتمي إلى W. لنفترض أن u و v متجهتان في W، أي أن u و v حلاّن للمنظومة. إذن، $Au = 0$ و $Av = 0$. وبذلك يكون لدينا، من أجل أي سلميين a و b في K، $A(au + bv) = aAu + bAv = a0 + b0 = 0 + 0 = 0$. إذن، يكون W فضاءً جزئياً في K^n.

62.7 لتكن $AX = B$ منظومة غير متجانسة لمعادلات خطية في عدد n من المجاهيل فوق حقل K. بين أن حل المنظومة ليس فضاءً جزئياً في K^n.

■ إذا $B \neq 0$، إذن $A0 \neq B$؛ وبالتالي، لا يكون 0 حلاً لـ $AX = B$. وبذلك، فإن الحل ليس فضاءً جزئياً.

63.7 ناقش ما إذا كان $\mathbf{R}^2$ فضاءً جزئياً في $\mathbf{R}^3$.

■ لا، فعلى الرغم من أنه يمكن «مطابقة» المتجه $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ مع $(a,b,0)$ في المستوى -xy في $\mathbf{R}^3$، إلا أنهما عنصران مختلفان ينتميان إلى مجموعتين منفصلتين.

المسألتان 64.7-65.7 تتعلقان بالفضاء المتجهي V المتكون من المتتاليات اللانهائية $(a_1, a_2, \ldots)$ في حقل K. [أنظر المسألة 30.7].

64.7 بيِّن أن W فضاء جزئي في V. حيث يتكون W من كل المتتاليات التي مدخلها الأول صفري.

■ من الواضح أن $(0,0,\ldots) = 0$ تنتمي إلى W. لنفترض أن $u, v \in W$. إذن، المدخلان الأولان لـ u و v مساويان للصفر. وبذلك، يكون المدخل الأول لـ $u + v$ هو $0 + 0 = 0$. كما أنه من أجل أي سلمي $k \in K$، يكون المدخل الأول لـ ku هو $k.0 = 0$. وبالتالي، ينتمي $u + v$ و ku إلى W، وهذا يعني أن W فضاء جزئي في V.

65.7 بيّن أن W فضاء جزئي في V، حيث W مجموعة كل المتتاليات التي ليس لها إلا عدد منته من المداخل غير الصفرية.

■ ليس لـ $0 = (0,0,\ldots)$ مداخل غير صفرية، وبالتالي $0 \in W$. لنفترض أن $u,v \in W$. إذن، يكون لكل من u و v عدد منته من المداخل غير الصفرية. وبالتالي، يكون لـ $u + v$ و ku، من أجل أي سلمي $k \in K$، عدد منته من المداخل غير الصفرية. إذن، $u + v$ و ku ينتميان إلى W، وبذلك يكون W فضاءً جزئياً في V.

3.7 التركيبات الخطية، البسطات الخطية

66.7 عرّف التركيبات الخطية في فضاء متجهي.

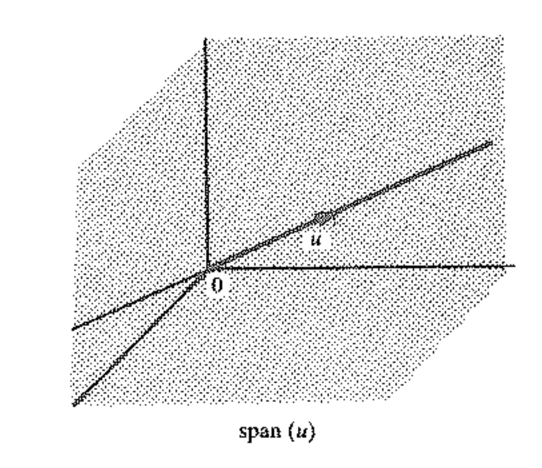
■ ليكن V فضاء متجهياً فوق حقل K، ولتكن $v_1,\ldots,v_m \in V$. إن اي متجه في V من الشكل $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m$، حيث $a_i \in K$، يسمى تركيبة خطية لـ $v_1,\ldots,v_m$.

67.7 لتكن S مجموعة جزئية في فضاء متجهي V. عرّف «البسطة الخطية» لـ S، والتي يرمز لها بـ span (S) أو L(S).

■ إذا $S \neq \varnothing$ فإن $\text{span}(S) = \{0\}$. في غير ذلك، تتكون span (S) من كل التركيبات الخطية للمتجهات في S.

68.7 صف هندسياً span(u) حيث u متجه غير صفري في $\mathbf{R}^3$.

■ المجموعة span (u) تتكون من كل المضاعفات السلمية لـ u؛ هندسياً، span (u) هو الخط المستقيم في $\mathbf{R}^3$ المار عبر نقطة الأصل 0 والنقطة u، كما موضح في الشكل 7-1.

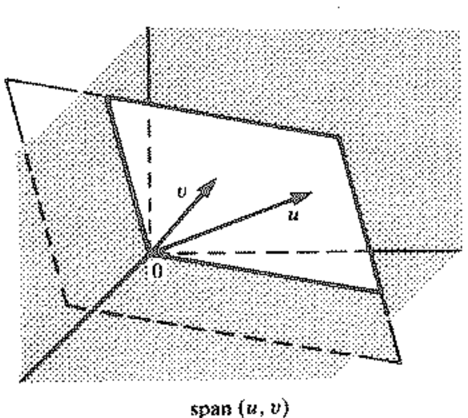


شكل 7-1

span (u)

69.7 صف هندسياً span (u,v) حيث u و v متجهان غير صفريين في $\mathbf{R}^3$، وبحيث لا يكون أحدهما مضاعفا للآخر.

■ تتكون المجموعة span(u,v) من كل المتجهات التي في الشكل $au + bv$، حيث $a,b \in \mathbf{R}$؛ هندسياً، يكون span (u,v) المستوى في $\mathbf{R}^3$ عبر نقطة الأصل والنقطتين u و v، كما هو موضح في الشكل 7-2.



شكل 7-2

span (u, v)

مبرهنة 7.7: لتكن S مجموعة جزئية في فضاء متجهي V.

(i) تكون المجموعة span (S) فضاء جزئياً في V يحتوي S.

(ii) إذا كان W أي فضاء جزئي في V يحتوي S، فإن $\text{span}(S) \subseteq W$.

70.7 اثبت (i) في المبرهنة 7.7: المجموعة الجزئية span (S) فضاء جزئي في V يحتوي S.

■ إذا $S = \varnothing$، إذن $\text{span}(S) = \{0\}$، وهو فضاء جزئي في V يحتوي المجموعة الخالية $\varnothing$. لنفترض الآن أن $S \neq \varnothing$. إذا $v \in S$، إذن $1v = v \in \text{span}(S)$؛ وبالتالي، تكون S مجموعة جزئية في span (S). أيضاً، $\text{span}(S) \neq \varnothing$، لأن $S \neq \varnothing$. لنفترض الآن أن $v, w \in \text{span}(S)$، أي أن $v = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m$ و $w = b_1w_1 + \ldots + b_nw_n$، حيث $v_i, w_j \in S$ و a_i, b_j سلميان. إذن، $v + w = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m + b_1w_1 + \ldots + b_nw_n$، وينتمي $kv = k(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m) = ka_1v_1 + \ldots + ka_mv_m$ إلى span (S)، من أجل أي سلمي k، لأن كلاً منها تركيبة خطية من متجهات في S. وبذلك، يكون span(S) فضاء متجهياً في V.

71.7 اثبت (ii) في المبرهنة 7.7: إذا كان W فضاء جزئياً في V يحتوي S، إذن $\text{span}(S) \subseteq W$.

■ إذا $S = \varnothing$، فإن أي فضاء جزئي W يحتوي S، وتكون $\text{span}(S) = \{0\}$ محتواة في W. لنفترض الآن أن $S \neq \varnothing$ ولنفترض أن $v_1, \ldots, v_m \in S \subset W$. إذن، كل المضاعفات $a_1v_1, \ldots, a_mv_m \in W$ حيث $a_i \in K$، وبالتالي يكون المجموع $a_1v_1 + \ldots + a_mv_m \in W$. أي أن W تحتوي كل التركيبات الخطية لعناصر S. وبالتالي، يكون $\text{span}(S) \subseteq W$، كما هو مطلوب.

72.7 لنفترض أن u تركيبة خطية للمتجهات $v_1, \ldots, v_m$، وأن كل v_i تركيبة خطية للمتجهات $w_1, \ldots, w_n$: $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m$ و $v_i = b_{i1}w_1 + b_{i2}w_2 + \ldots + b_{in}w_n$. بيِّن أن u تركيبة خطية أيضاً للـ w_j. وبذلك، إذا $S \subseteq \text{span}(T)$، فإن $\text{span}(S) \subseteq \text{span}(T)$.

■ لدينا

$$\begin{aligned}
u &= a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \\
&= a_1(b_{11}w_1 + \cdots + b_{1n}w_n) + a_2(b_{21}w_1 + \cdots + b_{2n}w_n) + \cdots + a_m(b_{m1}w_1 + \cdots + b_{mn}w_n) \\
&= (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_mb_{m1})w_1 + \cdots + (a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \cdots + a_mb_{mn})w_n
\end{aligned}$$

أو ببساطة

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_iv_i = \sum_{i=1}^{m} a_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}w_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_ib_{ij}\right)w_j$$

73.7 اكتب المتجه $v = (1, -2, 5)$ كتركيبة خطية للمتجهات $e_1 = (1,1,1)$، $e_2 = (1,2,3)$، و $e_3 = (2,-1,1)$.

■ نريد أن نعبِّر عن v في الشكل $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$، حيث لا تزال x، y، و z سلميات مجهولة، لذلك، نتطلب

$$\begin{aligned}
(1, -2, 5) &= x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) + z(2, -1, 1) \\
&= (x, x, x) + (y, 2y, 3y) + (2z, -z, z) \\
&= (x + y + 2z, x + 2y - z, x + 3y + z)
\end{aligned}$$

تكون منظومة المعادلات المكافئة بمساواة المركبات المتقابلة، ثم نختزلها إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 2y - z &= 4 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

لاحظ أن المنظومة أعلاه متوائمة ولها حل. نحل من أجل المجاهيل فنحصل على $x = -6$، $y = 3$، $z = 2$. وبالتالي $v = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3$.

74.7 اكتب المتجه $v = (2,-5,3)$ في $\mathbf{R}^3$ كتركيبة خطية للمتجهات $e_1 = (1,-3,2)$، $e_2 = (2,-4,-1)$ و $e_3 = (1,-5,7)$.

■ نضع v كتركيبة خطية لـ e_i باستخدام المجاهيل x و y و z: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\begin{aligned}(2,-5,3) &= x(1,-3,2) + y(2,-4,-1) + z(1,-5,7)\\ &= (x+2y+z,\ -3x-4y-5z,\ 2x-y+7z)\end{aligned}$$

ثم نكوّن منظومة المعادلات المكافئة ونختزلها إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{aligned}x+2y+z&=2\\ -3x-4y-5z&=-5\\ 2x-y+7z&=3\end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+z&=2\\ 2y-2z&=1\\ -5y+5z&=-1\end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+z&=2\\ 2y-2z&=1\\ 0&=3\end{aligned}$$

إن المنظومة غير متوائمة، وبذلك ليس لها حلول. إذن، لا يمكن كتابة v على شكل تركيبة خطية المتجهات e_1 و e_2 و e_3.

75.7 ما هي قيم k التي تجعل المتجه $u = (1,-1,k)$ في $\mathbf{R}^3$ تركيبة خطية للمتجهين $v = (3,0,-2)$ و $w = (2,-1,-5)$؟

■ نكتب $u = xv + yw$: $(1,-2,k) = x(3,0,-2) + y(2,-1,-5) = (3x+2y, -y, -2x-5y)$. ونكوّن منظومة المعادلات المكافئة:

$$3x+2y=1 \qquad -y=-2 \qquad -2x-5y=k$$

نحصل من المعادلتين الأولى والثانية على $y = 2$، $x = -1$. نعوض في المعادلة الأخيرة، فنجد أن $k = -8$.

76.7 اكتب الحدودية $v = t^2 + 4t - 3$ فوق $\mathbf{R}$ كتركيبة خطية للحدوديات $e_1 = t^2 - 2t + 5$، $e_2 = 2t^2 - 3t$ و $e_3 = t + 3$.

■ نكتب v كتركيبة خطية لـ e_i باستخدام x و y و z: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\begin{aligned}t^2+4t-3 &= x(t^2-2t+5) + y(2t^2-3t) + z(t+3)\\ &= xt^2 - 2xt + 5x + 2yt^2 - 3yt + zt + 3z\\ &= (x+2y)t^2 + (-2x-3y+z)t + (5x+3z)\end{aligned}$$

نساوي بين معاملات القوى المشابهة، ثم نختزل المنظومة إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{aligned}x+2y&=1\\ -2x-3y+z&=4\\ 5x+3z&=-3\end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=1\\ y+z&=6\\ -10y+3z&=-8\end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=1\\ y+z&=6\\ 13z&=52\end{aligned}$$

لاحظ أن المنظومة متوائمة، وبذلك يكون لها حل. نحل من أجل المجاهيل، فنحصل على $x = -3$، $y = 2$، و $z = 4$. وهكذا يكون لدينا $v = -3e_1 + 2e_2 + 4e_3$.

77.7 اكتب المصفوفة $E = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ كتركيبة خطية للمصفوفات $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$، و $C = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

■ نكتب التركيبة الخطية E لـ A، B، C باستخدام المجاهيل x، y، z: $E = xA + yB + zC$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x & x\\ x & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ y & y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2z\\ 0 & -z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & x+2z\\ x+y & y-z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

نكوّن منظومة المعادلات المكافئة بمساواة المداخل المتقابلة: $x = 3$، $x + y = 1$، $x + 2z = 1$، $y - z = -1$. نعوض بـ $x = 3$ في المعادلتين الثانية والثالثة فنحصل على $y = -2$ و $z = -1$. بما أن هذه القيم تحقق أيضاً المعادلة الأخيرة، فإنها تشكل حلاً للمنظومة. وبالتالي، $E = 3A - 2B - C$.

78.7 حدد ما إذا كان $v = (3,9,-4,-2)$ في $\mathbf{R}^4$ تركيبة خطية أم لا للمتجهات: $u_1 = (1,-2,0,3)$، $u_2 = (2,3,0,-1)$، و $u_3 = (2,-1,2,1)$، أي ما إذا كان $v \in \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3)$.

■ نكتب v كتركيبة خطية للـ u_i باستخدام المجاهيل x,y,z؛ أي نضع $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$:

$$\begin{aligned}(3,9,-4,-2) &= x(1,-2,0,3) + y(2,3,0-1) + z(2,-1,2,1)\\ &= (x+2y+2z,\ -2x+3y-z,\ 2z,\ 3x-y+z)\end{aligned}$$

نكوّن منظومة المعادلات المكافئة بمساواة المتقابلة، ثم نختزلـها إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{aligned}x+2y+2z&=3\\ -2x+3y-z&=9\\ 2z&=-4\\ 3x-y+z&=-2\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+2z&=3\\ 7y+3z&=15\\ 2z&=-4\\ -7y-5z&=-11\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+2z&=3\\ 7y+3z&=15\\ 2z&=-4\\ -2z&=4\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+2z&=3\\ 7y+3z&=15\\ 2z&=-4\end{aligned}$$

لاحظ أن المنظومة أعلاه متوائمة، وبذلك يكون لها حل؛ وبالتالي، تكون v تركيبة خطية للـ u_i. نحل من أجل المجاهيل، فنحصل على $x=1$، $y=3$، $z=-2$. إذن، $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$.

لاحظ أنه إذا كانت منظومة المعادلات الخطية غير متوائمة، أي ليس حلول، فإن المتجه v لن يكون تركيبة خطية للـ u_i.

المسائل 79.7-82.7 تتعلق بالمتجهين $u=(1,-3,2)$ و $v=(2,-1,1)$ في $\mathbf{R}^3$.

79.7 اكتب $w=(1,7,-4)$ كتركيبة خطية لـ u، v.

■ نكتب $w = xu + yv$ باستخدام المجهولين x و y: $(1,7,-4) = x(1,-3,2) + y(2,-1,1) = (x+2y, -3x-y, 2x+y)$.
نكون منظومة المعادلات المكافئة: $x+2y=1$، $-3x-y=7$، $2x+y=-4$. نحل المنظومة، فنحصل على $x=-3$ و $y=2$. وبالتالي، $w=-3u+2v$.

80.7 اكتب $w=(2,-5,4)$ كتركيبة خطية لـ u و v.

■ نضع $w = xu + yv$ استخدم المجهولين x و y: $(2,-5,4) = x(1,-3,2) + y(2,-1,1) = (x+2y, -3x-y, 2x+y)$.
نكوّن المنظومة المكافئة ثم نختزل إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{aligned}x+2y&=2\\ -3x-y&=-5\\ 2x+y&=4\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=2\\ 5y&=1\\ -3y&=0\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=2\\ 5y&=1\\ 0&=\tfrac{3}{5}\end{aligned}$$

وتبين المعادلة الأخيرة أن المنظومة غير متوائمة. وبالتالي، w ليست تركيبة خطية لـ u و v.

81.7 أوجد k لكي يكون $w=(1,k,5)$ تركيبة خطية لـ u و v.

■ نكتب $w = xu + yv$: $(1,k,5) = x(1,-3,2) + y(2,-1,1) = (x+2y, -3x-y, 2x+y)$.
نكوّن منظومة المعادلات المكافئة: $x+2y=1$، $-3x-y=k$، $2x+y=5$. نحصل من المعادلتين الأولى والثالثة على $x=2$، $y=-1$. بالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن $k=-8$.

82.7 أوجد شرطا على a، b، c بحيث يكون $w=(a,b,c)$ تركيبة خطية لـ u و v، أي لكي يكون $w \in \text{span}(u,v)$.

■ نكتب $w = xu + yv$ باستخدام المجهولين x و y:
$(a,b,c) = x(1,-3,2) + y(2,-1,1) = (x+2y, -3x-y, 2x+y)$. نكوّن المنظومة المكافئة ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned}x+2y&=a\\ -3x-y&=b\\ 2x+y&=c\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=a\\ 5y&=3a+b\\ -3y&=-2a+c\end{aligned}\quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y&=a\\ 5y&=3a+b\\ 0&=-a+3b+5c\end{aligned}$$

وتكون المنظومة متوائمة إذا وفقط إذا $a-3b-5c=0$: وبالتالي، يكون w تركيبة خطية لـ u و v إذا وفقط إذا $a-3b-5c=0$.

83.7 أوجد شروطاً على a، b، c بحيث أن $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ ينتمي للفضاء المولّد بواسطة $u=(2,1,0)$، $v=(1,-1,2)$، $w=(0,3,-4)$.

■ نكتب (a,b,c) كتركيبة خطية لـ u، v، w باستخدام المجاهيل x، y، z:
$(a,b,c) = x(2,1,0) + y(1,-1,2) + z(0,3,-4) = (2x+y,\ x-y+3z,\ 2y-4z)$. نكوّن منظومة المعادلات الخطية المكافئة ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{cases} 2x+y = a \\ x-y+3z = b \\ 2y-4z = c \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2x+y = a \\ 3y-6z = a-2b \\ 2y-4z = c \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2x+y = a \\ 3y-6z = a-2b \\ 0 = 2a-4b-3c \end{cases}$$

إن المتجه (a,b,c) ينتمي إلى الفضاء المولد بواسطة u، v، w إذا وفقط إذا كانت المنظومة أعلاه متوائمة، وتكون المنظومة متوائمة إذا وفقط إذا $2a-4b-3c=0$.

84.7 لنفترض أن W فضاء جزئي في V. اثبت أن $\text{span}(W) = W$.

■ بما أن W فضاء جزئي في V، فإن W يكون مغلقاً تحت التركيبات الخطية. وبالتالي، $\text{span}(W) \subseteq W$ ولكن $W \subseteq \text{span}(W)$. ينتج عن الاحتوائين أن $\text{span}(W) = W$.

85.7 بيّن أن $\text{span}(\text{span}(S)) = \text{span}(S)$.

■ بما أن $\text{span}(S)$ فضاء جزئي في V، فإن المسألة 84.7 تقتضي $\text{span}(\text{span}(S)) = \text{span}(S)$.

86.7 لنفترض أن S و T مجموعتان جزئيتان في فضاءٍ متجهي V بحيث أن $S \subseteq T$. بين أن $\text{span}(S) \subseteq \text{span}(T)$.

■ ليكن $v \in \text{span}(S)$. إذن $v = a_1u_1 + \dots + a_ru_r$ حيث $a_i \in K$ و $u_i \in S$. ولكن $S \subseteq T$؛ وبالتالي كل $u_i \in T$. إذن، $v \in \text{span}(T)$؛ ومنها $\text{span}(S) \subseteq \text{span}(T)$.

87.7 بيّن أن $\text{span}(S)$ هو تقاطع كل الفضاءات الجزئية في V التي تحتوي S.

■ ليكن $\{W_i\}$ تجميع كل الفضاءات الجزئية في V التي تحتوي S، وليكن $W = \cap W_i$. بما أن كل W_i فضاء جزئي في V، فإن المجموعة W فضاء جزئي في V. أيضاً، وبما أن كل W_i تحتوي S، فإن التقاطع W يحتوي S. وبالتالي، $\text{span}(S) \subseteq W$. من جهة أخرى، يكون $\text{span}(S)$ فضاءً جزئياً في W يحتوي S؛ وبذلك، $\text{span}(S) = W_k$ من أجل بعض k. إذن، $\text{span}(S) = W_k \supseteq W$. الاحتواءان يعطيان معاً $\text{span}(S) = W$.

88.7 بيّن أن $\text{span}(S) = \text{span}(S \cup \{0\})$. وبذلك، يمكن شطب المتجه الصفري من أي مجموعة مولّدة.

■ لدينا، بواسطة المسألة 86.7، أن $\text{span}(S) \subseteq \text{span}(S \cup \{0\})$. لنفترض أن $v \in \text{span}(S \cup \{0\})$، أي أن $v = a_1u_1 + \dots + a_nu_n + b.0$ حيث $a_i, b \in K$ و $u_i \in S$. إذن، $v = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$. وبذلك $v \in \text{span}(S)$، وهكذا، نجد أن $\text{span}(S \cup \{0\}) \subseteq \text{span}(S)$. يعطينا الاحتواءان معاً $\text{span}(S) = \text{span}(S \cup \{0\})$.

4.7 المجموعات المولّدة، المولّدات

89.7 عرّف مجموعة مولّدة، أو مولّدات، لفضاء متجهي V.

■ نقول أن المتجهات $u_1, u_2, \dots, u_r$ تولّد V، أو نقول انها تكوّن مجموعة مولّدة لـ V إذا $V = \text{span}(u_1, \dots, u_r)$. وبشكل بديل، تولّد $u_1, u_2, \dots, u_r$ الفضاء V إذا كان يوجد، من أجل كل متجه $v \in V$، سلّميات $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ بحيث أن $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ru_r$، أي أن v تركيبة خطية لـ $u_1, u_2, \dots, u_r$.

90.7 بيّن أن المتجهات $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$ و $e_3 = (0,0,1)$ تولد الفضاء المتجهي $\mathbf{R}^3$.

■ ليكن $v = (a,b,c)$ متجهاً إختيارياً في $\mathbf{R}^3$. نضع $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ حيث x، y، z سلميات مجهولة: $(a,b,c) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x,y,z)$. وبذلك، $x = a$، $y = b$، $z = c$. وبالتالي، يكون v تركيبة خطية لـ e_1، e_2، e_3؛ تحديداً، $v = ae_1 + be_2 + ce_3$. يعني هذا أن e_1، e_2، e_3 تولّد $\mathbf{R}^3$.

91.7 بيِّن أن المتجهات $u=(1,2,3)$، $v=(0,1,2)$، $w=(0,0,1)$ تولِّد $\mathbf{R}^3$.

■ نحتاج إلى أن نبين أن متجهاً اختيارياً $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ يكون تركيبة خطية لـ u، v، w. نضع $(a,b,c)=xu+yv+zw$: $(a,b,c)=x(1,2,3)+y(0,1,2)+z(0,0,1)=(x,2x+y,3x+2y+z)$. ثم نكوّن منظومة المعادلات

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= a \\ 2x+y \quad &= b \\ 3x+2y+z &= c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} z+2y+3x &= a \\ y+2x &= b \\ x &= a \end{aligned}$$

المنظومة أعلاه في شكل درجي ومتوائمة؛ في الحقيقة، يكون $x=a$، $y=b-2a$، $z=c-2b+a$ حلاً. إذن، u، v، و w تولِّد $\mathbf{R}^3$.

92.7 بيِّن أن $u_1=(1,2,5)$، $u_2=(1,3,7)$ و $u_3=(1,-1,-1)$ لا تولِّد $\mathbf{R}^3$.

■ نكتب $w=(a,b,c)$ كتركيبة خطية لـ u_1، u_2، u_3: $(a,b,c)=x(1,2,5)+y(1,3,7)+z(1,-1,-1)=(x+y+z,2x+3y-z,5x+7y-z)$. نكوّن منظومة المعادلات الخطية المكافئة ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ 2x+3y-z &= b \\ 5x+7y-z &= c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x+y+z &= a \\ y-3z &= -2a+b \\ 2y-6z &= -5a+c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x+y+z &= a \\ y-3z &= -2a+b \\ 0 &= -a-2b+c \end{aligned}$$

تبين المعادلة الأخيرة أن w لا تنتمي إلى $L(u_1,u_2,u_3)$ إلا إذا $a+2b-c=0$. وبالتالي، هناك متجهات في $\mathbf{R}^3$ لا تنتمي إلى $\text{span}(u_1,u_2,u_3)$. إذن، u_1، u_2، u_3 تولِّد $\mathbf{R}^3$.

المسائل 93.7-95.7 تتعلق بالمستوى -xy، $W=\{a,b,0\}$، في $\mathbf{R}^3$.

93.7 بيِّن أن $u=(1,2,0)$ و $v=(0,1,0)$ يولِّدان W. بيِّن أن متجها إختيارياً $(a,b,0)\in W$ يكون تركيبة خطية لـ u و v.

■ نضع $(a,b,0)=xu+yv$: $(a,b,0)=x(1,2,0)+y(0,1,0)=(x,2x+y,0)$. ثم نكوّن منظومة المعادلات:

$$\begin{aligned} x \quad &= a \\ 2x+y &= b \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} y+2x &= b \\ x &= a \end{aligned}$$

المنظومة متوائمة؛ في الحقيقة، يكون $x=a$، $y=b-2a$ حلاً. وبالتالي، u و v يولِّدان W.

94.7 بيِّن أن $u=(2,-1,0)$ و $v=(1,3,0)$ يولِّدان W.

■ نضع $(a,b,0)=xu+yv$: $(a,b,0)=x(2,-1,0)+y(1,3,0)=(2x+y,-x+3y,0)$. ثم نكوِّن المنظومة التالية ونختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned} 2x+y &= a \\ -x+3y &= b \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} 2x+y &= a \\ 7y &= a+2b \end{aligned}$$

المنظومة متوائمة، وبذلك يكون لها حل. وبالتالي، يتولد W بواسطة u و v. (لاحظ أننا لا نحتاج إلى الحل من أجل x و y. يكفي أن نعرف أنه يوجد حل).

95.7 بيِّن أن $u=(3,2,0)$ و $v=(1,1,2)$ يولِّدان W.

■ المتجهان u و v لا يمكنهما توليد W لأن v لا ينتمي إلى W. بتعبير آخر، $W\neq\text{span}(u,v)$.

المسألتان 96.7-97.7 تتعلقان بالفضاء المتجهي V لكل الحدوديات (في t).

96.7 بيِّن أن الحدوديات $1,t,t^2,t^3,\ldots$ تولِّد V.

▩ إن أي حدودية $f(t)$ في V تكون تركيبة خطية لـ 1 وقوى t. وبالتالي، $V = span(1,t,t^2,t^3,...)$.

97.7 بيِّن أنه لا يمكن لمجموعة منتهية S من الحدوديات في V أن تولّد V.

▩ إن أي مجموعة منتهية S من الحدوديات تحتوي واحدة ذات درجة قصوى، لتكن m. إذن، لا يمكن لـ $span(S)$ إحتواء حدوديات من درجة أعلى من m. وبالتالي، $V \neq span(S)$، من أجل أي مجموعة منتهية S.

98.7 لنفترض أن $u_1,u_2,...,u_m$ تولّد V. بيِّن أنه، من أجل أي متجه $w \in V$، تولّد المتجهاتُ $u_1,u_2,...,u_m$ و w الفضاء V.

▩ طريقة 1. ليكن $v \in V$. بما أن الـ u_i تولّد V، فإنه توجد سلّميات $a_1,...,a_m$ بحيث أن $v = a_1u_1 +...+ a_mu_m$. إذن $v = a_1u_1 + a_2u_2 +...+ a_mu_m + 0w$. وبذلك، تولّد $u_1,u_2,...,u_m$ و w الفضاء V.

طريقة 2. لدينا من المسألة 86.7، $span(u_i) \subseteq span(u_i,w)$. وبالتالي، $V = span(u_i) \subseteq span(u_i,w) \subseteq V$. وبذلك لا يمكن لأي إحتواء أن يكون فعلياً؛ إذن، $span(u_i,w) = V$.

99.7 لنفترض أن $u_1,u_2,...,u_m$ تولّد V. ولنفترض من أجل $k>1$، أن المتجه u_k تركيبة خطية للمتجهات التي تسبقه $u_1,u_2,...,u_{k-1}$. بيِّن أن الـ u_i، بدون u_k، تولّد V، أي أن $span(u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_m) = V$.

▩ ليكن $v \in V$، بما أن الـ u_i تولّد V، إذن توجد سلّميات $a_1,...,a_m$ بحيث أن $v = a_1u_1 +...+a_mu_m$ بما أن u_k تركيبة خطية لـ $u_1,...,u_{k-1}$، إذن توجد سلّميات $b_1,...,b_{k-1}$ بحيث أن $u_k = b_1u_1 +...+b_{k-1}u_{k-1}$. إذن،

$$\begin{aligned} v &= a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + \cdots + a_mu_m \\ &= a_1u_1 + \cdots + a_k(b_1u_1 + \cdots + b_{k-1}u_{k-1}) + \cdots + a_mu_m \\ &= (a_1 + a_kb_1)u_1 + \cdots + (a_{k-1} + a_kb_{k-1})u_{k-1} + a_{k+1}u_{k+1} + \cdots + a_mu_m \end{aligned}$$

وبالتالي، $span(u_1,...,u_{k-1},u_{k+1},...,u_m) = V$.

100.7 لتكن $W_1,W_2,...$ فضاءات متجهية في فضاء متجهي V بحيث أن $W_1 \subset W_2 \subset ...$. ليكن $W = W_1 \cup W_2 \cup ...$. بيِّن أن W فضاء جزئي في V.

▩ المتجه الصفري $0 \in W_1$؛ وبالتالي $0 \in W$. لنفترض أن $u,v \in W$. يوجد إذن j_1 و j_2 بحيث أن $u \in W_{j_1}$ و $v \in W_{j_2}$. ليكن $j = max(j_1,j_2)$. إذن، $W_{j_1} \subseteq W_j$ و $W_{j_2} \subseteq W_j$، وبذلك $u,v \in W_j$. ولكن W_j فضاء جزئي؛ وبالتالي، $u + v \in W_j$. كما أن المضاعف $ku \in W_j$، من أجل أي سلّمي k. بما أن $W_j \subseteq W$، يكون لدينا $u+v, ku \in W$. وبذلك، يكون W فضاءً جزئياً في V.

101.7 لنفترض، في المسألة السابقة، أن S_i تولّد W_i من أجل $i = 1,2,...$. بيِّن أن $S = S_1 \cup S_2 \cup ...$ تولّد W.

▩ ليكن $v \in W$. يوجد إذن j بحيث أن $v \in W_j$. إذن، $v \in span(S_j) \subseteq span(S)$. وبذلك $W \subseteq span(S)$. ولكن $S \subseteq W$، كما أن W فضاء جزئي؛ وبالتالي، $span(S) \subseteq W$. الاحتواءان يعطيان معاً $span(S) = W$، أي أن S يولّد W.

5.7 الفضاء الصفي لمصفوفة

102.7 عرِّف الفضاء الصفي لمصفوفةٍ A، وأرمز لها بـ $rowsp(A)$.

▩ لتكن A مصفوفة إختيارية $m \times n$ فوق حقل K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

إن صفوف A، $R_1 = (a_{11},a_{12},...,a_{1n}),...,R_m = (a_{m1},a_{m2},...,a_{mn})$، باعتبارها متجهات في K^n، تولّد فضاءً جزئياً في K^n يسمى «الفضاء الصَفّي» لـ A: أي أن $rowsp(A) = span(R_1,R_2,...,R_m)$.

103.7 عرّف فضاء الأعمدة لمصفوفةٍ A، وارمز له بـ colsp(A).

■ إن الأعمدة $C_1, C_2, \ldots, C_n$ لمصفوفةٍ إختيارية $m \times n$ فوق حقل K، باعتبارها متجهات في K^m، تولّد فضاء جزئياً في K^m يسمى «فضاء الأعمدة» لـ A؛ أي أن $\text{colsp}(A) = \text{span}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$. أو، بشكل بديل، $\text{colsp}(A) = \text{rowsp}(A^T)$.

مبرهنة 8.7: إن للمصفوفات المتكافئة صفياً نفس الفضاء الصفي.

104.7 أثبت مبرهنة 8.7.

■ لنفترض أننا نطبق عملية صفية أولية على مصفوفة A: (i) $R_i \longleftrightarrow R_j$، (ii) $R_i \to kR_i$، $k \neq 0$، أو (iii) $R_i \to kR_j + R_i$ ونتحصل على مصفوفة B. إذن، كل صف في B هو صف في A أو تركيبة خطية لصفوف في A. وبالتالي، يحتوي الفضاء الصفي لـ A الفضاءَ الصفي لـ B. يمكننا، من جهة أخرى، نطبق العملية الصفية الأولية العكسية على B ونتحصل على A؛ وبالتالي، يحتوي الفضاء الصفي لـ B الفضاء الصفي لـ A. ينتج عن ذلك أن لـ A و B نفس الفضاء الصفي. وهكذا، فإن أي متتالية من عمليات صفية أولية تعطى مصفوفة لها نفس الفضاء الصفي. يعني ذلك، أن للمصفوفات المتكافئة صفياً نفس الفضاء الصفي.

105.7 حدّد ما إذا كان للمصفوفات التالية نفس الفضاء الصفي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

■ يكون لمصفوفات نفس الفضاء الصفي إذا وفقط إذا كان لأشكالها الصفية القانونية نفس الصفوف غير الصفرية؛ وبالتالي، نختزل صفياً كل مصفوفة إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بما أن الصفوف غير الصفرية للشكل المختزل لـ A هي نفسها الصفوف غير الصفرية للشكل المختزل لـ C، فإنه يكون لـ A و C نفس الفضاء الصفي. من جهة أخرى، الصفوف غير الصفرية للشكل المختزل لـ B ليست هي نفسها في المصفوفتين A و C، وبذلك يكون لـ B فضاء صفي مختلف.

106.7 حدّد ما إذا كان للمصفوفات التالية نفس الفضاء الصفي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

■ نختزل صفياً كل مصفوفة إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفتان A و C لهما نفس الفضاء الصفي لأن لهما نفس الشكل الصفي القانوني (بعد استبعاد الصفوف الصفرية). ولكن B ليس لها نفس الفضاء الصفي كما A و C.

107.7 حدّد ما إذا كان للمصفوفتين التاليتين نفس فضاء الأعمدة:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&4&3\\1&1&9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\7&12&17\end{pmatrix}$$

■ لاحظ أنه يكون لـ A و B نفس فضاء الأعمدة إذا وفقط إذا كان للمنقولتين A^T و B^T نفس الفضاء الصفي. وهكذا، نختزل A^T و B^T إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&1\\5&3&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}1&-2&7\\2&-3&12\\3&-4&17\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

بما أن A^T و B^T لهما نفس الفضاء الصفي، يكون لـ A و B فضاء الأعمدة نفسه.

108.7 ليكن $U=\text{span}(u_1,u_2,u_3)$ و $W=\text{span}(v_1,v_2)$ فضائين جزئيين في $\mathbf{R}^4$ حيث $u_1=(1,2,-1,3)$، $u_2=(2,4,1,-2)$، $u_3=(3,6,3,-7)$، $v_1=(1,2,-4,11)$، $v_2=(2,4,-5,14)$. بيِّن أن $U=W$.

■ **طريقة 1**: نبين أن كل u_i تركيبة خطية لـ v_1 و v_2، ونبين أن كل v_i تركيبة خطية لـ u_1، u_2، u_3. لاحظ أن علينا تبيان أن المنظومات الست للمعادلات الخطية متوائمة.

طريقة 2: نكوّن المصفوفة A التي صفوفها الـ u_i، ونختزل A صفياً إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&1&-2\\3&6&3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&3&-8\\0&0&6&-16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

الآن، نكوّن المصفوفة B التي صفاها v_1 و v_2، ونختزلها صفياً إلى الشكل الصفي القانوني:

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-4&11\\2&4&-5&14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-4&11\\0&0&3&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

بما أن الصفوف غير الصفرية في المصفوفتين المختزلتين متطابقة، فإن الفضائين الصفيين لـ A و B متساويان، وبذلك $U=W$.

109.7 ليكن $U=\text{span}(u_1,u_2,u_3)$ و $W=\text{span}(v_1,v_2,v_3)$ فضائين جزئيين في $\mathbf{R}^3$، حيث $u_1=(1,1,-1)$، $u_2=(2,3,-1)$، $u_3=(3,1,-5)$، $v_1=(1,-1,-3)$، $v_2=(3,-2,-8)$ و $v_3=(2,1,-3)$. بيِّن أن $U=W$.

■ نكون المصفوفة A التي صفوفها الـ u_i ثم نختزلها إلى الشكل الصفي القانوني:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&-1\\3&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ثم نكوّن المصفوفة B التي صفوفها الـ v_i، ثم نختزلها إلى الشكل الصفي القانوني:

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\3&-2&-8\\2&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&1\\0&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

بما أن A و B لهما نفس الشكل الصفي القانوني، فإن الفضاءين لـ A و B متساويان، وبذلك $U=W$.

110.7 لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة إختيارية. لنفترض أن $u=(b_1,\dots,b_n)$ تركيبة خطية للصفوف $R_1,\dots,R_m$ لـ A: لتكن $u=k_1R_1+\dots+k_mR_m$. بيِّن أن $\forall i$، $b_i=k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+\dots+k_ma_{mi}$ حيث $a_{1i},\dots,a_{mi}$ مداخل العمود i في A.

■ لدينا $u = k_1R_1 + \ldots + k_mR_m$ بالتالي:

$(b_1, \ldots, b_n) = k_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \cdots + k_m(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) = (k_1a_{11} + \cdots + k_ma_{m1}, \ldots, k_1a_{m1} + \cdots + k_ma_{mn})$.

بمساواة المركبات المتداخلة، نتحصل على النتيجة المرغوبة.

111.7 لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة درجية ذات مداخل رئيسية غير صفرية $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$، ولتكن $B = (b_{ij})$ مصفوفة درجية ذات مداخل رئيسية غير صفرية $b_{1k_1}, b_{2k_2}, \ldots, b_{sk_s}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & * & * & * & * & * & * \\ & & a_{2j_2} & * & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{rj_r} & * & * \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1k_1} & * & * & * & * & * & * \\ & & b_{2k_2} & * & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & b_{sk_s} & * & * \end{pmatrix}$$

لنفترض أن لـ A و B نفس الفضاء الصفي. بيِّن أن المداخل الرئيسية غير الصفرية لـ A و B تقع في نفس المواضع، أي $j_1 = k_1$، $j_2 = k_2$، ...، $j_r = k_r$، و $r = s$.

■ من الواضح أن $A = 0$ إذا وفقط إذا $B = 0$، ونحتاج فقط إلى إثبات المبرهنة عندما $r \geq 1$ و $s \geq 1$. نبين أولاً أن $j_1 = k_1$. لنفترض أن $j_1 < k_1$. إذن، العمود j_1 في B يكون صفرياً. بما أن الصف الأول في A يكون في الفضاء الصفي لـ B، فيكون لدينا من المسألة السابقة، $a_{1j_1} = c_10 + c_20 + \cdots + c_m0 = 0$ من أجل سلّميات c_i. ولكن هذا يناقض الحقيقة بأن العنصر $a_{1j_1} \neq 0$. وبالتالي، $j_1 \geq k_1$ وبالمثل $k_1 \geq j_1$. وبذلك، $j_1 = k_1$.

لتكن الآن A' المصفوفة الجزئية في A المتحصل عليها بشطب الصف الأول في A، ولتكن B' المصفوفة الجزئية في B المتحصل عليها بشطب الصف الأول في B. سنثبت أن لـ A' و B' نفس الفضاء الصفي. وسوف تتبع المبرهنة عندئذ بواسطة الاستقراء، لأن A' و B' مصفوفتان درجيتان أيضاً.

ليكن $R = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ أي صف في A'، ولتكن $R_1, \ldots, R_m$ صفوف B. بما أن R في الصف الفضائي لـ B، فإنه يوجد سلميات $d_1, \ldots, d_m$ بحيث أن $R = d_1R_1 + d_2R_2 + \ldots + d_mR_m$. بما أن A في شكل درجي، و R ليست الصف الأول في A، فإن المدخل j_1 لـ R صفري: $a_i = 0$ من أجل $i = j_1 = k_1$.

إضافة إلى ذلك، وبما أن B في شكل درجي، تكون كل المداخل في العمود k_1 صفرية، باستثناء المدخل الأول: $b_{1k_1} \neq 0$، ولكن $b_{2k_1} = 0, \ldots, b_{mk_1} = 0$. وبذلك، فإن $0 = a_{k_1} = d_1b_{1k_1} + d_20 + \cdots + d_m0 = d_1b_{1k_1}$. الآن $b_{1k_1} \neq 0$، وبالتالي، تكون $d_1 = 0$. إذن، تكون R تركيبة خطية لـ $R_2, \ldots, R_m$، وبذلك تكون في الفضاء الصفي لـ B'. بما أن R صف إختياري في A'، فإن الفضاء الصفي لـ B' يحتوي الفضاء الصفي لـ A'. بالمثل، يحتوي الفضاء الصفي لـ A' الفضاء الصفي لـ B'. ينتج عن ذلك أن لـ A' و B' الفضاء الصفي نفسه.

مبرهنة 9.7: لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتين درجيتين في شكل صفي قانوني. إذن، يكون لـ A و B نفس الفضاء الصفي إذا وفقط إذا كان لهما نفس الصفوف غير الصفرية.

112.7 اثبت مبرهنة 9.7.

■ من الواضح أنه إذا كان لـ A و B نفس الصفوف غير الصفرية، فإنه يكون لهما نفس الفضاء الصفي. علينا فقط إذن أن نثبت العكس.

لنفترض أن لـ A و B نفس الفضاء الصفي، ولنفترض أن $R \neq 0$ هو الصف i في A. توجد عندئذ سلميات $c_1, \ldots, c_s$ بحيث أن

$$R = c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_sR_s \qquad (1)$$

حيث R_i صفوف B غير ـ الصفرية. سوف يتم إثبات المبرهنة إذا بينا أن $R = R_i$، أي أن $c_i = 1$، ولكن $c_k = 0$ من أجل $k \neq i$.

ليكن a_{ij_i} المدخل غير الصفري الرئيسي في R. من (1) والمسألة 110.7، يكون لدينا

$$a_{ij_i} = c_1b_{1j_i} + c_2b_{2j_i} + \cdots + c_sb_{sj_i} \qquad (2)$$

ويكون b_{ij_i} ، وبواسطة المسألة 111.7، هو المدخل غير الصفري الرئيسي في B، وبما أن B مختزلة صَفّياً، فهو المدخل غير الصفري الوحيد في العمود j_i في B. وهكذا، نحصل من (2) على $a_{ij_i} = c_i b_{ij_i}$. ولكن $a_{ij_i} = 1$ و $b_{ij_i} = 1$ ، لأن A و B مختزلتان صفياً؛ وبالتالي، $c_i = 1$.

لنفترض الآن أن $k \neq i$، وأن b_{kj_k} العنصر المميز في R_k. من (1) والمسألة 110.7، نجد أن

$$a_{ij_k} = c_1 b_{1j_k} + c_2 b_{2j_k} + \cdots + c_s b_{sj_k} \qquad (3)$$

بما أن B مختزلة صفياً، فإن b_{jk_k} هو المدخل غير الصفري الوحيد في العمود j_k لـ B؛ وبالتالي، وبواسطة (3)، $a_{ij_k} = c_k b_{kj_k}$. ويكون a_{kj_k} ، وبواسطة المسألة 111.7، المدخل غير الصفري الوحيد في A؛ وكذلك، $a_{ij_k} = 0$ ، لأن A مختزلة صفياً. وبذلك، $c_k b_{kj_k} = 0$ وبما أن $b_{kj_k} = 1$ ، $c_k = 0$. ينتج عن ذلك أن $R = R_i$ ، وهذا يثبت المبرهنة.

مبرهنة 10.7: لتكن A أي مصفوفة. إذن، تكون A مصفوفة مكافئة صفياً لمصفوفة وحيدة في الشكل الصفي القانوني.

113.7 اثبت مبرهنة 10.7.

▪ لنفترض أن A مكافئة صفياً لمصفوفتين A_1 و A_2، حيث A_1 و A_2 في الشكل الصفي القانوني. من المبرهنة 8.7، $\text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(A_1)$ و $\text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(A_2)$؛ وبالتالي، $\text{rowsp}(A_1) = \text{rowsp}(A_2)$. بما أن A_1 و A_2 في الشكل الصفي القانوني، فإن $A_1 = A_2$ بواسطة المبرهنة 9.7.

مبرهنة 11.7: المصفوفتان A و B يكون لهما نفس الفضاء الصفي إذا وفقط إذا كان لشكليهما الصفيين القانونيين نفس الصفوف غير الصفرية.

114.7 أثبت مبرهنة 11.7.

▪ ليكن A_1 و B_1 الشكلين الصفيين القانونيين لـ A و B، على الترتيب. لنفترض أن لـ A و B نفس الفضاء الصفي. إذن $\text{rowsp}(A_1) = \text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(B) = \text{rowsp}(B_1)$. من المبرهنة 9.7، يكون لـ A_1 و B_1 نفس الصفوف غير الصفرية. وبالعكس، لنفترض أن لـ A_1 و B_1 نفس الصفوف غير الصفرية. إذن، $\text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(A_1) = \text{rowsp}(B_1) = \text{rowsp}(B)$. وهذا يثبت المبرهنة.

115.7 ليكن R متجهياً صفياً، ولتكن B مصفوفة بحيث تكون RB معرّفة. بيّن أن RB تركيبة خطية من صفوف B.

▪ لنفترض أن $R = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ و $B = (b_{ij})$. ولنرمز بـ $B_1, \ldots, B_m$ لصفوف B، وبـ $B^1, \ldots, B^n$ لأعمدتها. إذن

$$\begin{aligned} RB &= (R \cdot B^1, R \cdot B^2, \ldots, R \cdot B^n) \\ &= (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \cdots + a_m b_{m1}, a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + \cdots + a_m b_{m2}, \ldots, a_1 b_{1n} + a_2 b_{2n} + \cdots + a_m b_{mn}) \\ &= a_1(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) + a_2(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}) + \cdots + a_m(b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn}) \\ &= a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_m B_m \end{aligned}$$

وهكذا، تكون RB تركيبة خطية لصفوف B، كما افترضنا.

مبرهنة 12.7: لتكن A و B مصفوفتين، بحيث تكون AB معرّفة. إذن، الفضاء الصفي لـ B يحتوي الفضاء الصفي لـ AB.

116.7 اثبت المبرهنة 12.7.

▪ إن صفوف AB هي $R_i B$ حيث R_i الصف i في A. وبالتالي، وبواسطة النتيجة أعلاه، يكون كل صف لـ AB في الفضاء الصفي لـ B. إذن، يكون الفضاء الصفي لـ B محتوياً الفضاء الصفي لـ AB.

117.7 بيّن أن $\text{colsp}(AB) \subseteq \text{colsp}(A)$.

▪ لدينا، باستخدام 12.7،

$$\text{colsp}(AB) = \text{rowsp}((AB)^T) = \text{rowsp}(B^T A^T) \subseteq \text{rowsp}(A^T) = \text{colsp}(A)$$

118.7 لنفترض أن P مصفوفة غير شاذة (عكوسة). اثبت أن $\text{rowsp}(PA) = \text{rowsp}(A)$.

■ لدينا، باستخدام مبرهنة 12.7، أن $\text{rowsp}(A) = \text{rowsp}(IA) = \text{rowsp}(P^{-1}PA) \subseteq \text{rowsp}(PA) \subseteq \text{rowsp}(A)$. لذلك، لن يكون هناك إحتواء فعلي، وبالتالي $\text{rowsp}(PA) = \text{rowsp}(A)$. [بشكل بديل. تكون PA مكافئة صفياً لـ A وبالتالي يكون لـ PA و A نفس الفضاء الصفي، بواسطة المبرهنة 8.7.]

6.7 المجاميع والمجاميع المباشرة

119.7 لتكن U و V فضاءيين جزئيين في فضاء متجهي V. عرّف $U + W$.

■ تتكون $U + W$ من كل المجاميع $u+w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$:

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

120.7 لنفترض أن U و W فضاءان جزئيان للفضاء المتجهي V. أثبت أن $U + W$ فضاء جزئي في V.

■ بما أن U و W فضاءان جزئيان، فإن $0 \in U$ و $0 \in W$. وبالتالي، $0 = 0 + 0 \in U + W$. لنفترض أن $u, v' \in U + W$. إذن، يوجد $u, u' \in U$ و $w, w' \in W$ بحيث أن $v = u + w$ و $v' = u' + w'$. بما أن U و W فضاءان جزئيان، فإن $u + u' \in U$ و $w + w' \in W$؛ ولدينا من أجل أي سلّمي k، $ku \in U$ و $kw \in W$. ينتج عن ذلك أن $v + v' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W$، وأن $kv = k(u + w) = ku + kw \in U + W$ من أجل أي سلمي k. وبذلك، يكون $U + W$ فضاءً جزئياً في V.

121.7 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 فوق **R**. ولتكن U متكونة من تلك المصفوفات في V التي صفها الثاني صفري، ولتكن W متكونة من تلك المصفوفات في V التي عمودها الثاني صفري:

$$U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\right\} \qquad W = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbf{R}\right\}$$

صف $U + W$ و $U \cap W$.

■ تتكون $U+W$ من تلك المصفوفات التي مداخلها السفلية اليمنى صفرية، وتتكون $U \cap W$ من تلك المصفوفات التي صفوفها وأعمدتها الثانية صفرية:

$$U + W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \quad \text{و} \quad U \cap W = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{R}\right\}$$

المسائل 122.7-124.7 تتعلق بالفضاءين الجزئيين U و W في فضاء متجهي V.

122.7 أثبت أن U و W محتويان في $U + W$.

■ ليكن $u \in U$. يكون W، فرضا، فضاءً جزئياً في V، وبذلك $0 \in W$. وبالتالي، $u = u + 0 \in U + W$. ينتج عن ذلك أن $U + W$ يحتوي U. وبالمثل، $U + W$ يحتوي W.

123.7 بيِّن أن $U + W$ أصغر فضاء جزئي في V يحتوي U و W، أي بيِّن أن $U + W = \text{span}(U,W)$.

■ بما أن $U + W$ فضاء جزئي في V يحتوي U و W معاً، فإنه لا بد أن يحتوي البسطة الخطية لـ U و W؛ أي $\text{span}(U,W) \subseteq U + W$.

من جهة أخرى، إذا $v \in U + W$، إذن $v = u + w = 1u + 1w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$؛ بالتالي، يكون v تركيبة خطية لعناصر في $U \cup W$، وبذلك ينتمي إلى $\text{span}(U,W)$. إذن، $U + W \subseteq \text{span}(U,W)$. يعطينا التضمينان معاً النتيجة المطلوبة.

124.7 بيِّن أن $W + W = W$.

■ بما أن W فضاء جزئي في V، فإن W يكون مغلقاً تحت الجمع المتجهي، وبالتالي، $W + W \subseteq W$. لدينا، من المسألة 122.7، أن $W \subseteq W + W$. إذن $W + W = W$.

125.7 أعط مثالاً لمجموعة S في $\mathbb{R}^2$ بحيث أن $S + S \subset S$ (إحتواء فعلي).

■ لتكن $S = \{(0,5),(0,6),(0,7),\ldots\}$. إذن، $S + S \subset S$.

126.7 أعط مثالاً لمجموعة جزئية S في $\mathbb{R}^2$ بحيث أن $S \subset S + S$ (إحتواء فعلي).

■ لتكن $S = \{(0,0),(0,1)\}$. إذن $S \subset S + S$.

127.7 أعط مثالا لمجموعة جزئية S في $\mathbb{R}^2$ لا تكون فضاءً جزئياً في $\mathbb{R}^2$، ولكنها تحقق $S + S = S$.

■ لتكن $S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),\ldots\}$. إذن، $S + S = S$.

128.7 لنفترض أن U و V فضاءان جزئيان في فضاء متجهي لـ V بحيث أن $U = \text{span}(S)$ و $W = \text{span}(T)$. بين أن $U + W = \text{span}(S \cup T)$.

■ بما أن $S \subseteq U \subseteq U + W$ و $T \subseteq W \subseteq U + W$، يكون لدينا $S \cup T \subseteq U + W$. وبالتالي، فإن $\text{span}(S \cup T) \subseteq U + W$. لنفترض الآن أن $v \in U + W$. إذن $v = u + W$، حيث $u \in U$ و $w \in W$. بما أن $U = \text{span}(S)$ و $W = \text{span}(T)$، $u = a_1u_1 + \ldots + a_ru_r$ و $w = b_1W_1 + \ldots + b_sw_s$، حيث $a_i, b_i \in K$، $u_i \in S$، $W_i \in T$. إذن $v = u + w = a_1u_1 + \ldots + a_ru_r + b_1w_1 + \ldots + b_sw_s$. وبذلك، $U + W \subseteq \text{span}(S \cup T)$. الاحتواءان يعطياننا $U + W = \text{span}(S \cup T)$.

129.7 نفترض أن U و W فضاءان جزئيان. بيّن أن $V = U + W$ إذا أمكن كتابة كل $v \in V$ في الشكل $v = u + w$، حيث $u \in U$ و $w \in W$.

■ ليكن لدينا $v = u+w$ من أجل كل $v \in V$، حيث $u \in U$ و $w \in W$. إذن، $v \in U+W$ وبذلك $v \subseteq u+w$. بما أن U و W فضاءان جزئيان في V، فيكون لدينا $U+W \subseteq V$. يعطينا الاحتواءان $V = U+W$.

130.7 عرّف المجموع المباشر $V = U \oplus W$.

■ يُقال عن الفضاء المتجهي V أنه مجموع مباشر لفضاءيه الجزئيين U و W والذي نرمز له بـ $V = U \oplus W$ إذا أمكن كتابة كل متجه $v \in V$ بطريقة واحدة وفقط واحدة في الشكل $v = u + w$، حيث $u \in U$ و $w \in W$.

مبرهنة 13.7: يكون الفضاء المتجهي V مجموعاً مباشراً لفضاءيه الجزئيين U و W إذا وفقط إذا (i) $V = U + W$ و (ii) $U \cap W = \{0\}$.

131.7 أثبت مبرهنة 13.7.

■ لنفترض $V = U \oplus W$. إذن يمكن كتابة أي $v \in V$ في الشكل الوحيد $v = u + w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. إذن، $V = U + W$. لنفترض الآن أن $v \in U \cap W$. إذن

و

$$u = v + 0 \quad \text{حيث} \quad v \in U, 0 \in W \tag{1}$$

$$v = 0 + v \quad \text{حيث} \quad 0 \in U, v \in W \tag{2}$$

لأن مجموعاً مثل هذا، من أجل v، يجب أن يكون وحيداً، $v = 0$. إذن، $U \cap W = \{0\}$.

من جهة أخرى، نفترض أن $V = U+W$ و $U \cap W = \{0\}$. لتكن $v \cap V$. بما $V = U + W$، فإنه يوجد $u \in U$ و $w \in W$ بحيث أن $v = u+w$. يلزمنا أن نبين أن هذا المجموع وحيد. لنفترض أيضاً أن $v = u' + w'$ حيث $u' \in U$ و $w' \in W$. إذن، $u + w = u' + w'$، وبذلك $u - u' = w' - w$. ولكن $u - u' \in U$ و $w' - w \in W$؛ وبالتالي، وبسبب $U \cap W = \{0\}$، $u - u' = 0$ و $w' - w = 0$؛ إذن، $u = u'$ و $w = w'$. وبذلك، فإن مثل هذا المجموع، من أجل $v \in V$، يكون وحيداً و $V = U \oplus W$.

132.7 ليكن، في الفضاء المتجهي $\mathbf{R}^3$، U المستوى -xy و W المستوى -yz:

$$U = \{(a,b,0):a,b \in \mathbf{R}\} \quad \text{و} \quad W = \{(0,b,c):b,c \in \mathbf{R}\}$$

إذن، $\mathbf{R}^3 = U+W$، لأن كل متجه في $\mathbf{R}^3$ هو مجموع متجه في U ومتجه في W. بيِّن أن $\mathbf{R}^3$ ليست المجموع المباشر لـ U و W.

■ بيِّن أنّه يمكن كتابة $v \in \mathbf{R}^3$ بأكثر من طريقة كمجموع لمتجه في U ومتجه في W؛ مثلاً، $(3,5,7) = (3,1,0) + (0,4,7)$، وأيضاً $(3,5,7) = (3,-4,0) + (0,9,7)$. من جهة أخرى، لدينا $(0,1,0) \in U \cap W$: إذن $U \cap W \neq \{0\}$. وبذلك، $\mathbf{R}^3 \neq U \oplus W$.

133.7 ليكن، في $\mathbf{R}^3$، U المستوى -xy وليكن W محور -z:

$$U = \{(a,b,0):a,b \in \mathbf{R}\} \quad \text{و} \quad W = \{(0,0,c):c \in \mathbf{R}\}$$

بيِّن أن $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

■ يمكن كتابة أي متجه $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ كمجموع لمتجه في U ومتجه في W. وذلك بطريقة واحدة وواحدة فقط:

$$(a,b,c) = (a,b,0) + (0,0,c)$$

وبالتالي، يكون $\mathbf{R}^3$ المجموع المباشر لـ U و W، أي أن $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

134.7 ليكن U و W الفضاءين الجزئيين لـ $\mathbf{R}^3$ المعرّفين بواسطة

$$U = \{(a,b,c):a = b = c\} \quad \text{و} \quad W = \{(0,b,c)\}$$

(لاحظ أن W هو المستوى -yz). بيِّن أن $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

■ لاحظ أولاً أن $U \cap W = \{0\}$، لأن $v = (a,b,c) \in U \cap W$ تقتضي $a = b = c$ و $a = 0$: وهذا يقول إلى $a = 0$، $b = 0$، $c = 0$، أي أن $v = (0,0,0)$.

ونقول أيضاً بأن $\mathbf{R}^3 = U + W$. لأنه إذا $v = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$، فإن $v = (a,a,a) + (0,b-a,c-a)$ حيث $(a,a,a) \in U$ و $(0,b-a,c-a) \in W$. الشرطان، $U \cap W = \{0\}$ و $\mathbf{R}^3 = U + W$ يقتضيان معاً $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

135.7 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة -n فوق حقل $\mathbf{R}$. وليكن U و W الفضاءين الجزئيين للمصفوفات المتناظرة وتخالفية التناظر، على الترتيب. بيِّن أن $V = U \oplus W$. (تكون المصفوفة M متناظرة إذا وفقط إذا $M = M^T$، وتخالفية - التناظر إذا وفقط إذا $M^T = -M$).

■ نبيـــن أولا أن $V = U + W$. لتكـــن A أي مصفـــوفـــة مـــربعـــة -n إختيـــاريـــة. لاحـــظ أن $A = 1/2\,(A + A^T) + 1/2\,(A - A^T)$. نـــزعـــم هنا أن $1/2(A + A^T) \in U$ وأن $1/2\,(A-A^T) \in W$. من أجل $(1/2\,(A + A^T))^T = 1/2\,((A + A^T)^T = 1/2\,(A^T + A^{TT}) = 1/2\,(a + A^T)$. أي أن $1/2\,(A + A^T)$ مصفوفة متناظرة. كما أن $(1/2\,(A - A^T))^T = 1/2\,(A - A^T)^T = 1/2\,(A^T - A) = -1/2\,(A - A^T)$، أي أن $1/2\,(A - A^T)$ تخالفية - التناظر.

نبيـن بعـد ذلـك أن $U \cap W = \{0\}$. لنفتـرض أن $M \in U \cap W$. إذن، $M = M^t$ و $M^T = -M$ وهـذا يقتضـي $M = -M$ أو $M = 0$. بالتالي، $U \cap W = \{0\}$. إذن، $V = U \oplus W$.

136.7 بيِّن أن $S + T = T + S$ من أجل أي مجموعتين جزئيتين S و T في فضاء متجهي V.

■ بما أن $u + w = w + u$ من أجل أي متجهين u و w في V، يكون لدينا $S + T = \{u + w:u \in S,w \in T\} = \{w+u:u \in S,w \in T\} = T+S$.

137.7 بيِّن أن $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$ من أجل أي مجموعات جزئية S_1، S_2، S_3 في فضاء متجهي V.

■ بما أن $(u + v) + w = u + (v + w)$ من أجل أي متجهات $u,v,w \in V$، يكون لدينا

$$(S_1 + S_2) + S_3 = \{(u+v)+w: u\in S_1, v\in S_2, w\in S_3\}$$
$$= \{u+(v+w): u\in S_1, v\in S_2, W\in S_3\} = S_1 + (S_2 + S_3)$$

138.7 بيِّن أن $S+V=V+S=V$ من أجل أي مجموعة جزئية S في فضاء متجهي V.

■ بما أن $S\subseteq V$ و $V\subseteq V$، يكون لدينا $S+V\subseteq V$. لننظر الآن في أي متجه $v\in V$. وليكن $s\in S$. إذن $v-s\in V$. بما أن $v=s+(v-s)$، يكون لدينا $v\in S+V$. وبالتالي، $V\subseteq S+V$. الاحتواءان يقتضيان معاً $S+V=V$. ونعرف، من المسألة 136.7، $V+S=S+V=V$.

139.7 بين أن $S+\{0\}=\{0\}+S=S$ من أجل أي مجموعة جزئية S في فضاء متجهي V.

■ لدينا، من أجل أي $u\in S$، $u+0=0+u=u$. وبالتالي، $S+\{0\}=\{u+0: u\in S\}=\{u: u\in S\}=S$. وبذلك، $S+\{0\}=S$. نجد، من المسألة 136.7، أن $\{0\}+S=S+\{0\}=S$.

140.7 لنفترض أن U، V، و W فضاءات جزئية في فضاء متجهي. أثبت أن $(U\cap V)+(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$.

■ ليكن $u\in(U\cap V)+(U\cap W)$. إذن $u=u_1+u_2$ حيث $u_1\in U\cap V$ و $u_2\in U\cap W$ وبالتالي $u_1,u_2\in U$. بما أن U فضاء جزئي، إذن $u=u_1+u_2\in U$. أيضاً، $u_1\in V$ و $u_2\in W$، ولذلك فإن $u=u_1+u_2\in V+W$. إذن، $u\in U\cap(V+W)$ ومنها $(U\cap V)+(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$.

141.7 أوجد فضاءات جزئية U، V، W في $\mathbf{R}^2$ بحيث أن $(U\cap V)+(U\cap W)\neq U\cap(V+W)$.

■ ليكن $U=\{(a,b): a=b\}$ (المستقيم $y=x$)، $V=\{(a,0)\}$ (محور x)، $W=\{(0,b)\}$ (محور y). إذن، $U\cap V=\{0\}$ و $U\cap W=\{0\}$. وبالتالي $(U\cap V)+(U\cap W)=\{0\}$. لدينا، من جهة أخرى، $U\cap(V+W)=U\cap\mathbf{R}^2=U\neq\{0\}=(U\cap V)+(U\cap W)$.

142.7 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة n- فوق حقل K. وليكن U الفضاء الجزئي للمصفوفات المثلثية العليا، و W الفضاء الجزئي للمصفوفات المثلثية السفلية. لاحظ أن $V=U+W$. بين أن $V\neq U\oplus W$.

■ $U\cap W\neq\{0\}$ لأن $U\cap W$ تتكون من كل المصفوفات القطرية. لذلك، لا يمكن للمجموع أن يكون مباشراً.

143.7 ليكن V الفضاء المنجهي لكل الدوال من الحقل الحقيقي **R** إلى **R**. ليكن U الفضاء الجزئي للدوال الزوجية و W الفضاء الجزئي للدوال الفردية. بيِّن أن $V=U\oplus W$. [تذكر أن f تكون زوجية إذا وفقط إذا $f(-x)=f(x)$ وفردية إذا وفقط إذا $f(-x)=-f(x)$].

■ $f(x)=1/2\,(f(x)+f(-x))+1/2\,(f(x)-f(-x))$، حيث $1/2\,(f(x)+f(-x))$ زوجية و $1/2\,(f(x)-f(-x))$ فردية. إذن $V=U+W$. لنفترض أن $f\in U\cap W$. إذن $f(-x)=f(-x)$ ومنها $f(-x)=0$. وبذلك لدينا، من أجل كل $x\in\mathbf{R}$، $f(x)=0$. إذن، يكون $f=0$، الدالة الصفرية وبذلك، $U\in W=\{0\}$، ومنها $V=U\oplus W$.

144.7 لنفترض أن $W_1, W_2, \dots, W_r$ فضاءات جزئية لفضاء متجهي V. ناقش الفرق بين $V=W_1+W_2+\dots+W_r$ و $V=W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_r$.

■ افترض أنه يمكن كتابة كل $v\in V$ كمجموع في الشكل $v=w_1+w_2+\dots+w_r$، حيث $w_i\in W_i$. إذن، $V=W_1+W_2+\dots+W_r$. إذا كان مثل هذا المجموع وحيداً، فإنه يكون مباشراً، أي أن $V=W_r\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_r$.

145.7 لتكن W_1، W_2، W_3 محاور x، y، z، على الترتيب، $\mathbf{R}^3$. بيِّن أن $\mathbf{R}^3=W_1\oplus W_2\oplus W_3$.

■ يمكن كتابة أي متجه $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$، وبشكل وحيد، كمجموع متجه في W_1، ومتجه في W_2، ومتجه في W_3، كما يلي:

$$(a,b,c)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$$

وبذلك، $\mathbf{R}^3=W_1\oplus W_2\oplus W_3$.

146.7 لنفترض أن $W_1, W_2, \ldots, W_r$ فضاءات جزئية في V بحيث أن $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_r$. ولنفترض أنه يمكن كتابة $0 \in V$، وبشكل وحيد، كمجموع $0 = w_1 + w_2 + \ldots + w_r$ حيث $w_i \in W_i$. بيّن أن $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$، أي أن المجموع مباشر.

■ بما أن $0 = 0_1 + \ldots + 0_r$ حيث 0_i الصفر المتجهي في W_i، وهو مجموع وحيد من أجل $0 \in V$. ليكن $v \in V$، وافترض أن $v = u_1 + u_2 + \ldots + u_r$ وأن $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_r$ حيث $u_i, w_i \in W_i$. إذن، $0 = v - v = (u_1 - w_1) + (u_2 - w_2) + \ldots + (u_r - v_r)$ حيث $u_i - v_i \in W_i$. بما أن مجموعاً مثل هذا وحيد من أجل 0، فإن $u_i - v_i = 0$، من أجل i، وبالتالي $u_i = v_i$ من أجل i. وهكذا، فإن مجموعاً مثل هذا يكون أيضاً وحيداً، وكذلك $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.

147.7 لنفترض أن W_1، W_2، W_3 هي المحورين x و y والمستقيم $y = x$ على الترتيب، في المستوى $\mathbf{R}^2$. بيّن أن $\mathbf{R}^2 \neq W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ (رغم أن $\mathbf{R}^2 = W_1 + W_2 + W_3$ و $W_i \cap W_j = \{0\}$ من أجل $i \neq j$).

■ بيّن أن متجهاً $v \in \mathbf{R}^2$، وليكن $v = (0,0)$، يمكن كتابته بأكثر من طريقة كمجموع لمتجه في W_1، ومتجه في W_2، ومتجه في W_3:

$$(0,0) = (0,0) + (0,0) + (0,0) = (1,0) + (0,1) + (-1,-1)$$

وبذلك، $\mathbf{R}^2 \neq W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

148.7 ليكن U و W فضاءين جزئيين فوق حقل K. عرِّف المجموع المباشر الخارجي لـ U و W.

■ ليكن V مجموعة الأزواج المرتبة (u,w) حيث u تنتمي إلى U و w إلى W: $V = \{(u,w): u \in U, w \in W\}$. إذن، يكون V فضاءً متجهياً فوق K بالجمع في V والضرب السلمي على V معرّفين بواسطة

$$(u,w) + (u',w') = (u + u', w + w') \quad \text{و} \quad k(u,w) = (ku, kw)$$

حيث $u, u' \in U$، $w, w' \in W$ و $k \in K$. (يُعرَّف هذا الفضاء V باسم «المجموع المباشر الخارجي» لـ U و W).

تتعلق المسائل 149.7-152.7 بفضاء متجهي V يكون المجموع المباشر الخارجي (أنظر المسألة 148.7) لفضاءين متجهين U و W فوق حقل k. افترض، أيضاً، أن 0_1 و 0_2 هما على الترتيب المتجهان الصفريان لـ U و W.

149.7 بيّن أن $\theta = (0_1, 0_2)$ هو المتجه الصفري لـ V.

■ ليكن $v \in V$، أي $v = (u,w)$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. إذن $v + \theta = (u,w) + (0_1,0_2) = (u + 0_1, w + 0_2) = (u,w) = v$. وبالمثل $\theta + v = v$. إذن θ المتجه الصفري في V.

150.7 أوجد السالب $-v$ لمتجه $v \in V$.

■ إفترض أن $v = (u,w)$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. إذن، $-v = (-u,-w)$ لأن لدينا $\theta = (-u,-w) + (u,w) = (0_1, 0_2)$.

151.7 ليكن $\hat{U} = \{v \in V : v = (u, 0_2)\}$ و $\hat{W} = \{v \in V : v = (0_1, w)\}$. بيّن أن $\hat{U}$ و $\hat{W}$ فضاءان جزئيان لـ V.

■ لدينا أولاً $\theta = (0_1, 0_2) \in \hat{U}$. إفترض أن $v_1, v_2 \in \hat{U}$؛ ليكن $v_1 = (u_1, 0_2)$ و $v_2 = (u_2, 0_2)$. إذن،

$$v_1 + v_2 = (u_1, 0_2) + (u_2, 0_2) = (u_1 + u_2, 0_2)$$
$$kv_1 = k(u_1, 0_2) = (ku_1, k0_2) = (ku_1, 0_2)$$

حيث $k \in K$. وبذلك، $v_1 + v_2$ و kv_1 ينتميان إلى $\hat{U}$، أي أن $\hat{U}$ فضاء جزئي في V. بالمثل، يكون $\hat{W}$ فضاء جزئياً في V.

152.7 بين أن $V = \hat{U} \oplus \hat{W}$.

■ ليكن $v \in V$، إذن، $v = (u,W)$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. وبالتالي، $v = (u, 0_2) + (0_1, w) \in \hat{U} + \hat{W}$. وهكذا، $V = \hat{U} + \hat{W}$. من جهة أخرى، إفترض أن $v = (u, w) \in \hat{U} + \hat{W}$. إذن، $w = 0_2$، لأن $v \in \hat{U}$ و $u = 0_1$. وبذلك، $v = \theta$ أي أن $\hat{U} \cap \hat{W} = \{0\}$. إذن، $V = \hat{U} \oplus \hat{W}$.

الفصل 8
المجاميع والمجاميع المباشرة

إن الترميز في هذا الفصل هو نفسه كما الفصل السابق؛ أي أن V ترمز إلى فضاء متجهي، K إلى حقل السلّميات، u و v و w متجهات في V، a و b و c و k سلّميات في K [بأدلة سفلية أو بدونها].

1.8 الخواص الابتدائية للترابط والاستقلال الخطيين

1.8 عرِّف الترابط الخطي والاستقلال الخطي.

■ ليكن V فضاءً خطياً فوق حقل K. نقول أن $v_1,\ldots,v_m \in V$ مترابطة خطياً فوق K، أو مترابطة فحسب، إذا وجدت سلّميات $a_1,\ldots,a_m \in K$، ليست جميعها أصفاراً، بحيث أن

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0 \quad (1)$$

ونقول، في غير ذلك، أنها مستقلة خطياً فوق K، أو مستقلة فحسب.

ملاحظة: لاحظ أن العلاقة (1) تتحقق دائماً إذا كانت كل الـ a صفرية. إذا كانت هذه العلاقة تتحقق في هذه الحالة فقط، أي أن $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0$ تقتضي $a_1 = 0,\ldots,a_m = 0$

فإن المتجهات تكون مستقلة خطياً. من جهة أخرى، إذا تحققت العلاقة (1) أيضاً عندما واحد من الـ a مختلف عن 0، فإن المتجهات تكون عندئذ مترابطة خطياً.

2.8 بيِّن أنه إذا كان 0 واحد من المتجهات $v_1,\ldots,v_m$، وليكن $v_1 = 0$، فإن المتجهات يجب أن تكون مترابطة خطياً.

■ لدينا $1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_m = 1.0 + 0 + \ldots + 0 = 0$، حيث معامل v_1 ليس صفراً.

3.8 بيِّن أن أي متجه غير صفري v يكون، لوحده، مستقل خطياً.

■ لنفترض أن $kv = 0$، ولكن $v \neq 0$، إذن $k = 0$. وبذلك يكون v مستقلاً خطياً.

4.8 لنفترض $m > 1$. بيِّن أن المتجهات $v_1,\ldots,v_m$ تكون مترابطة خطياً إذا وفقط إذا كان أحدهما تركيبة خطية من المتجهات الأخرى.

■ لنفترض أن أحدهما، ليكن v_i مثلاً، تركيبة خطية للمتجهات الاخرى:

$$v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_mv_m$$

إذن، بإضافة $-v_i$ إلى الطرفين، نحصل على $a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots + a_mv_m = 0$، حيث معامل v_i ليس 0؛ وبالتالي، تكون المتجهات مترابطة خطياً. وبالعكس، نفترض أن المتجهات مترابطة خطياً، ولتكن $b_1v_1 + \ldots + b_jv_j + \ldots + b_mv_m = 0$ حيث $b_j \neq 0$. إذن،

$$v_j = -b_j^{-1}b_1v_1 - \cdots - b_j^{-1}b_{j-1}v_{j-1} - b_j^{-1}b_{j+1}v_{j+1} - \cdots - b_j^{-1}b_mv_m$$

وبذلك، يكون v_j تركيبة خطية للمتجهات الاخرى.

5.8 عرِّف مجموعة مترابطة أو مستقلة من المتجهات.

■ نقول عن مجموعة $\{v_1,\ldots,v_m\}$ أنها مجموعة مترابطة أو مستقلة وفقاً لكون المتجهات $v_1,\ldots,v_m$ مترابطة أو مستقلة خطياً. وتكون مجموعة لانهائية S من المتجهات مترابطة خطياً إذا وجدت متجهات $u_1,\ldots,u_k$ في S تكون مترابطة خطياً؛ وتكون S مستقلة خطياً في غير ذلك. وتعرف المجموعة الخالية $\varnothing$ بأنها مستقلة خطياً.

6.8 بيِّن أنه إذا تساوى إثنان من المتجهات $v_1,...,v_m$ مثلاً $v_1 = v_2$، فإن المتجهات تكون مترابطة خطياً.

■ لدينا $v_1 - v_2 + 0v_3 + ... + 0v_m = 0$ حيث معامل v_1 ليس 0.

7.8 بيِّن أن متجهين v_1 و v_2 يكونان مترابطين إذا وفقط إذا كان أحدهما مضاعفاً للآخر.

■ لنفترض أن v_1 و v_2 مترابطان. يوجد إذن سلَّميان a و b ليسا صفريين معاً، بحيث أن $av_1 + bv_2 = 0$. ليكن $a \neq 0$، إذن $v_1 = (-b/a)v_2$. وبالعكس إذا فرضنا أنّ $v_1 = kv_2$، إذن $v_1 - kv_2 = 0$ حيث 1 معامل v_1، وبالتالي يكون v_1 و v_2 مترابطين. [لاحظ أن هذه حالة خاصة من مسألة 4.8].

8.8 صف هندسياً الترابط الخطي لمتجهين ولثلاثة متجهات في الفضاء الحقيقي $\mathbf{R}^3$.

■ يكون متجهان v_1 و v_2 في $\mathbf{R}^3$ مترابطين إذا وفقط إذا كانا يقعان على نفس المستقيم عبر نقطة الأصل. وتكون ثلاثة متجهات u، v، w في $\mathbf{R}^3$ مترابطة إذا وفقط إذا كانت تقع في نفس المستوى عبر نقطة الأصل.

9.8 بيِّن أنه إذا كانت المجموعة $\{v_1, \ldots, v_m\}$ مترابطة، فإن أي تنسيق جديد للمتجهات $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ يكون مترابط أيضاً.
[وبالتالي، إذا كانت $v_1, \ldots, v_m$ مستقلة، فإن الأمر يكون كذلك بالنسبة لأي تنسيق جديد].

■ لنفترض أن $v_1, v_2, \ldots, v_m$ مترابطة. توجد عندئذ سلَّميات $a_1, a_2, ..., a_m$ ليست أصفاراً كلها، بحيث أن $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$. إذن، $a_{i_1}v_{i_1} + a_{i_2}v_{i_2} + \cdots + a_{i_m}v_{i_m} = 0$، بعض $a_{i_j} \neq 0$. وبذلك، $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$.

10.8 لنفترض أن $S = \{v_1,...,v_m\}$ تحتوي مجموعة جزئية مترابطة، ولتكن $\{v_1,...,v_r\}$. بيِّن أن S تكون أيضاً مترابطة. وبالتالي، كل مجموعة جزئية في مجموعة مستقلة تكون مستقلة.

■ بما أن $\{v_1,...,v_r\}$ مترابطة، فإنه توجد سلَّميات $a_1,...,a_r,0,...0$ ليست صفرية كلها، بحيث أن $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_rv_r + 0v_{r+1} + ... + 0v_m = 0$. إذن، S مترابطة.

11.8 لنفترض أن $\{v_1,...,v_m\}$ مستقلة، ولكن $\{v_1,...,v_m,w\}$ مترابطة. بيِّن أن w تركيبة خطية في الـ v_i.

■ بما أن $\{v_1,...,v_m,w\}$ مترابطة، توجد عندئذ سلَّميات $a_1,...,a_m,b$ ليست صفرية كلها، بحيث أن $a_1v_1 + ... + a_mv_m + bw = 0$. إذا $b = 0$، فإن واحداً من الـ a_i ليس صفراً و $a_1v_1 + ... + a_mv_m = 0$. ولكن هذا يناقض الفرضية بأن $\{v_1,...,v_m\}$ مستقلة. إذن، $b \neq 0$، وبذلك $w = b^{-1}(-a_1v_1 - ... - a_mv_m) = -b^{-1}a_1v_1 - ... - b^{-1}a_mv_m$. أي أن w تركيبة خطية في الـ v_i.

12.8 لنفترض أن $(A_1, A_2, ...)$ مجموعات مستقلة خطياً من المتجهات، وأن $A_1 \subset A_2 \subset ...$. بيِّن أن الاتحاد $A = A_1 \cup A_2 \cup ...$ مجموعة مستقلة خطياً أيضاً.

■ لنفترض أن A مترابطة خطياً. إذن، توجد متجهات $v_1,...,v_n \in A$ وسلَّميات $a_1,...,a_n \in K$، ليست صفرية كلها، بحيث أن

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0 \quad (1)$$

بما أن $A = \cup A_i$، و $v_i \in A$، فإنه توجد مجموعة $A_{i1},..., A_{in}$ بحيث أن

$$v_1 \in A_{i_1} \qquad v_2 \in A_{i_2} \qquad \ldots \qquad v_n \in A_{i_n}$$

ليكن k الدليل الأعظم للمجموعات A_{i_j}: $k = \max(i_1, \ldots, i_n)$. ينتج عندئذ، وبما أن $A_1 \subset A_2 \subset ...$، أن كل A_{i_j} محتواة في A_k. وبالتالي، $v_1, v_2, ..., v_n \in A_k$، وبذلك وبسبب (1) تكون A_k مترابطة خطياً، وهذا يناقض فرضيتنا. إذن، تكون A مستقلة خطياً.

2.8 الترابط الخطي للمتجهات

13.8 حدِّد ما إذا كان المتجهان u و v مترابطين خطياً أم لا حيث: (أ) $u = (3,4)$، $v(1,-3)$؛ (ب) $u = (2,-3)$، $v = (6,-9)$.

يكون متجهان u و v مترابطين إذا وفقط إذا كان أحدهما مضاعفاً للآخر. (أ) لا؛ فليس أي منهما مضاعفاً للآخر. (ب) نعم؛ لأن $v = 3u$.

14.8 حـدّد مـا إذا كـان u و v متـرابطيـن خطيـاً أم لا، حيـث: (أ) $u = (4,3,-2)$، $v = (2,-6,7)$؛ (ب) $u = (-4,6,-2)$، $v = (2,-3,1)$.

■ (أ) لا، فليس أي منهما مضاعفاً للآخر. (ب) نعم؛ لأن $u = -2v$.

15.8 حدّد ما إذا كانت المصفوفتين A و B مترابطتين أم لا، حيث

(أ) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (ب) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

■ (أ) نعم؛ لأن $B = 2A$. (ب) لا؛ فليست إحداهما مضاعفة للأخرى.

16.8 حدّد ما إذا كانت الحدوديتان u و v مترابطتين أم لا حيث

(أ) $u = 2 - 5t + 6t^2 - t^3$، $v = 3 + 2t - 4t^2 + 5t^3$؛ (ب) $u = 1 - 3t + 2t^2 - 3t^3$، $v = -3 + 9t - 6t^2 + 9t^3$.

■ (أ) لا، فليست إحداهما مضاعِفة للأخرى. (ب) نعم؛ $v = -3u$.

تتعلق المسائل 17.8، 20.8 بمتجهات في الفضاء الحقيقي $\mathbf{R}^3$.

17.8 حدّد ما إذا كانت المتجهات $(1,-2,1)$، $(2,1,-1)$، $(7,-4,1)$ مترابطة خطياً أم لا.

■ **طريقة 1**: كوّن تركيبة خطية من المتجهات مساوية للصفر باستخدام سلَميات مجهولة x، y، z:

$$x(1,-2,1) + y(2,1,-1) + z(7,-4,1) = (0,0,0)$$

إذن

$$(x,-2x,x) + (2y,y,-y) + (7z,-4z,z) = (0,0,0)$$

أو

$$(x + 2y + 7z,\ -2x + y - 4z,\ x - y + z) = (0,0,0)$$

ساوِ بين المركبات المتقابلة للحصول على منظومة متجانسة مكافئة، واختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ -2x + y - 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \\ -3y - 6z &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

المنظومة، في شكلها الدرجي، يكون لها فقط معادلتان غير صفريتين في ثلاثة مجاهيل؛ وبالتالي، يكون للمنظومة حلّ غير صفري. إذن، المتجهات الأصلية مترابطة خطياً.

طريقة 2. كوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة، ثم اختزلها إلى شكل درجي مستخدماً العمليات الابتدائية للصفوف:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بما أن في المصفوفة الدرجية فيها صف صفري، فإن المتجهات تكون مترابطة.

18.8 حدّد ما إذا كانت $(1,-3,7)$، $(2,0,-6)$، $(3,-1,-1)$، $(2,4,-5)$ مترابطة خطياً أم لا.

■ نعم، لأن أي $n+1$ (أو أكثر) متجهاً في K^n تكون آلياً مترابطة.

19.8 حدّد ما إذا كانت $(1,2,-3)$، $(1,-3,2)$، $(2,-1,5)$ مترابطة خطياً أم لا.

■ كوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة ثم اختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة الدرجية ليس فيها صفوف صفرية، فإن المتجهات تكون مستقلة.

20.8 حدّد ما إذا كانت $(2,-3,7)$، $(0,0,0)$، $(3,-1,-4)$ مترابطة خطياً أم لا.

■ نعم، لأن $(0,0,0) = 0$ أحد هذه المتجهات.

21.8 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 فوق **R**. حدّد ما إذا كانت المصفوفات $A,B,C\in V$ مترابطة أم لا، حيث

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

■ كوّن تركيبة خطية من المصفوفات A، B، و C مساوية للمصفوفة الصفرية مستخدماً سلّميات مجهولة x، y، z، أي، اكتب $xA+yB+zC=0$. إذن

$$x\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&0\\0&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&z\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix}x+y+z&x+z\\x&x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ساوِ بين المداخل المتقابلة للحصول على منظومة متجانسة مكافئة من المعادلات:

$$\begin{aligned}x+y+z&=0\\x+\quad z&=0\\x\quad&=0\\x+y\quad&=0\end{aligned}$$

بحل المنظومة أعلاه نحصل على الحل الصفري فقط، $x=0$، $y=0$، $z=0$. لقد بينا أن $xA+yB+zC=0$ يقتضي أن $x=0$، $y=0$، $z=0$؛ وبالتالي، تكون المصفوفات A، B، C مستقلة خطياً.

22.8 حدّد مَا إذا كانت المصفوفات A، B، C مترابطة أم لا، حيث

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-5\\-4&0\end{pmatrix}$$

■ كوّن تركيبة خطية من المصفوفات A، B، C مساوية للمصفوفة الصفرية مستخدماً سلّميات مجهولة x، y، z؛ أي نضع $xA+yB+zC=0$. إذن

$$x\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&-5\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix}x&2x\\3x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y&-y\\2y&2y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&-5z\\-4z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix}x+3y+z&2x-y-5z\\3x+2y-4z&x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ساوِ بين المداخل المتقابلة لتحصل على منظومة متجانسة مكافئة لمعادلات خطية، واختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned}x+3y+\ z&=0\\2x-\ y-5z&=0\\3x+2y-4z&=0\\x+2y\quad&=0\end{aligned}\qquad\text{أو}\qquad\begin{aligned}x+3y+\ z&=0\\-7y-7z&=0\\-7y-7z&=0\\-y-\ z&=0\end{aligned}$$

أو أخيراً

$$\begin{aligned}x+3y+z&=0\\y+z&=0\end{aligned}$$

لهذه المنظومة في شكلها الدرجي متغير حرّ، وبالتالي لها حلّ غير صفري، مثلاً $x = 2$، $y = -1$، $z = 1$. لقد بينا أن $xA + yB + zC = 0$ لا تقتضي $x = 0$ و $y = 0$، $z = 0$؛ وبالتالي، تكون المصفوفات مترابطة خطياً.

23.8 ليكن V الفضاء المنجهي للحدوديات من الدرجة 3 فوق **R**. حدّد عما إذا كانت $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$، $v = t^3 - t^2 + 8t + 2$، $w = 2t^3 + 4t^2 + 9t + 5$.

▩ كوّن تركيبة خطية من الحدوديات u، v، w مساوية للحدودية الصفرية مستخدماً سلّميات مجهولة x، y، z؛ أي كوّن $xu + yv + zw = 0$. إذن

$$x(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) + y(t^3 - t^2 + 8t + 2) + z(2t^3 - 4t^2 + 9t + 5) = 0$$

أو

$$xt^3 - 3xt^3 + 5xt + x + yt^3 - yt^2 + 8yt + 2y + 2zt^3 - 4zt^2 + 9zt + 5z = 0$$

أو

$$(x + y + 2z)t^3 + (-3x - y - 4z)t^2 + (5x + 8y + 9z)t + (x + 2y + 5z) = 0$$

يجب أن تكون معاملات قوى t مساوية للصفر:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ -3x - y - 4z &= 0 \\ 5x + 8y + 9z &= 0 \\ x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

بحل المنظومة المتجانسة أعلاه نحصل فقط على الحل الصفري: $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$؛ وبالتالي تكون u، v، w مستقلة.

24.8 حدّد ما إذا كانت الحدوديات u، v، w مترابطة أم لا، حيث $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$، $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$، $w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$.

▩ كوّن تركيبة خطية من هذه الحدوديات وساوها بالحدودية الصفرية مستخدماً سلّميات مجهولة x، y، z؛ أي كوّن $xu + yv + zw = 0$. إذن

$$x(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + y(t^3 + 6t^2 - t + 4) + z(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) = 0$$

أو

$$xt^3 + 4xt^2 - 2xt + 3x + yt^3 + 6yt^2 - yt + 4y + 3zt^3 + 8zt^2 - 8zt + 7z = 0$$

أو

$$(x + y + 3z)t^3 + (4x + 6y + 8z)t^2 + (-2x - y - 8z)t + (3x + 4y + 7z) = 0$$

ساوِ كل معاملات قوى t بالصفر واختزل المنظومة إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 6y + 8z &= 0 \\ -2x - y - 8z &= 0 \\ 3x + 4y + 7z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 2y - 4z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

أو أخيراً

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

المنظومة في شكلها الدرجي لها متغير حرّ وبالتالي حلّ غير صفري. إذن، $xu + yv + zw = 0$ لا تقتضي $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$؛ وبالتالي، تكون الحدوديات مترابطة خطياً.

25.8 ليكن V الفضاء المتجهي للدوال من **R** إلى **R**. بين أن $f,g,h \in V$ مستقلة خطياً، حيث $f(t) = e^{2t}$، $g(t) = t^2$، $h(t) = t$.

▩ كوّن تركيبة خطية للدوال مساوية للدالة الصفرية 0 مستخدماً سلّميات x، y، z: $xf + yg + zh = 0$، ثم بيّن أن $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. نبرز هنا أن $xf + yg + zh = 0$ تعني أنه، من أجل كل قيمة لـ t، $xf(t) + yg(t) + zh(t) = 0$.

في المعادلة $xe^{2t} + yt^2 + zt = 0$، عوّض

$t = 0$	لتحصل على	$xe^0 + y0 + z0 = 0$	أو $x = 0$
$t = 1$	لتحصل على	$xe^2 + y + z = 0$	
$t = 2$	لتحصل على	$xe^4 + 4y + 2z = 0$	

حلّ المنظومة $\begin{cases} x = 0 \\ xe^2 + y + z = 0 \\ xe^4 + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ فتحصل فقط على الحل الصفري $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. وبالتالي، تكون f، g، و h مستقلة.

26.8 بيِّن أن الدوال $h(t) = t$، $g(t) = \cos t$، $f(t) = \sin t$ مستقلة خطياً.

■ كوِّن المعادلة الدّالية $xf + yg + zh = 0$، أي أن $x \sin t + y \cos t + zt = 0$، مستخدماً المجاهيل x، y، z، ثم بيِّن $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$.

طريقة 1. في المعادلة $x \sin t + y \cos t + zt = 0$، عوّض

$t = 0$	لتصبح	$x.0 + y.1 + z.0 = 0$	أو	$y = 0$
$t = \pi/2$	لتصبح	$x.1 + y.0 + z(\pi/2) = 0$	أو	$x + (\pi/2)z = 0$
$t = \pi$	لتصبح	$x.0 + y(-1) + z.\pi = 0$	أو	$-y + \pi z = 0$

نحل المنظومة $\begin{cases} y = 0 \\ x + (\pi/2)z = 0 \\ -y + \pi z = 0 \end{cases}$ لنحصل فقط على الحل الصفري: $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. وبالتالي، تكون f، g، و h مستقلة.

طريقة 2. خذ المشتقات الأولى والثانية والثالثة لـ $x \sin t + y \cos t + zt = 0$ بالنسبة لـ t، فتحصل على

$$x \cos t - y \sin t + z = 0 \quad (1)$$
$$-x \sin t - y \cos t = 0 \quad (2)$$
$$-x \cos t + y \sin t = 0 \quad (3)$$

أضف (1) إلى (3)، فتحصل على $z = 0$. إضرب (2) في $\sin t$، (3) في $\cos t$ ثم إجمع:

$$\begin{aligned} \sin t \times (2): &\quad -x \sin^2 t - y \sin t \cos t = 0 \\ \cos t \times (3): &\quad -x \cos^2 t + y \sin t \cos t = 0 \\ \hline &\quad -x(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad x = 0$$

أخيراً، إضرب (2) في $-\cos t$، و (3) في $\sin t$ ثم اجمع، فتحصل على:

$$y(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0 \quad \text{أو} \quad y = 0$$

بما أن $x \sin t + y \cos t + zt = 0$ يقتضي $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$

إذن، الدوال f، g، h تكون مستقلة.

27.8 بيِّن أن المتجهين $v = (1 + i, 2i)$، $w = (1, 1 + i)$ في $\mathbf{C}^2$ مترابطان خطياً فوق الحقل العقدي C، ولكنهما مستقلان خطياً فوق الحقل الحقيقي R.

■ تذكر أن متجهين يكونان مترابطين إذا وفقط إذا كان أحدهما مضاعفاً للآخر. بما أن الإحداثي الاول لـ w هو 1، فإن v يمكن أن تكون مضاعفاً لـ w إذا وفقط إذا $v = (1 + i)w$. ولكن $1 + i \notin \mathbf{R}$؛ وبالتالي، تكون v، w مستقلتين فوق R. بما أن $(1 + i)w = (1 + i)(1, 1 + i) = (1 + i, 2i) = v$ و $1 + i \in \mathbf{C}$، فإن المتجهين مترابطان فوق C.

28.8 لتكن u، v، w متجهات مستقلة بيِّن أن $u + v$، $u - v$، و $u - 2v + w$ تكون أيضاً مستقلة.

■ لنفترض أن $x(u + v) + y(u - v) + z(u - 2v + w) = 0$ حيث x، y و z سلَّميات. إذن $xu + xv + yu - yv + zu - 2zv + zw = 0$ أو $(x + y + z)u + (x - y - 2z)v + zw = 0$. ولكن u، v، w مستقلة خطياً؛ وبالتالي تكون المعاملات في العلاقة أعلاه صفرية:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

الحل الوحيد لهذه المنظومة هو: $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. وبالتالي، فإن المتجهات $u + v$، $u - v$ و $u - 2v + w$ مستقلة.

3.8 مبرهنات على القواعد والأبعاد

29.8 عرّف قاعدة لفضاء متجهي V.

■ تكون متتالية متجهات $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ قاعدة لـ V إذا (1) كانت $u_1,u_2,\ldots,u_n$ مستقلة خطياً، وإذا (2) $u_1,u_2,\ldots,u_n$ تُولّد V.

30.8 عرّف بعد فضاء متجهي V.

■ نقول أن فضاء متجهياً V ذا بعد منتهٍ n أو أنه نوني ـ البعد، ونكتب $\dim V = n$، إذا كان V يحتوي قاعدة عدد عناصرها n. [أن هذا التعريف للبعد محدد جيداً بواسطة مبرهنة 4.8 والتي تنص على أن أي قاعدتين تحتويان على نفس العدد من العناصر].

ويعرّف بعد الفضاء المتجهي $\{0\}$ بأنه 0. [يتفق هذا، في بعض جوانبه، مع التعريف أعلاه لأن $\emptyset$ مستقل، تعريفاً، ويولّد $\{0\}$]. عندما لا يكون الفضاء المتجهي منتهياً، نقول أنه ذو بعد لا نهائي.

توطئة 1.8: تكون المتجهات غير الصفرية $v_1,\ldots,v_m$ مترابطة خطياً إذا وفقط إذا كان أحدها، وليكن v_i، تركيبة خطية للمتجهات السابقة له:

$$v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1}$$

31.8 اثبت توطئة 1.8.

■ لنفترض أن $v_i = a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1}$. إذن $a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_m = 0$ حيث معامل v_i ليس صفراً. وبالتالي، تكون الـ v_i مترابطة خطياً.

وبالعكس، إفترض أن الـ v_i مترابطة خطياً. توجد عندئذ سلّميات $a_1,\ldots,a_m$ ليست صفرية كلها، بحيث أن $a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = 0$. ليكن k أكبر عدد صحيح يحقق $a_k \neq 0$. إذن،

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k + 0v_{k+1} + \cdots + 0v_m = 0 \qquad \text{أو} \qquad a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$$

لنفترض أن $k = 1$؛ إذن $a_1v_1 = 0$، $a_1 \neq 0$ أي أن $v_1 = 0$. ولكن الـ v_i متجهات غير صفرية؛ وبالتالي، $k > 1$ ويكون لدينا $v_k = -a_k^{-1}a_1v_1 - \ldots - a_k^{-1}a_{k-1}v_{k-1}$. أي أن v_k تركيبة خطية للمتجهات السابقة لها.

مبرهنة 2.8: إن الصفوف غير الصفرية $R_1,\ldots,R_n$ في مصفوفة في شكلها الدرجي تكون مستقلة خطياً.

32.8 أثبت مبرهنة 2.8.

■ لنفترض أن $\{R_n,R_{n-1},\ldots,R_1\}$ مترابطة. إذن أحد هذه الصفوف، وليكن R_m، تركيبة خطية للصفوف السابقة له:

$$R_m = a_{m+1}R_{m+1} + a_{m+2}R_{m+2} + \cdots + a_nR_n \qquad (1)$$

لنفترض الآن أن المركبة الكائية (رقم k) في R_m هي أول مداخلها غير الصفرية. إذن، وبما أن المصفوفة في شكل درجي، تكون المركبات الكائية لـ $R_{m+1},\ldots,R_n$ صفرية كلها، وبذلك تكون المركبة الكائية لـ (1) $a_{m+1}\cdot 0 + a_{m+2}\cdot 0 + \cdots + a_n\cdot 0 = 0$. ولكن هذا يناقض الافتراض بأن المركبة الكائية لـ R_m ليست صفرية. وبذلك، تكون $R_1,\ldots,R_n$ مستقلة.

33.8 لنفرض أن $\{v_1,\ldots,v_m\}$ تولّد فضاء متجهياً V، وأن $w \in V$. بيّن أن $\{w,v_1,\ldots,v_m\}$ مترابطة خطياً. وتولّد V.

■ المتجه w تركيبة خطية في الـ v_i لأن $\{v_i\}$ تولّد V. لذلك، تكون $\{w,v_1,\ldots,v_m\}$ مترابطة خطياً. من الواضح أن w مع الـ v_i تولّد V لأن الـ v_i تولّد V لوحدها. أي أن $\{w,v_1,\ldots,v_m\}$ تولّد V.

34.8 لنفترض أن $\{v_1,\ldots,v_m\}$ تولّد فضاء متجهياً V، ولنفترض أن v_i تركيبة خطية للمتجهات السابقة له. بيّن أن $\{v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_m\}$ تولّد V.

■ لتكن $v_i = k_1 v_1 + \ldots + k_{i-1} v_{i-1}$. وليكن $u \in V$. بما أن $\{v_i\}$ تولِّد V، فإن u تكون تركيبة خطية في الـ v_i، مثلاً $u = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$. نعوض من أجل v_i، فنحصل على

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_i(k_1 v_1 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1}) + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_m v_m$$
$$= (a_1 + a_i k_1) v_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_i k_{i-1}) v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_m v_m$$

وهكذا، فإن $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$ تولِّد V. بمعنى آخر، يمكننا شطب v_i من المجموعة المولِّدة وتظل لدينا مجموعة مولِّدة.

توطئة 3.8 (توطئة «الاستبدال»): لنفترض أن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تولِّد فضاءً متجهياً V، وأن $\{w_1, \ldots, w_m\}$ مستقلة خطياً. إذن، $m \leqslant n$ وتُوَلَّدُ V بواسطة مجموعة في الشكل $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}$. وهكذا، وبشكل خاص، أي عدد $(n+1)$ أو أكثر من المتجهات في V تكون مترابطة خطياً.

35.8 اثبت توطئة 3.8.

■ يكفي أن نثبت المبرهنة في الحالة التي تكون فيها كل الـ v_i غير صفرية. (أثبت!). بما أن الـ $\{v_i\}$ تولِّد V، فيكون لدينا بواسطة المسألة 33.8 أن

$$\{w_1, v_1, \ldots, v_n\} \tag{1}$$

مترابطة خطياً وتولِّد V أيضاً. من توطئة 1.8، واحد من المتجهات في (1) يكون تركيبة خطية للمتجهات السابقة له. هذا المتجه لا يمكن أن يكون w_1، لذلك يجب أن يكون واحداً من الـ v، وليكن v_j. هكذا، وبواسطة المسألة السابقة يمكننا شطب v_j من المجموعة المولِّدة (1)، ونتحصل على المجموعة المولِّدة

$$\{w_1, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \tag{2}$$

الآن، نكرر الحجّة مع المتجه w_2. بما أن (2) تولِّد V، فإن المجموعة

$$\{w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \tag{3}$$

تكون مترابطة وتولِّد V أيضاً. مرة أخرى، وبواسطة توطئة 1.8، يكون أحد المتجهات في (3) تركيبة خطية للمتجهات السابقة له. نؤكد هنا أن هذا المتجه لا يمكن أن يكون w_1 أو w_2 لأن $\{w_1, \ldots, w_m\}$ مستقلة؛ وبالتالي، يجب أن يكون واحداً من الـ v، وليكن v_k. لذلك، وبواسطة المسألة السابقة، يمكن أن نشطب v_k من المجموعة المولّدة (3) ونحصل على المجموعة المولدة $\{w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.

نكرر الحجة مع w_3 وغيرها. ونتمكن في كل خطوة من إضافة واحد من الـ w وشطب واحد من الـ v في المجموعة المولَّدة. إذا $m \leqslant n$، فإننا نتحصل أخيراً على مجموعة مولّدة في الشكل المطلوب:

$$\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}$$

أخيراً، نبين أن $m > n$ غير ممكنة. لأننا، بخلاف ذلك، سوف نحصل بعد n من الخطوات أعلاه على المجموعة المولدة $\{w_1, \ldots, w_n\}$. يقتضي هذا أن يكون w_{n+1} تركيبة خطية لـ $w_1, \ldots, w_n$، وهذا يناقض الفرضية أن $\{w_i\}$ مستقلة خطياً.

مبرهنة 4.8: ليكن V فضاءً متجهياً منتهِ ـ البعد. إذن، كل قاعدة لـ V يكون لها نفس البعد.

36.8 اثبت مبرهنة 4.8 (وهي نتيجة أساسية في الجبر الخطي).

■ لتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة لـ V، و $\{f_1, f_2, \ldots\}$ قاعدة أخرى له. بما أن $\{e_i\}$ تولِّد V، فإن القاعدة $\{f_1, f_2, \ldots\}$ لا يمكن لها أن تحتوي أكثر من n متجها، وإلا فسوف تكون مترابطة إستناداً إلى المسألة السابقة. من جهة أخرى، إذا كانت $\{f_1, f_2, \ldots\}$ تحتوي أقل من n متجهاً، فإن $\{e_1, \ldots, e_n\}$ يجب أن تكون مترابطة بحكم المسألة السابقة أيضاً وبذلك، تضم $\{f_1, f_2, \ldots\}$ عدد n تماماً من المتجهات، وهكذا تكون المبرهنة صحيحة.

37.8 عرِّف مجموعة جزئية مستقلة أعظمية في مجموعة S من المتجهات في V.

■ تكون مجموعة جزئية $\{v_1,...,v_m\}$ في S مجموعة جزئية أعظمية في S إذا كانت مستقلة، وإذا كانت المجموعة $\{v_1,...,v_m,w\}$ مترابطة، من أجل أي $w \in S$.

مبرهنة 5.8: لنفترض أن $\{v_1,...,v_m\}$ مجموعة جزئية مستقلة أعظمية في مجموعة S، حيث S تولّد فضاء متجهياً V. إذن $\{v_1,...,v_m\}$ تولّد V.

38.8 اثبت مبرهنة 5.8.

■ إفترض أنّ $w \in S$. إذن، وبما أن $\{v_i\}$ مجموعة جزئية مستقلة أعظمية في S، تكون $\{v_1,...,v_m,w\}$ مترابطة. وبذلك، يكون w تركيبة خطية في الـ v_i، أي أن $w \in \text{span}(v_i)$ وبالتالي $S \subseteq \text{span}(v_i)$. يقود هذا إلى $V = \text{span}(S) \subseteq \text{span}(v_i) \subseteq V$. إذن، $\{v_i\}$ تولّد V، وبما أنها مستقلة فهي قاعدة لـ V.

39.8 لنفترض أن V مولّدة بواسطة مجموعة منتهية S. بيّن أن V ذو بعد منته، وأن مجموعة جزئية في S تكون قاعدة لـ V.

■ **طريقة 1.** من بين كل المجموعات الجزئية المستقلة في S، وهناك عدد منته منها لأن S منتهية، توجد واحدة منها تكون أعظمية. إستناداً إلى المسألة السابقة، فإن هذه المجموعة الجزئية S تكون قاعدة لـ V.

طريقة 2. إذا كانت S مستقلة، فهي قاعدة لـ V. وإذا كانت S مترابطة، فإن واحداً من المتجهات يكون تركيبة خطية للمتجهات السابقة له. يمكننا شطب هذا المتجه وتظل لدينا مجموعة مولّدة. نواصل هذا الأسلوب حتى نصل إلى مجموعة جزئية تكون مستقلة وتولّد V، أي تكون قاعدة لـ V.

40.8 لننظر في متتالية منتهية من متجهات $S = \{v_1,v_2,...,v_n\}$. ولتكن T متتالية متجهات تحصل عليها من S بواسطة واحدة من «العمليات الابتدائية التالية»: (i) مبادلة متجهين، (ii) ضرب متجه في عدد سلّمي غير صفري؛ (iii) إضافة مضاعف متجه إلى متجه آخر. بيّن أن S و T تولّدان نفس الفضاء W. بيّن أيضاً أن T تكون مستقلة إذا وفقط إذا كانت S مستقلة.

■ لاحظ أنه، في كل عملية، تكون المتجهات في T تركيبات خطية لمتجهات في S. من جهة أخرى، يكون لكل عملية معكوس من نفس النوع (أثبت!)؛ وبالتالي، فإن المتجهات في S تكون تركيبات خطية لمتجهات في T. إذن، S و T تولّدان نفس الفضاء W. أيضاً، تكون T مستقلة إذا وفقط إذا $\dim W = n$، وهذا يكون صحيحاً إذا وفقط إذا كانت S مستقلة أيضاً.

41.8 لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتين $m \times n$ متكافئتين صفياً فوق حقل K، ولتكن $v_1,...,v_n$ أي متجهات في فضاء متجهي V فوق K. ولتكن

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w_1 &= b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \cdots + b_{1n}v_n \\ w_2 &= b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \cdots + b_{2n}v_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_m &= b_{m1}v_1 + b_{m2}v_2 + \cdots + b_{mn}v_n \end{aligned}$$

بيّن أن $\{u_i\}$ و $\{w_i\}$ تولّدان نفس الفضاء.

■ إن تطبيق «عملية ابتدائية» من المسألة السابقة على $\{u_i\}$ مكافيء لتطبيق عملية صفية إبتدائية على المصفوفة A. بما أن A و B متكافئتين صفياً، فإنه يمكن الحصول على B من A بواسطة متتالية من عمليات صفية إبتدائية؛ وبالتالي، يمكن الحصول على $\{w_i\}$ من $\{u_i\}$ بواسطة المتتالية المقابلة من العمليات. وبذلك، تولّد $\{u_i\}$ و $\{w_i\}$ نفس الفضاء.

مبرهنة 6.8: لتكن $v_1,...,v_n$ منتمية إلى فضاء متجهي V فوق حقل K. ولتكن

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{aligned}$$

حيث $a_{ij} \in K$. ولتكن P المصفوفة المربعة -n للمعاملات، أي أن $P = (a_{ij})$.

(i) افترض أن P عكوسة. إذن $\{w_i\}$ و $\{v_i\}$ تولدان نفس الفطاء؛ وبالتالي، تكون $\{w_i\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كانت $\{v_i\}$ مستقلة.

(ii) افترض أن P ليست عكوسة. إذن، تكون $\{w_i\}$ مترابطة.

(iii) إفترض أن $\{w_i\}$ مستقلة. إذن، تكون P عكوسة.

42.8 أثبت (i) في مبرهنة 6.8: إفترض أن P عكوسة. إذن $\text{span}(w_i) = \text{span}(v_i)$؛ وبالتالي، تكون $\{w_i\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كانت $\{v_i\}$ مستقلة.

■ بما أن P عكوسة، فهي مكافئة صفياً للمصفوفة المتطابقة I. إذن، استناداً إلى المسألة السابقة، $\{w_i\}$ و $\{v_i\}$ تولّدان نفس الفضاء. إذن، تكون الواحدة مستقلة إذا وفقط إذا كانت الأخرى كذلك.

43.8 إثبت (ii) في مبرهنة 6.8: إفترض أن P ليست عكوسة، إذن، $\{w_i\}$ تكون مترابطة.

■ بما أن P ليست عكوسة، فهي مكافئة صفياً لمصفوفة بصف صفري. يعني هذا أن $\{w_i\}$ تولّد فضاء تكون له مجموعة مُوَلِّدة عدد عناصرها أقل من n. وبذلك، تكون $\{w_i\}$ مترابطة.

44.8 أثبت (iii) في مبرهنة 6.8: إفترض أن $\{w_i\}$ مستقلة؛ إذن، تكون P عكوسة.

■ هذه القضية هي المكافىء العكسي للقضية (ii)؛ وبذلك، تكون (iii) صحيحة.

45.8 ليكن K حقل جزئي لحقل L و L حقل جزئي لحقل E: أي أن $K \subset L \subset E$. [وبالتالي، يكون K حقل جزئي لـ E]. لنفترض أن E بعده n فوق L، وأن L بعده m فوق K. بين أن mn هو بعد E فوق K.

■ لنفترض أن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ قاعدة لـ E فوق L، وأن $\{a_1,\ldots,a_m\}$ قاعدة لـ L فوق K. سوف نبين أن $\{a_iv_j : i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n\}$ قاعدة لـ E فوق K. لاحظ أن $\{a_iv_j\}$ يحتوي mn عنصراً.

ليكن w أي عنصر إختياري في E. بما أن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ تولّد E فوق L، فإن w تركيبة خطية للـ v_i بمعاملات في L:

$$w = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n \qquad b_i \in L \tag{1}$$

بما أن $\{a_1,\ldots,a_m\}$ تولّد L فوق K، فإن كل $b_i \in L$ تركيبة خطية للـ a_j بمعاملات في K:

$$\begin{aligned} b_1 &= k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \cdots + k_{1m}a_m \\ b_2 &= k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{2m}a_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \cdots + k_{nm}a_m \end{aligned}$$

حيث $k_{ij} \in K$. نعوّض في (1)، فنحصل على

$$\begin{aligned} w &= (k_{11}a_1 + \cdots + k_{1m}a_m)v_1 + (k_{21}a_1 + \cdots + k_{2m}a_m)v_2 + \cdots + (k_{n1}a_1 + \cdots + k_{nm}a_m)v_n \\ &= k_{11}a_1v_1 + \cdots + k_{1m}a_mv_1 + k_{21}a_1v_2 + \cdots + k_{2m}a_mv_2 + \cdots + k_{n1}a_1v_n + \cdots + k_{nm}a_mv_n \\ &= \sum_{i,j} k_{ji}(a_iv_j) \end{aligned}$$

حيث $k_{ji} \in K$. وبذلك، تكون تركيبة خطية للـ a_iv_j بمعاملات في K؛ وبالتالي، $\{a_iv_j\}$ تولّد E فوق K.

سوف يكون البرهان تامًّا، إذا نحن بيّنّا أن $\{a_iv_j\}$ مستقلة خطياً فوق K. لنفترض أن لدينا $\sum_{i,j} x_{ji}(a_iv_j) = 0$، من أجل سلّميات $x_{ji} \in K$؛ أي أن

$$(x_{11}a_1v_1 + x_{12}a_2v_1 + \cdots + x_{1m}a_mv_1) + \cdots + (x_{n1}a_1v_n + x_{n2}a_2v_n + \cdots + x_{nm}a_mv_n) = 0$$

أو

$$(x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1m}a_m)v_1 + \cdots + (x_{n1}a_1 + x_{n2}a_2 + \cdots + x_{nm}a_m)v_n = 0$$

بما أن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ مستقلة خطياً فوق L، وبما أن معاملات الـ v_i أعلاه تنتمي إلى L، فإن كل معامل يجب أن يكون 0:

$$x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1m}a_m = 0, \quad \ldots, \quad x_{n1}a_1 + x_{n2}a_2 + \cdots + x_{nm}a_n = 0$$

ولكن $\{a_1,\ldots,a_m\}$ مستقلة فوق K؛ وبالتالي، فإن

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 0, \quad \ldots, \quad x_{1m} = 0, \quad \ldots, \quad x_{n1} = 0, \quad x_{n2} = 0, \quad \ldots, \quad x_{nm} = 0$$

لأن $x_{ji} \in K$. نتيجة لذلك، تكون $\{a_iv_j\}$ مستقلة فوق K، وهذا يثبت المبرهنة.

4.8 قواعد وأبعاد

46.8 ما المقصود بالقاعدة المعتادة للفضاء المتجهي $\mathbf{R}^n$؟

■ نفرض عدد n من المتجهات في $\mathbf{R}^n$:

$$e_1 = (1,0,0,...,0,0),\quad e_2 = (0,1,0,...,0,0),\quad ...,\quad e_n = (0,0,...,0,1)$$

هذه المتجهات مستقلة خطياً وتولّد $\mathbf{R}^n$. [أنظر المسألة 49.8]. وبذلك، تكوّن هذه المتجهات قاعدة لـ $\mathbf{R}^n$ تسمّى «القاعدة المعتادة» لـ $\mathbf{R}^n$.

47.8 بيِّن أن $\dim \mathbf{R}^n = n$.

■ إن القاعدة المعتادة أعلاه لـ $\mathbf{R}^n$ تحتوي عدد n من المتجهات؛ وبالتالي، $\dim \mathbf{R}^n = n$.

48.8 ليكن U الفضاء المتجهي لكل المصفوفات 2×3 فوق حقل K. بيِّن أن $\dim U = 6$.

■ المصفوفات الست التالية

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

مستقلة خطياً وتولّد U؛ وبالتالي، فهي تشكل قاعدة لـ U. [أنظر مسألة 49.8]. وبذلك، $\dim U = 6$.

49.8 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات $m\times n$ فوق حقل K. ولتكن $E_{ij} \in V$ المصفوفة التي مدخلها ij- يساوي 1، وبقية العناصر صفرية. بيِّن أن $\{E_{ij}\}$ قاعدة لـ V. وبذلك، $\dim V = mn$. [هذه القاعدة تسمى القاعدة المعتادة لـ V.]

■ نحتاج إلى أن نبين أن $\{E_{ij}\}$ تولّد V، وأنها مستقلة. لتكن $A = (a_{ij})$ أي مصفوفة في V. إذن، $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$. وبالتالي، $\{E_{ij}\}$ تولّد V.

نفترض الآن أن $\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij} = 0$ حيث x_{ij} سلّميات. إن المدخل - x_{ij} is $\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}$ هو x_{ij}، والمدخل - ij لـ 0 هو 0. إذن، $x_{ij} = 0$، $i = 1,...,m$، $j = 1,...,n$. وبالتالي، تكون المصفوفات E_{ij} مستقلة إذن $\{E_{ij}\}$ هي قاعدة لـ V.

ملاحظة: إذا إعتبرنا متجهاً في K^n على أنه مصفوفة $1 \times n$، فإنه يمكننا تبيان، وبواسطة النتيجة أعلاه، أن القاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^n$ المعرّفة في المسألة 46.8، هي قاعدة لـ $\mathbf{R}^n$.

مبرهنة 7.8: لنفترض أن $\dim V = n$، وأن $\{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لـ V. إذن:

(i) أي مجموعة من $(n + 1)$ متجهاً أو أكثر تكون مترابطة خطياً.

(ii) أي مجموعة مستقلة خطياً تكون جزءاً من قاعدة.

(iii) إن مجموعة مستقلة خطياً ذات n عنصراً تشكل قاعدة.

50.8 اثبت (i) في مبرهنة 7.8: أي مجموعة من $(n + 1)$ متجهاً أو أكثر تكون مترابطة (بواسطة توطئة 3.8).

■ بما أن $\{e_1,...,\}$ تولّد V، أي مجموعة $n+1$ من المتجهات أو أكثر تكون مترابطة خطياً من توطئة 3.8.

51.8 أثبت (ii) في مبرهنة 7.8: أي مجموعة مستقلة خطياً تكون جزء من قاعدة.

■ لتكن $\{v_1,...,v_r\}$ مستقلة. نجد، من توطئة 3.8، إن V تولّد بواسطة مجموعة في الشكل $S = \{v_1,...,v_r,e_{i_1},...,e_{i_{n-r}}\}$. وباستخدام المسألة السابقة، تكون مجموعة «جزئية» لـ S قاعدةً. ولكن S تحتوي n عنصراً وكل قاعدة لـ V تحتوي n عنصراً. إذن، تكون S قاعدة لـ V وتحتوي $\{v_1,...,v_r\}$ كمجموعة جزئية.

52.8 اثبت (iii) في مبرهنة 7.8: إن مجموعة مستقلة خطياً ذات n عنصراً تشكل قاعدةً.

■ من (ii)، تكون مجموعة مستقلة T ذات n عنصراً جزءاً من قاعدة. ولكن كل قاعدة لـ V تحتوي n عنصراً. إذن، تكون T قاعدة.

53.8 بيِّن أن المتجهات الأربعة التالية تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^4$: $(1,1,1,1)$، $(0,1,1,1)$، $(0,0,1,1)$، $(0,0,0,1)$.

■ تكوّن المتجهات مصفوفةً في شكل درجي، وبذلك تكون المتجهات مستقلة خطياً. بالإضافة إلى ذلك، وبما أن $\dim \mathbf{R}^4 = 4$، فهي تكوّن قاعدة لـ $\mathbf{R}^4$.

54.8 حدّد ما إذا كان كلٌ مما يلي يشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$ أم لا: (أ) $(1,1,1)$ و $(1,-1,5)$؛ (ب) $(1,2,3)$، $(1,0,-1)$، $(3,-1,0)$، $(2,1,-2)$.

■ إن قاعدة في $\mathbf{R}^3$ يجب أن تحتوي على ثلاثة عناصر تماماً، لأن $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. لذلك، فإن المتجهات في (أ) وكذلك المتجهات في (ب) لا تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$.

55.8 حدّد ما إذا كانت المتجهات $(1,1,1)$، $(1,2,3)$، $(2,-1,1)$ تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$ أم لا.

■ تشكل المتجهات قاعدة إذا وفقط إذا كانت مستقلة. لذلك، نكوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة ونختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&-1&1\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-3&-1\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&5\end{pmatrix}$$

وليس للمصفوفة الدرجية صفوف صفرية؛ وبالتالي، فإن المتجهات تكون مستقلة خطياً؛ وبالتالي، تشكل قاعدة من أجل $\mathbf{R}^3$.

56.8 حدّد ما إذا كانت $(1,1,2)$، $(1,2,5)$، $(5,3,4)$ تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$ أم لا.

■ كوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة ثم إختزلها إلى الشكل الدرجي:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&5\\5&3&4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&-2&-6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

المصفوفة الدرجية لها صف صفري؛ أي لها صفان فقط غير صفريين. وبالتالي، فإن المتجهات الثلاث مترابطة ولا تشكل بالتالي قاعدة من أجل $\mathbf{R}^3$.

تتعلق المسائل 57.8-59.8 بالفضاء المتجهي للحدوديات في t التي لا تتجاوز درجتها n.

57.8 بيّن أن $\{1,t,t^2,\ldots,t^n\}$ قاعدة لـ V؛ وبالتالي، $\dim V = n+1$.

■ من الواضح أن كل حدودية في V تكون تركيبة خطية لـ $1,t,\ldots,t^{n-1}$ و t^n. وأيضاً مستقلة لأن أيًا منها ليس تركيبة خطية للحدوديات السابقة لها. وبذلك، تكون $\{1,t,\ldots,t^n\}$ قاعدة لـ V.

58.8 بيّن أن $\{1,t-1,(t-1)^2,\ldots,(t-1)^n\}$ قاعدة لـ V.

■ [بما أن $\dim V = n+1$، فإن أي عدد $(n+1)$ من الحدوديات المستقلة تشكل قاعدة لـ V]. الآن، كل حدودية في المتتالية $1,1-t,\ldots,(1-t)^n$ ذات درجة أعلى من درجات الحدوديات السابقة لها، وبذلك فهي ليست تركيبة خطية لهذه الحدوديات. إذن، الحدوديات $1,1-t,\ldots,(1-t)^n$ تكون مستقلة وتشكل قاعدة لـ V.

59.8 بيّن ما إذا كانت $\{1+t,t+t^2,t^2+t^3,\ldots,t^{n-1}+t^n\}$ قاعدة لـ V أم لا.

■ الحدوديات مستقلة خطياً لأن كل واحدة منها من درجة أعلى من درجات الحدودية السابقة لها؛ ومع ذلك، فهي مجموعة تحتوي n عنصراً فقط؛ وبما أن $\dim V = n+1$، فإنها ليست قاعدة لـ V.

60.8 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات المتناظرة 2×2 فوق K. بيّن أن $\dim V = 3$. [تذكر أن $A = (a_{ij})$ تكون متناظرة إذا وفقط إذا $A = A^T$، أو بشكل مكافىء $a_{ij} = a_{ji}$].

■ إن مصفوفة متناظرة 2×2 إختيارية تكون في الشكل $A = \begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ حيث $a,b,c \in K$. [لاحظ وجود ثلاثة «متغيرات»]. نضع (i) $a=1$، $b=0$، $c=0$؛ (ii) $a=0$، $b=1$، $c=0$؛ (iii) $a=0$، $b=0$، $c=1$؛ فنحصل على المصفوفات التالية:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سوف نبيّن أن $\{E_1, E_2, E_3\}$ قاعدة لـ V، أي أنها (1) تولّد V و (2) أنها مستقلة. (1) لدينا، من أجل المصفوفة الاختيارية أعلاه،

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

وبذلك، $\{E_1, E_2, E_3\}$ تُوَلِّد V.

(2) لنفترض أن $xE_1 + yE_2 + zE_3 = 0$، حيث x، y، z سلّميات مجهولة. أي أن

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{أو} \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بمساواة المداخل المتقابلة فيما بينها، نحصل على $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. بمعنى آخر، $xE_1 + yE_2 + zE_3 = 0$ يقتضي $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. وبذلك، تكون $\{E_1, E_2, E_3\}$ مستقلة.

إذن، $\{E_1, E_2, E_3\}$ قاعدة لـ V وبذلك فإن بعد V يساوي 3.

61.8 ليكن W الفضاء المتجهي للمصفوفات المتناظرة 3×3 فوق K. بيّن أن $\dim W = 6$، وذلك بتكوين قاعدة لـ W. [تذكر أن $A = (a_{ij})$ تكون متناظرة إذا وفقط إذا $a_{ij} = a_{ji}$].

■ المصفوفات الست التالية تشكل قاعدة لـ W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

62.8 ما هو بعد الفضاء المتجهي U للمصفوفات المتناظرة $n\times n$ فوق حقلٍ K؟

■ كما يتضح من المسألة 61.8، فإن كل عنصر على القطر أو فوقه يقابله عنصر في القاعدة؛ وبالتالي، $\dim U = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = 1/2\, n(n+1)$.

63.8 ليكن W الفضاء المتجهي للمصفوفة تخالفية ـ التناظر 3×3 فوق K. أثبت أن $\dim W = 3$ وذلك باستخراج قاعدة لـ W. [تذكر أن $A = (a_{ij})$ تكون تخالفية ـ التناظر إذا وفقط إذا $a_{ij} = -a_{ji}$].

■ المصفوفات الثلاث التالية تشكل قاعدة لـ W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

64.8 ما هو بعد الفضاء المتجهي U للمصفوفات تخالفية ـ التناظر $n\times n$ فوق حقل K؟

■ كما يتضح من المسألة 63.8، فإن كل عنصر فوق القطر يقابله عنصر في قاعدة؛ وبالتالي، $\dim U = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = 1/2\, n(n-1)$.

65.8 بيّن أن الحقل العقدي C فضاء متجهي بعده 2 فوق الحقل الحقيقي **R**.

■ أننا نزعم بأن $\{1, i\}$ يشكل قاعدة لـ C فوق **R**. لأنه، إذا $v \in C$، فإن $v = a + bi = a.1 + b.i$ حيث $a, b \in \mathbf{R}$؛ أي أن $\{1, i\}$ تولّد C فوق **R**. بالإضافة إلى ذلك، إذا $x.1 + y.i = 0$ أو $x + yi = 0$ حيث $x, y \in \mathbf{R}$، إذن $x = 0$ و $y = 0$؛ أي أن $\{1, i\}$ مستقلة خطياً فوق **R**. إذن، $\{1, i\}$ قاعدة لـ C فوق **R**، ويكون 2 بعد C فوق **R**.

66.8 بيّن أن الحقل الحقيقي **R** فضاء متجهي لا نهائي البعد فوق الحقل المنطق **Q**.

■ نزعم أن، n، $\{1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^n\}$ مستقلة خطياً فوق **Q**، من أجل أي n. لأنه، إذا

$a_0 1 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + \ldots + a_n \pi^n = 0$، حيث $a_i \in Q$، وبعض الـ a_i ليس صفرياً. إذن، يكون π جذراً للحدودية غير الصفرية التالية فوق Q: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. ولكن يمكن تبيان أن π عدد متسامٍ، أي أن π ليس جذراً لأي حدودية غير صفرية فوق Q. لذلك، فإن الأعداد الحقيقية $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^2$ الـ $(n+1)$ تكون مستقلة خطياً فوق **Q**. إذن، لا يمكن لـ **R** أن يكون ذا بعد n فوق **Q**، من أجل أي عدد منته n؛ أي أن **R** ذو بعد لا نهائي فوق **Q**.

67.8 ليكن V الفضاء المتجهي فوق الحقل الحقيقي **R**، للأزواج المرتبة من الأعداد العقدية بيّن أن V بعده 4.

■ سوف نبين أن ما يلي قاعدة لـ V: $B = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$. نفترض أن $v \in V$. إذن، $v = (z,w)$ حيث z,w عددان عقديان، وبذلك $v = (a + bi, c + di)$؛ أي أن B تولِّد V.

يكتمل البرهان عندما نبيّن أن B مستقلة. لنفترض أن $x_1(1,0) + x_2(i,0) + x_3(0,1) + x_4(0,i) = 0$ حيث $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$. إذن

$$(x_1 + x_2 i, x_3 + x_4 i) = (0,0) \quad \text{وبذلك} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 i = 0 \\ x_3 + x_4 i = 0 \end{cases}$$

ينتج عن ذلك أن $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $x_3 = 0$، $x_4 = 0$، أي أن B مستقلة.

68.8 لنفترض أن $\dim V = n$. بيِّن أن مجموعة مولِّدة ذات n عنصراً تشكل قاعدة.

■ لنفترض أن $u_1, u_2, \ldots, u_n$ تولِّد V وأن المتجهات مستقلة خطياً. إذن، واحد منها يكون تركيبة خطية للمتجهات الاخرى، وبذلك يمكن شطبه من المجموعة المولِّدة. وبالتالي، تُوَلَّدُ V بواسطة $(n-1)$ متجهاً. وهذا مستحيل، لأن $\dim V = n$. وبذلك، فإن الـ u_i تكون مستقلة خطياً وتشكل بالتالي قاعدة لـ V.

5.8 أبعاد وفضاءات جزئية

مبرهنة 8.8. ليكن W فضاء جزئياً في فضاء متجهي نوني ـ البعد V. إذن، $\dim W \leqslant n$. وفي الحالة الخاصة، إذا $\dim W = n$ إذن $W = V$.

69.8 أثبت مبرهنة 8.8 وهي التي تعطي العلاقة الأساسية بين بعد فضاء متجهي وبعد فضاء جزئي في V.

■ بما أن V بعده n، فإن أي $(n+1)$ متجهاً أو أكثر تكون مترابطة خطياً. إضافة إلى ذلك، بما أن قاعدةً لـ W تتكون من متجهات مستقلة خطياً، فهي لا يمكن أن يحتوي على أكثر من n عنصراً. إذن، $\dim W \leqslant n$.

وعلى الخصوص، إذا كانت $\{w_1, \ldots, w_n\}$ قاعدة لـ W، وبما أن مجموعة مستقلة ذات n عنصراً، فإنها تكون أيضاً قاعدة لـ V. وبذلك، $W = V$ عندما $\dim W = n$.

70.8 ليكن W فضاءً جزئياً للفضاء الحقيقي $\mathbf{R}^3$. أعط وصفاً هندسياً لـ W بدلالة بعده.

■ بما أن $\dim \mathbf{R}^3 = 3$، فإنه بعد W يمكن أن يكون فقط 0، 1، 2، أو 3. ويكون لدينا الحالات التالية:

(i) $\dim W = 0$، إذن $W = \{0\}$، نقطة.

(ii) $\dim W = 1$، إذن W مستقيم عبر نقطة الأصل.

(iii) $\dim W = 2$، إذن W مستوٍ عبر نقطة الأصل.

(iv) $\dim V = 3$، إذن W هو الفضاء $\mathbf{R}^3$ بأكمله.

71.8 أوجد بعد الفضاء الجزئي W لـ $\mathbf{R}^4$ المولَّد بواسطة: (أ) $(1,-2,3,-1)$ و $(1,1,-2,3)$، (ب) $(3,-6,3,-9)$ و $(-2,4,-2,6)$.

■ يولِّد متجهان غير صفريين فضاءً W بعده 2 إذا كانا مستقلين، وبعده 1 إذا كانا مترابطين. تذكر أن متجهين يكونان مترابطين إذا وفقط إذا كان أحدهما مضاعفاً للآخر. إذن، (أ)$\dim W = 2$، (ب) $\dim W = 1$.

72.8 ليكن W الفضاء الجزئي في $\mathbf{R}^4$ المولّد بواسطة المتجهات $(1,-2,5,-3)$، $(2,3,1,-4)$، و $(3,8,-3,-5)$. أوجد قاعدة لـ W وكذلك بعده.

■ نكوّن المصفوفة A التي صفوفها المتجهات المعطاة، ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 2 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 8 & -3 & -5\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 7 & -9 & 2\\ 0 & 14 & -18 & 4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 7 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

المتجهان غير الصفريين $(1,-2,5,-3)$ و $(0,7,-9,2)$ للمصفوفة الدرجية يشكلان قاعدة للفضاء الصفي لـ A وهو W. إذن، $\dim W = 2$.

73.8 وسّع قاعدة W، في مسألة 72.8، إلى قاعدة لكل الفضاء $\mathbf{R}^4$.

■ نبحث عن أربع متجهات مستقلة تتضمن المتجهين أعلاه. أن المتجهات $(1,-2,5,-3)$، $(0,7,-9,2)$، $(0,0,1,0)$، $(0,0,0,1)$، مستقلة (لانها تكوّن مصفوفة درجية)، وبذلك فهي تكوّن قاعدة لـ $\mathbf{R}^4$، وهي توسيع للقاعدة في W.

74.8 ليكن W الفضاء الجزئي لـ $\mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $W = \{(a,b,c): a + b + c = 0\}$. أوجد قاعدة لـ W وكذلك بعده.

■ لاحظ أن $W \neq \mathbf{R}^3$، لأنه مثلاً $(1,2,3) \notin W$. وبذلك $\dim W < 3$. لاحظ أن $u_1 = (1,0,-1)$ و $u_2 = (0,1,-1)$ متجهين مستقلين في W. إذن، $\dim W = 2$، وبشكّل u_1 و u_2 قاعدة لـ W.

75.8 ليكن W الفضاء الجزئي لـ $\mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $W = \{(a,b,c): a = b = c\}$. أوجد قاعدة لـ W وكذلك بعده.

■ المتجه $u = (1,1,1) \in W$. أي متجه $w \in W$ يكون في الشكل $w = (k,k,k)$. إذن، $w = ku$. وبالتالي، u يولّد W ويكون $\dim W = 1$.

76.8 ليكن W الفضاء الجزئي لـ $\mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $W = \{(a,b,c): c = 3a\}$. أوجد قاعدة لـ W وكذلك بعده.

■ $W \neq \mathbf{R}^3$، لأن مثلاً $(1,1,1) \notin W$. إذن، $\dim W < 3$. كما أن المتجهين غير الصفريين $u_1 = (1,0,3)$ و $u_2 = (0,1,0)$ ينتميان إلى W ومستقلان خطياً. لذلك، فهما يشكلان قاعدة لـ W، ويكون $\dim W = 2$.

77.8 أوجد قاعدة للفضاء الجزئي W لـ $\mathbf{R}^4$، وكذلك بعده، والمولّد بواسطة $(1,4,-1,3)$، $(2,1,-3,-1)$، $(0,2,1,-5)$.

■ اختزل إلى شكل درجي المصفوفة صفوفها المتجهات المعطاة:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -5\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 3\\ 0 & -7 & -1 & -7\\ 0 & 2 & 1 & -5\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 3\\ 0 & -7 & -1 & -7\\ 0 & 0 & 5 & -49\end{pmatrix}$$

الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية تشكّلُ قاعدة لـ W؛ وبالتالي، $\dim W = 3$. يعني هذا، على الخصوص، أن المتجهات الثلاثة الأصلية مستقلة خطياً، وأنها تشكل قاعدة لـ W.

78.8 أوجد قاعدة للفضاء الجزئي W لـ $\mathbf{R}^4$، وكذلك بعده، والمولّد بواسطة $(1,-4,-2,1)$، $(1,-3,-1,2)$، و $(3,-8,-2,7)$.

■ نختزل إلى شكل درجي المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة:

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 2\\ 3 & -8 & -2 & 7\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 4 & 4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

الصفّان غير الصفريين في المصفوفة الدرجية، $(1,-4,-2,1)$ و $(0,1,1,1)$، يشكلان قاعدة لـ W، وبذلك $\dim W = 2$. يعني هذا، على الخصوص، أن المتجهات الثلاثة الأصلية مستقلة خطياً.

79.8 ليكن W الفضاء الجزئي في $\mathbf{R}^5$ المولّد بواسطة $u_1 = (1,2,-1,3,4)$، $u_2 = (2,4,-2,6,8)$، $u_3 = (1,3,2,2,6)$، $u_4 = (1,4,5,1,8)$، $u_5 = (2,7,3,3,9)$. أوجد مجموعة جزئية من متجهات تشكل قاعدة لـ W.

■ طريقة 1. أوجد أول متجه في المتتالية u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 الذي يكون تركيبة خطية للمتجهات السابقة له ثم إحذف هذا المتجه من المجموعة المولّدة. كرر هذا الأسلوب حتى تبقى مجموعة مستقلة من المتجهات. هذه المجموعة المستقلة من المتجهات هي عندئذ قاعدة لـ W.

طريقة 2. كوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة ثم إختزلها إلى شكل «درجي» ولكن بدون مبادلة عن صفوف صفرية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

الصفوف غير الصفرية هي الأول والثالث والخامس؛ وبالتالي، تشكل u_1, u_3, u_5 قاعدة لـ W.

تشير المسائل 80.8-81.8 إلى الفضاء المتجهي V للحدوديات فوق **R**.

80.8 أوجد بعد الفضاء الجزئي W في V الذي تولّده: (أ) $t^3 + 2t^2 + 3t + 1$ و $2t^3 + 4t^2 + 6t + 2$، (ب) $t^3 - 2t^2 + 5$ و $t^2 + 3t - 4$.

■ Dim W يساوي 1 أو 2، وفقاً لكون المتجهات مترابطة أو مستقلة، ويكون متجهان مترابطين إذا وفقط إذا كان أحدهما مضاعفاً للآخر. لذلك، (أ) $\dim W = 2$، (ب) $\dim W = 1$.

81.8 أوجد قاعدة للفضاء الجزئي W، وكذلك بعده، في الفضاء V، والذي تولّده الحدوديات $v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$، $v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$، $v_3 = t^3 + 6t - 5$، $v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$.

■ إن المتجهات الإحداثية (أنظر القسم 9.8) للحدوديات المعطاة بالنسبة للقاعدة $\{t^3, t^2, t, 1\}$ هي على الترتيب $[v_1] = (1, -2, 4, 1)$، $[v_2] = (2, -3, 9, -1)$، $[v_3] = (1, 0, 6, -5)$، $[v_4] = (2, -5, 7, 5)$. كوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات الإحداثية أعلاه ثم اختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

يشكل الصفّان غير الصفريين $(1, -2, 4, 1)$ و $(0, 1, 1, -3)$، في المصفوفة الدرجية، قاعدة للفضاء المولّد بواسطة المتجهات الإحداثية؛ وبذلك، تشكل الحدوديتان المقابلتان $t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ و $t^2 + t - 3$ قاعدة لـ W. وبذلك، $\dim W = 2$.

82.8 ليكن V الفضاء المتجهي للدوّال من **R** إلى **R**. أوجد قاعدة للفضاء الجزئي W لـ V، وكذلك بعده، المولّد بواسطة الدوال $f(t) = \sin t$، $g(t) = \cos t$، $h(t) = t$.

■ من المسألة 26.8، تكون f، g، h مستقلة خطياً وبذلك، تكون $\{f, g, h\}$ قاعدة لـ W، ويكون $\dim W = 3$.

تشير المسائل 83.8-84.8 إلى الفضاء المتجهي V للمصفوفات الحقيقية 2×2.

83.8 أوجد بعد الفضاء الجزئي W في V المولّد بواسطة:

(أ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

■ (أ) $\dim W = 2$، لأن أيًّا من المصفوفتين غير مضاعف للأخرى، (ب) $\dim W = 1$ لأن كل مصفوفة مضاعف للأخرى.

84.8 أوجد بعد الفضاء الجزئي W لـ V، وكذلك قاعدة له، والمولّد بواسطة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

▩ المتجهات الإحداثية [أنظر القسم 9.8] للمصفوفات المعطاة بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ V:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هي كما يلي:

$$[A] = [1, 2, -1, 3] \qquad [B] = [2, 5, 1, -1] \qquad [C] = [5, 12, 1, 1] \qquad [D] = [3, 4, -2, 5]$$

نختزل إلى شكل درجي المصفوفة التي صفوفها هذه المتجهات الإحداثية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 12 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -18 \end{pmatrix}$$

إن الصفوف غير الصفرية مستقلة خطياً؛ وبالتالي، فإن المصفوفات المقابلة: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -18 \end{pmatrix}$ تشكل قاعدة لـ W، ويكون $\dim W = 3$. [لاحظ أيضاً أن المصفوفات A، B، D تشكل قاعدة W].

6.8 رتبة مصفوفة

85.8 عرِّف رتبة مصفوفةٍ A.

▩ إن الرتبة، أو الرتبة الصفية، للمصفوفة A، والتي نرمز لها بـ rank (A)، هي العدد الأعظمي للصفوف المستقلة خطياً أو، بشكل مكافيء، بعد الفضاء الصفي لـ A.

86.8 أوجد رتبة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

▩ إختزل A صفيّاً إلى شكل درجي:

$$A \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الصفان غير الصفريين للمصفوفة الدرجية يشكلان قاعدة للفضاء الصفي لـ A، وبالتالي فإن بعد الفضاء الصفي لـ A يساوي 2. إذن، rank (A) = 2.

87.8 أوجد رتبة $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

▩ إختزل B صفياً إلى شكل درجي:

$$B \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بما أن للمصفوفة الدرجية صفين غير صفريين، فإن rank (B) = 2.

88.8 عرِّف الرتبة العمودية لمصفوفةٍ A.

▩ تساوي الرتبة العمودية لمصفوفةٍ A العدد الأعظمي للأعمدة المستقلة خطياً في A أو، بشكل مكافيء بعد الفضاء العمودي لـ A.

مبرهنة 9.8: الرتبة الصفية والرتبة العمودية لأي مصفوفة متساويتان.

89.8 اثبت مبرهنة 9.8 [والتي تبرز استخدام كلمة رتبة لوحدها].

■ لتكن A مصفوفة m×n إختيارية:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ولتكن $R_1, R_2, \ldots, R_m$ صفوفها:

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

لنفترض أن الرتبة الصفية r وأن المتجهات الـ r التالية تشكل قاعدة للفضاء الصفي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn})$$

إذن، كل واحد من المتجهات الصفية يكون تركيبة خطية للـ S_i:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \cdots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \cdots + k_{2r}S_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \cdots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

حيث الـ k_{ij} سلّميات. تساوي بين المركبات المتقابلة لكل واحدة من المعادلات المتجهية أعلاه، فتحصل على المنظومة التالية من المعادلات،

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \cdots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \cdots + k_{2r}b_{ri} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \cdots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

من أجل $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i}\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i}\begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri}\begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

بمعنى آخر، كل واحد من أعمدة A تركيبة خطية للمتجهات الـ r:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

وبذلك، فإن الفضاء العمودي لـ A يكون بعده r على الأكثر، أي أن column rank ≤ r.
بالمثل، (أو بالنظر إلى المصفوفة المنقولة A^T)، نحصل على الرتبة العمودية (column rank) ≤ (row rank) الرتبة الصفية
وبذلك، فإن الرتبة الصفية والرتبة العمودية متساويتان.

90.8 أوجد رتبة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

■ بما أن الرتبة الصفية تساوي الرتبة العمودية، فإنه يسهل تكوين المصفوفة المنقولة لـ A ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & -5 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $\text{rank}(A) = 3$.

91.8 أوجد رتبة $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

■ العمودان مستقلان خطياً، لأن الواحد ليس مضاعفاً للآخر. وبذلك، $\text{rank}(B) = 2$.

92.8 لتكن A و B مصفوفتان إختياريتان بحيث يكون الجداء AB معرّفاً. اثبت أن $\text{rank}(AB) \leqslant \text{rank}(B)$ و $\text{rank}(AB) \leqslant \text{rank}(A)$.

■ إن الفضاء الصفي لـ AB يحتويه الفضاء الصفي لـ B؛ وبالتالي، $\text{rank}(AB) \leqslant \text{rank}(B)$. كما أن الفضاء العمودي لـ AB يحتويه الفضاء العمودي لـ A؛ وبالتالي، $\text{rank}(AB) \leqslant \text{rank}(A)$.

93.8 لتكن A مصفوفة مربعة -n إختيارية. بيِّن أن A تكون عكوسة إذا وفقط إذا $\text{rank}(A) = n$.

■ لاحظ أن صفوف المتطابقة المربعة -n مستقلة خطياً، لأن I_n في شكل درجي؛ وبالتالي، $\text{rank}(I_n) = n$. الآن، إذا كانت A عكوسة فهي مكافئة صفياً لـ I_n؛ وبالتالي، $\text{rank}(A) = n$. ولكن، إذا لم تكن A عكوسة فإنها تكون مكافئة صفياً لمصفوفة ذات صف غير صفري؛ وبالتالي، $\text{rank}(A) < n$. أي أن A تكون قيوسة إذا وفقط إذا $\text{rank}(A) = n$.

94.8 عرِّف الرتبة المحدِّدية لمصفوفة A.

■ إن الرتبة المحددية لـ A هي مرتبة أوسع مصفوفة مربعة جزئية في A [نحصل عليها بشطب صفوف وأعمدة في A] والتي محددتها مختلفة عن الصفر.

95.8 بيِّن أن الرتبة المحددية لمصفوفة A تساوي رتبة A.

■ لتكن d الرتبة المحددية لـ A. وبالتالي، توجد مصفوفة جزئية مربعة -d في A ذات محددة غير صفرية. وبذلك، تكون الصفوف الـ d في المصفوفة الجزئية مستقلة خطياً. وبالتالي، $d \leqslant \text{rank}(A)$. من جهة أخرى، لتكن B مصفوفة درجية مكافئة صفياً لـ A. إختر المصفوفة الجزئية في B، التي تحتوي الصفوف غير الصفرية في B والأعمدة المحتوية على المداخل المقدمة غير الصفرية في الصفوف. يعطينا هذا مصفوفة جزئية مثلثية عليا مربعة ـ رتبة A محددتها مختلفة عن الصفر. وبالتالي، $\text{rank}(A) \leqslant d$. وبذلك، $d = \text{rank}\, A$.

7.8 تطبيقات على المعادلات الخطية

96.8 لنفترض منظومة متجانسة $AX = 0$ في شكل درجي. لنفترض كذلك أن المنظومة تمتلك n مجهولا و r معادلة خطية (غير صفرية)، أعط طريقة للحصول على قاعدة من أجل الفضاء الحلّي W للمنظومة.

■ للمنظومة عدد $(n-r)$ من المتغيرات الحرة $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$. نوجد الحل v_i المتحصل عليه بوضع $x_{i_j} = 1$ (أو أي ثابت غير صفري) وجعل المتغيرات الحرة الأخرى مساوية للصفر. إذن، الحلول $v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}$ تشكل قاعدة لـ W، ويكون $\dim W = n - r$.

97.8 أوجد قاعدة للفضاء الحلّي، وكذلك بعده، من أجل المنظومة

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ x + 2y + 3z + s + t &= 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t &= 0 \end{aligned}$$

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ z + 2s - 2t &= 0 \\ 2z + 4s - 4t &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ z + 2s - 2t &= 0 \end{aligned}$$

المنظومة في شكلها الدرجي لها معادلتان (غير صفريتين) في خمسة مجاهيل؛ وبالتالي، يكون للمنظومة $5-2=3$ متغيرات حرة وهي y,s,t. وبذلك، $\dim W = 3$. للحصول على قاعدة لـ W، نضع

(i) $y = 1$، $s = 0$، $t = 0$ فنحصل على الحل $v_1 = (-2,1,0,0,0)$.

(ii) $y = 0$، $s = 1$، $t = 0$ فنحصل على الحل $v_2 = (5,0,-2,1,0)$.

(iii) $y = 0$، $s = 0$، $t = 1$ فنحصل على الحل $v_3 = (-7,0,2,0,1)$.

فتكون المجموعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ قاعدة للفضاء الحلّي W.

98.8 أوجد بعد الفضاء الحلّي، وكذلك قاعدة له، للمنظومة:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 0 \\ 2x + 4y + 4z - t &= 0 \\ 3x + 6y + 7z + t &= 0 \end{aligned}$$

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 0 \\ 2z + 5t &= 0 \\ 4z + 10t &= 0 \end{aligned} \quad \text{إلى} \quad \begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 0 \\ 2z + 5t &= 0 \end{aligned}$$

المتغيرات الحرة هي y و t ويكون $\dim W = 2$. نضع:

(i) $y = 1$، $z = 0$ نحصل على الحل $u_1 = (-2,1,0,0)$.

(ii) $y = 0$، $t = 2$ لنحصل على الحل $u_2 = (11,0,-5,2)$.

إذن، تكون $\{u_1,u_2\}$ قاعدة لـ W. [كان يمكن اختيار $y = 0$، $t = 1$ في (ii)، ولكن مثل هذا الاختيار كان سيدخل كسوراً في الحل].

99.8 أوجد بعد الفضاء الحلّي W، وكذلك قاعدة له، للمنظومة:

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z + 3r - s &= 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s &= 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s &= 0 \end{aligned}$$

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z + 3r - s &= 0 \\ 2z - r + 2s &= 0 \\ 6z - 3r + 6s &= 0 \end{aligned} \quad \text{ثم} \quad \begin{aligned} x + 2y - 4z + 3r - s &= 0 \\ 2z - r + 2s &= 0 \end{aligned}$$

هناك خمسة مجاهيل ومعادلتان (غير صفريتين) في الشكل الدرجي؛ وبالتالي، يوجد $5-2 = 3$ متغيرات حرة y، r، s. وبذلك، $\dim W = 3$. نضع

(i) $y = 1$، $r = 0$، $s = 0$ لنحصل على الحل $v_1 = (-2,1,0,0,0)$.

(ii) $y = 0$، $r = 2$، $s = 0$ لنحصل على الحل $v_2 = (-2,0,1,2,0)$

(iii) $y = 0$، $r = 0$، $s = 1$ لنحصل على $v_3 = (-3,0,-1,0,1)$.

وبذلك، تكون المجموعة $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ قاعدة للفضاء الحلّي W.

100.8 أوجد بعد الفضاء الحلّي W وكذلك قاعدة له، للمنظومة $x + 2y - 3z = 0$، $2x + 5y + z = 0$، $x - y + 2z = 0$.

■ نختزل المنظومة إلى شكل درجي

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ y+7z&=0\\ -3y+5z&=0 \end{aligned} \quad \text{ثم} \quad \begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ y+7z&=0\\ 26z&=0 \end{aligned}$$

المنظومة الدرجية في شكل مثلثي، وبالتالي ليس لها متغيرات حرة. وبذلك، فإن 0 هو الحل الوحيد، أي أن $W=\{0\}$. ينتج عن ذلك أن $\dim W=0$.

101.8 أوجد منظومة متجانسة يكون مجموعتها الحلّية W مولّدة بواسطة $\{(1,-2,0,3),(1-1,-1,4),(1,0,-2,5)\}$.

■ ليكن $v=(x,y,z,t)$. نكوّن المصفوفة M التي صفوفها المتجهات المعطاة والتي صفها الأخير هو v؛ ثم نختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$M=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\1&-1&-1&4\\1&0&-2&5\\x&y&z&t\end{pmatrix} \quad \text{إلى} \quad \begin{pmatrix}1&-2&0&3\\0&-1&-1&1\\0&-2&-2&2\\0&2x+y&z&-3x+t\end{pmatrix} \quad \text{إلى} \quad \begin{pmatrix}1&-2&0&3\\0&1&-1&1\\0&0&2x+y+z&-5x-y+t\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

تبين الصفوف الثلاثة الأولى الأصلية أن W بعده 2. وبذلك، $v\in W$ إذا وفقط إذا كان الصف الإضافي لا يزيد في بعد الفضاء الصفّي، وبالتالي، نساوي بالصفر المدخلين الأخيرين في الصف الثالث على اليمين لنحصل على المنظومة المتجانسة المطلوبة:

$$\begin{aligned} 2x+y+z\quad&=0\\ 5x+y\quad-t&=0 \end{aligned}$$

المسائل 102.8-104.8 تتعلق بالفضاءين التاليين في $\mathbf{R}^4$:

$$U=\{(a,b,c,d): b+c+d=0\} \qquad W=\{(a,b,c,d): a+b=0,\ c=2d\}$$

102.8 أوجد قاعدة لمجموعة الحلول (a,b,c,d) للمعادلة $b+c+d=0$ أو $a+b+c+d=0$. المتغيرات الحرّة هي a، c، d. نضع (1) $a=1$، $c=0$، $d=0$، (2) $a=0$، $c=1$، $d=0$، و (3) $a=0$، $c=0$، $d=1$ فنحصل على الحلول التالية:

$$v_1=(1,0,0,0) \qquad v_2=(0,-1,1,0) \qquad v_3=(0,-1,0,1)$$

وتكون المجموعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ قاعدة لـ U ويكون $\dim U=3$.

103.8 أوجد بعد W وكذلك قاعدة له.

■ نبحث عن قاعدة لمجموعة الحلول (a,b,c,d) للمنظومة:

$$\begin{aligned} a+b&=0\\ c&=2d \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} a+\ \ b&=0\\ c-2d&=0 \end{aligned}$$

المتغيران الحرّان هما b و d. نضع (1) $b=1$، $d=0$ فنحصل على الحل $v_1=(-1,1,0,0)$ و (2) $b=0$، $d=1$ فنحصل على الحل $v_2=(0,0,2,1)$. تكون المجموعة $\{v_1,v_2\}$ قاعدة لـ W ويكون $\dim W=2$.

104.8 أوجد بعد $U\cap W$ وكذلك قاعدة له.

■ تتكون $U\cap W$ من تلك المتجهات (a,b,c,d) التي تحقق الشروط المعرّفة لـ U والشروط المعرّفة لـ W، أي المعادلات الثلاث:

$$\begin{aligned} b+c+d&=0\\ a+b\qquad&=0\\ c\qquad&=2d \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} a+b\qquad&=0\\ b+c+\ \ d&=0\\ c-2d&=0 \end{aligned}$$

المتغير الحر هو d. نضع $d = 1$ فنحصل على الحل $v = (3,-3,2,1)$. وبذلك، تكون $\{v\}$ قاعدة لـ $U \cap W$ ويكون $\dim (U \cap W) = 1$.

105.8 لتكن $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ المتغيرات الحرة لمنظومات المعادلات الخطية المتجانسة ذات الـ n مجهولاً. وليكن v_j الحل من أجل $x_{i_j} = 1$ وبقية المتغيرات الحرة $= 0$. بيِّن أن الحلول $v_1, v_2, \ldots, v_k$ مستقلة خطياً.

■ لتكن A المصفوفة التي صفوفها الـ v_i على الترتيب. نبادل بين العمود 1 والعمود i_1، ثم العمود 2 والعمود i_2،...، ثم العمود k والعمود i_k؛ حتى نحصل على المصفوفة $k \times n$:

$$B = (I, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1,k+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,k+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{k,k+1} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

المصفوفة B أعلاه في شكل درجي، وبذلك تكون صفوفها مستقلة؛ وبالتالي، $\text{rank}(B) = k$. بما أن A و B متكافئتان عمودياً، فإن لهما نفس الرتبة، أي أن $\text{rank}(A) = k$. ولكن A لها k صفاً؛ وبالتالي، فإن هذه الصفوف، أي الـ v_i، تكون مستقلة خطياً كما هو مطلوب.

مبرهنة 10.8: يكون المنظومة المعادلات الخطية $AX = B$ حلٌ إذا وفقط. إذا كان لمصفوفة المعاملات A والمصفوفة المزيدة (A,B) نفس الرتبة.

106.8 اثبت مبرهنة 10.8 والتي تتعلق بمنظومة من m معادلة خطية و n مجهولاً $x_1, \ldots, x_n$ فوق حقل:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

أو المعادلة المصفوفية المكافئة $AX = B$ حيث $A = (a_{ij})$ مصفوفة المعاملات، بحيث أنّ $X = (x_i)$ و $B = (b_i)$ المتجهين العموديين المتكونين من المجاهيل والثوابت، على الترتيب.

■ إن المنظومة أعلاه مكافئة للمعادلة المتجهية التالية:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون للمنظومة $AX = B$ حلّ إذا وفقط إذا كان المتجه العمود B تركيبة خطية لأعمدة A. وبذلك، يكون لـ $AX = B$ حلّ إذا وفقط إذا كان للمصفوفة المزيدة

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

نفس الفضاء العمودي كما A. إذن، يكون لـ $AX = B$ حلّ إذا وفقط إذا كان $\text{rank}(A,B) = \text{rank}(A)$.

8.8 المجاميع، المجاميع المباشرة، التقاطعات

مبرهنة 11.8: ليكن U و W فضاءين جزئيين منتهيي - البعد في الفضاء المتجهي V. إذن $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$. [وبذلك، $\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W)$].

107.8 اثبت مبرهنة 11.8 التي تعطي العلاقة بين بعد مجموع وفضاءاته الجزئية.

■ لاحظ أن $U \cap W$ فضاء جزئي في U و W معاً. لنفترض أن $\dim U = m$، $\dim W = n$، $\dim (U \cap W) = r$.

ولنفترض أن $\{v_1,\dots,v_r\}$ قاعدة لـ $U \cap W$. يمكن أن نوسّع $\{v_i\}$ إلى قاعدة لـ U وإلى قاعدة لـ W؛ مثلاً $\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{m-r}\}$ و $\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_{n-r}\}$ قاعدتان لـ U و W، على الترتيب. ولتكن $B=\{v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_{m-r},w_1,\dots,w_{n-r}\}$. لاحظ أن B تمتلك تماماً عدد $(m+n-r)$ من العناصر. وبذلك، تكون المبرهنة قد أثبتت، إذا نحن استطعنا تبيان أن B قاعدة لـ $U+W$. بما أن $\{v_i,u_j\}$ تولّد U و $\{v_i,w_k\}$ تولّد W، فإن الاتحاد $B=\{v_i,u_j,w_k\}$ يولّد $U+W$. يكفي إذن تبيان أن B مستقلة.

لنفترض أنّ

$$a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_{m-r}u_{m-r}+c_1w_1+\cdots+c_{n-r}w_{n-r}=0 \tag{1}$$

حيث a_i، b_j، c_k سلّميات. وليكن

$$v=a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_{m-r}u_{m-r} \tag{2}$$

لدينا أيضاً، من (1)، أن

$$v=-c_1w_1-\cdots-c_{n-r}w_{n-r} \tag{3}$$

بما أن $\{v_i,u_j\}\subset U$، $v\in U$ بسبب (2)؛ وبما أن $\{w_k\}\subset W$، $v\in W$ بسبب (3). ينتج عن ذلك أن $v\in U\cap W$. الآن، $\{v_i\}$ قاعدة لـ $U\cap W$ وبذلك يوجد سلّميات $d_1,\dots,d_r$ يكون من أجلها $v=d_1v_1+\dots+d_rv_r$. إذن، وبواسطة (3)، يكون لدينا $d_1v_1+\dots+d_rv_r+c_1w_1+\dots+c_{n-r}w_{n-r}=0$. ولكن $\{v_i,w_k\}$ قاعدة لـ W، وبذلك فهي مستقلة. وبالتالي، المعادلة أعلاه تُسبّبُ $c_1=0,\dots,c_{n-r}=0$. بالتعويض في (1)، نحصل على $a_1v_1+\dots+a_rv_r+b_1u_1+\dots+b_{m-r}u_{m-r}=0$. ولكن $\{v_i,u_j\}$ قاعدة لـ U، وبذلك فهي مستقلة. وبالتالي، المعادلة أعلاه تسبّبُ $a_1=0,\dots$، $a_r=0$، $b_1=0,\dots$، $b_{m-r}=0$.

بما أن المعادلة (1) تقتضي أن يكون كل a_i، b_j، و c_k مساوية للصفر، فإن $B=\{v_i,u_j,w_k\}$ تكون مستقلة، وهذا يثبت المبرهنة.

108.8 لنفترض أن U و W فضاءين جزئيين رباعيَّيْ ـ البعد مختلفين في فضاء متجهي V بعده 6. أوجد الأبعاد الممكنة لـ $U\cap W$.

■ بما أن U و W مختلفان، فإن $U+W$ يحتوي فعلياً U و W؛ وبالتالي، $\dim(U+W)>4$. ولكن $\dim(U+W)$ لا يمكن أن يكون أكبر من 6، لأن $\dim V=6$. إذن، لدينا إمكانيتان: (i) $\dim(U+W)=5$، أو (ii) $\dim(U\cap W)=6$. لدينا، من مبرهنة 11.8، أن $\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=8-\dim(U+W)$. إذن، (i) $\dim(U\cap W)=3$ أو (ii) $\dim(U\cap W)=2$.

109.8 لنفترض أن U و W فضاءان جزيئان ثنائيا ـ البعد في $\mathbf{R}^3$. بيّن أن $U\cap W\neq\{0\}$. وأوجد، على الخصوص، الأبعاد الممكنة لـ $U\cap W$.

■ لنفترض أن $U=W$. إذن، $U\cap W=U=W$ وبالتالي $\dim(U\cap W)=2$. لنفترض $U\neq W$. إذن، $U+W$ يحتوي فعلياً U (و W). وبالتالي، $\dim(U+W)>\dim U=2$. ولكن $U+W\subseteq\mathbf{R}^3$ والذي بعده 3. إذن، $\dim(U+W)=3$. ولدينا، من مبرهنة 11.8 $\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=2+2-3=1$ أي أن $U\cap W$ مستقيم يمر بنقطة الأصل.

ملاحظة: يتوافق ما جاء أعلاه مع النتيجة المعروفة في الهندسة الفضاءية بأن تقاطع مستويين مختلفين يكون خطاً مستقيماً.

المسائل 110.8-113.8 تتعلق بالفضاءين الجزئيين التاليين في $\mathbf{R}^4$:

$$U=\text{span}\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\}\qquad W=\text{span}\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\}$$

110.8 أوجد قاعدة $U+W$ وكذلك بعده.

■ $U+W$ فضاء مولّد بواسطة ستة متجهات. بالتالي، تكون المصفوفة التي صفوفها المتجهات الستة المعطاة ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&2&3&0\\2&3&3&-1\\1&2&2&-2\\2&3&2&-3\\1&3&4&-3\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&1&3&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&-1\\0&2&4&-2\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

إلى $$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية، $(1,1,0,-1)$، $(0,1,3,1)$، و $(0,0,-1,-2)$، تشكل قاعدة لـ $U+W$، وبذلك فإن $\dim(U+W)=3$.

111.8 أوجد قاعدة لـ U وكذلك بعده.

■ اختزل إلى شكل درجي المصفوفة التي صفوفها تولِّد U:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&2&3&0\\2&3&3&-1\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

الصفَّان غير الصفريين في المصفوفة الدرجية، $(1,1,0,-1)$ و $(0,1,3,1)$، يشكِّلان قاعدة لـ U، وبذلك $\dim U=2$.

112.8 أوجد قاعدة لـ W وكذلك بُعْده.

■ إختزل إلى شكل درجي المصفوفة التي صفوفها تولِّد W:

$$\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\2&3&2&-3\\1&3&4&-3\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

الصفان غير الصفريين في المصفوفة الدرجية، $(1,2,2,-2)$ و $(0,-1,-2,1)$، يشكلاّن قاعدة لـ W وبذلك $\dim W=2$.

113.8 أوجد بعد $U\cap W$.

■ استخدم مبرهنة 11.8: $\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=2+2-3=1$. [لاحظ أن مبرهنة 11.8 لا تساعدنا في إيجاد قاعدة لـ $U\cap W$ ولكن بُعْده فقط. (أنظر المسائل 114.7-117.8)].

المسائل 114.8-117.8 تتعلق بالفضاءين الجزئيين التاليين في $\mathbf{R}^5$:

$W=\text{span}\,\{(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)\}$ $\qquad$ $U=\text{span}\,\{(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)\}$

114.8 أوجد قاعدة لـ $U+W$ وكذلك بعده.

■ $U+W$ فضاء مولّد بواسطة كل المتجهات الستة. نكوّن بالتالي المصفوفة التي صفوفها المتجهات الستة ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\1&4&-3&4&2\\2&3&-1&-2&9\\1&3&0&2&1\\1&5&-6&6&3\\2&5&3&2&1\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&-3&3&-6&3\\0&0&2&0&-2\\0&2&-4&4&0\\0&-1&7&-2&-5\end{pmatrix}$$ إلى $$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&2&0&-2\\0&0&-2&0&2\\0&0&6&0&-6\end{pmatrix}$$

إلى $$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&2&0&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

مجموعة الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية، $\{(1,3,-2,2,3),\ (0,1,-1,2,-1),(0,0,2,0,-2)\}$ ، تشكل قاعدة لـ $U + W$؛ بذلك، $\dim(U + W) = 3$.

115.8 أوجد المنظومة المتجانسة التي فضاءها الحلّي U.

▩ نكوّن المصفوفة التي تولّد صفوفها الثلاثة الأولى U والتي صفها الأخير (x,y,z,s,t) ثم نختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ x & y & z & s & t \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -3x+y & 2x+z & -2x+s & -3x+t \end{pmatrix}$$

$$\text{إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -x+y+z & 4x-2y+s & -6x+y+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نساوي المداخل في الصف الثالث بالصفر، فنحصل على المنظومة المتجانسة التي فضاءها الحلّي يكون U:

$$-x + y + z = 0 \qquad 4x - 2y + s = 0 \qquad -6x + y + t = 0$$

116.8 أوجد منظومة متجانسة ذات فضاء حلّي W.

▩ نكوّن المصفوفة التي صفوفها الأولى تولّد W والتي صفها الأخير (x,y,z,s,t)، ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ x & y & z & s & t \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3x+y & z & -2x+s & -x+t \end{pmatrix}$$

$$\text{إلى } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9x+3y+z & 4x-2y+s & 2x-y+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ساوِ بالصفر مداخل الصف الثالث، فتحصل على المنظومة المتجانسة ذات الفضاء الحلّي W:

$$-9x + 3y + z = 0 \qquad 4x - 2y + s = 0 \qquad 2x - y + t = 0$$

117.8 أوجد قاعدة لـ $U \cap W$ وكذلك بعده.

▩ إجمع بين المنظومتين أعلاه لتحصل على منظومة متجانسة ذات فضاء حلّي W، ثم حلّها:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2y + s = 0 \\ -6x + y + t = 0 \\ -9x + 3y + z = 0 \\ 4x - 2y + s = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2y + 4z + s = 0 \\ -5y - 6z + t = 0 \\ -6y - 8z = 0 \\ 2y + 4z + s = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$\text{أو } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2y + 4z + s = 0 \\ 8z + 5s + 2t = 0 \\ 4z + 3s = 0 \\ s - 2t = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2y + 4z + s = 0 \\ 8z + 5s + 2t = 0 \\ s - 2t = 0 \end{cases}$$

هناك متغير حرّ واحد، وهو t؛ بالتالي، $\dim(U \cap W) = 1$. نضع $t = 2$، فنحصل على الحل $x = 1$، $y = 4$، $z = -3$، $s = 4$، $t = 2$. وبذلك، تكون $\{(1,4,-3,4,2)\}$ قاعدة لـ $U \cap W$.

118.8 لنفترض أن U و W فضاءان جزيئان لـ V، وأن $\dim U = 4$ و $\dim W = 5$ و $\dim V = 7$. أوجد الأبعاد الممكنة لـ $U \cap W$.

■ بما أن $W \subseteq U + W \subseteq V$، حيث $\dim W = 5$ و $\dim V = 7$، فإن البعد الممكن يكون فقط 5 أو 6 أو 7. ولكن لدينا، من مبرهنة 11.8، أن $\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W) = 9 - \dim (U + W)$. بما أن $5 = \dim (u+W)$ أو 6 أو 7، فإن $\dim (U \cap W) = 4$ أو 3 أو 2.

119.8 لنفترض أن V هو المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين U و W، أي لنفترض أن $V = U \oplus W$. بيّن أن $\dim V = \dim U + \dim W$.

■ بما أن $V = U \oplus W$، فيكون لدينا $V = U + W$ و $U \cap W = \{0\}$. وبذلك

$$\dim V = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - 0$$
$$= \dim U + \dim W$$

120.8 ليكن U و W فضائين جزئيين لـ $\mathbf{R}^3$ بحيث أن $\dim U = 1$، $\dim W = 2$، $U \not\subseteq W$. بيّن أن $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

■ بما أن $U \not\subseteq W$، فإن التقاطع $U \cap W$ يحتويه فعلاً U، كما أن $U + W$ يحتوي فعلاً W. وبذلك، $\dim (U \cap W) < \dim U = 1$، وبالتالي، $\dim (U \cap W) = 0$، وبذلك $U \cap W = \{0\}$ أيضاً $\dim (U + W) > \dim W = 2$، ولكن $U + W \subseteq \mathbf{R}^3$ حيث $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. إذن، $\dim (U + W) = 3$ وبذلك $\mathbf{R}^3 = U + W$. الشرطان $\mathbf{R}^3 = U + W$ و $U \cap W = \{0\}$ يقتضيان أن $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

121.8 لنفترض أن $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$، وأن $B_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in_i}\}$ محتواة في U_i ومستقلة خطياً، من أجل $i = 1,...,r$. بيّن أن الإتحاد $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_r$ مستقل خطياً.

■ لنفترض أن

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} a_{1j_1}u_{1j_1} + \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{2j_2}u_{2j_2} + \cdots + \sum_{j_r=1}^{n_r} a_{rj_r}u_{rj_r} = 0 \qquad (1)$$

حيث a_{ij_i} سلّميات. إن كل $\sum_{j_i} a_{ij_i}u_{ij_i}$ تنتمي إلى U_i. بما أن V المجموع المباشر لـ U_i، فإن المجموع (1) يكون وحيداً من أجل 0. وبذلك، ومن أجل $i = 1,...,r$، يكون لدينا $\sum_{j_i} a_{ij_i}u_{ij_i} = 0$. ولكن B_i مستقلة خطياً. بالتالي، لدينا من أجل $i = 1,...,r$، $a_{i1} = 0, a_{i2} = 0, \ldots, a_{in_i} = 0$. بمعنى آخر، كل سلّمي في (1) يساوي 0. وبذلك، تكون B مستقلة خطياً.

122.8 لنفترض أن $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$، وأن B_i قاعدة لـ U_i، من أجل $i = 1,...,r$. بيّن أن $B = \cup B_i$ قاعدة لـ V.

■ لدينا، من مسألة 121.8، أن B مستقلة خطياً لأن كل B_i مستقلة خطياً. إفترض أن $v \in V$. إذن، $v = u_1 + ... + u_r$ حيث $u_i \in U_i$. إذن، u_i تركيبة خطية للمتجهات في B_i. وبالتالي، تكون v تركيبة خطية للمتجهات في B. وبذلك، تولّد B الفضاء V. بما أن B مستقلة خطياً وتولّد V، فإنها تشكل قاعدة لـ V.

123.8 ليكن $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$ حيث $\dim U_i = n_i$. أثبت أن $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + ... + \dim U_r$.

■ لتكن B_i قاعدة لـ U_i. بالتالي، يكون لـ B_i عدد n_i من العناصر. وبذلك، يكون لـ $B = \cup B_i$ عدد $n_1 + ... + n_r$ من العناصر. وتكون B قاعدة لـ V، بسبب مسألة 122.8. وبالتالي، $\dim V = n_1 + ... + n_r = \dim U_1 + ... + \dim U_r$.

124.8 لنفترض أن $\{u_1,...,u_r,w_1,...,w_s\}$ مجموعة جزئية مستقلة خطياً لفضاء متجهي V. بيّن أن $\text{span}(u_i) \cap \text{span}(w_j) = \{0\}$.

■ إفترض أن $v \in \text{span}(u_i) \cap \text{span}(w_j)$. توجد إذن سلّميات a_i و b_j بحيث أن $v = a_1u_1 + ... + a_ru_r = b_1w_1 + ... + b_sw_s$. إذن، $a_1u_1 + ... + a_ru_r - b_1w_1 - ... - b_sw_s = 0$. ولكن $\{u_i, w_j\}$ مستقلة خطياً. وبالتالي، يكون كل $a_i = 0$ وكل $b_j = 0$. ينتج عن ذلك أن $v = 0$.

125.8 ليكن U فضاءً جزئياً في فضاء متجهي V منتهي البعد. بيّن أنه يوجد فضاء جزئي W لـ V بحيث أن $V = U \oplus W$.

■ لتكن $\{u_1,...,u_r\}$ قاعدة لـ U. بما أن $\{u_i\}$ مستقلة خطياً، فإنه يمكن توسيعها إلى قاعدة لـ V، مثلا

$\{u_1,\dots,u_r,w_1,\dots,w_s\}$. ليكن W الفضاء المولّد بواسطة $\{w_1,\dots,w_s\}$. بما أن $\{u_i,w_j\}$ تولّد V، فإنه يكون لدينا $V = U + W$. من جهة أخرى، وبواسطة المسألة 124.8، يكون لدينا $U \cap W = \{0\}$. ينتج عن ذلك أن $V = U \oplus W$.

126.8 لنفترض أن B مجموعة جزئية مستقلة خطياً لـ V، وأن $\{B_1,B_2,\dots,B_r\}$ تجزئة لـ B. بيّن أن $\text{span}(B) = \text{span}(B_1) \oplus \text{span}(B_2) \oplus \dots \oplus \text{span}(B_r)$.

■ بما أن $B = \cup_i B_i$ وأن كل $B_i \subseteq B$، يكون لدينا $\text{span}(B) = \text{span}(\cup_i B_i) \subseteq \Sigma_i \text{span}(B_i) \subseteq \text{span}(B)$. إذن، $\text{span}(B) = \Sigma_i \text{span}(B_i)$. لنفترض أن

$$0 = \sum a_{1j_1}u_{1j_1} + \sum a_{2j_2}u_{2j_2} + \cdots + \sum a_{rj_r}u_{rj_r} \qquad (1)$$

حيث a_{ij} سلّميات والـ u_{ij} تنتمي إلى B_i . بما أن B مستقلة خطياً، فإن كل $a_{ij_i} = 0$ في (1). وبذلك، يمكن كتابة 0 في الشكل الوحيد $0 = 0 + 0 + \dots + 0$. ينتج عن ذلك، أن $\text{span}(B) = \text{span}(B_1) \oplus \dots \oplus \text{span}(B_r)$.

127.8 لنفترض أن $V = U_1 + U_2 + \dots + U_r$ وأن $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_r$. بيّن أن $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$.

■ لنفترض أن $\dim V = n$. ولتكن B_i قاعدة لـ U. إذن، $B = \cup_i B_i$ لها m عنصراً وتولّد V. وبذلك، تكون B قاعدة من أجل V. نجد، بواسطة مسألة 126.8، أن $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$.

9.8 إحداثيات

128.8 عرّف إحداثيات متجه v في فضاء متجهي V فوق حقل K حيث $\dim V = n$.

■ لتكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ قاعدة لـ V. بما أن $\{e_i\}$ تولّد V، فإن v تركيبة خطية للـ e_i:

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n \qquad a_i \in K$$

بما أن الـ e_i مستقلة، فإن تمثيلاً مثل هذا يكون وحيداً (المسألة 129.8). وبذلك، تكون السلميات $a_1,\dots,a_n$ الـ n محددة تماماً بواسطة المتجه v والقاعدة $\{e_i\}$. نطلق على هذه السلميات اسم «إحداثيات» v في $\{e_i\}$ ، ونطلق على النونية $(a_1,\dots,a_n)$ اسم «المتجه الإحداثي» لـ v نسبةً إلى $\{e_i\}$ ، ونرمز له بـ $[v]_e$ أو $[v]$ فقط:

$$[v]_e = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

129.8 لتكن $v_1,v_2,\dots,v_m$ متجهات مستقلة خطياً، ولنفترض أن u تركيبة خطية للـ v_i، مثلاً $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m$ حيث الـ a_i أعداد سلمية. بيّن أن التمثيل أعلاه لـ u وحيد.

■ لنفترض أن $u = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_mv_m$ حيث الـ b_i سلّميات. نطرح،

$$0 = u - u = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_m - b_m)v_m$$

ولكن الـ v_i مستقلة خطياً؛ إذن، المعاملات في العلاقة أعلاه يساوي كل منها صفراً:

$$a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \dots, a_m - b_m = 0$$

وبالتالي، $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_m$؛ وبذلك يكون التمثيل أعلاه لـ u، كتركيبة خطية للـ v_i، وحيداً.

المسألتان 130.8-131.8 تتعلقان بالمتجه $v = (3,1,-4)$ في $\mathbf{R}^3$.

130.8 أوجد المتجه الإحداثي لـ v نسبة للقاعدة $f_1 = (1,1,1)$، $f_2 = (0,1,1)$، $f_3 = (0,0,1)$.

■ نكتب v كتركيبة خطية للـ f_i باستخدام المجاهيل x، y، z؛ أي نضع $v = xf_1 + yf_2 + zf_3$:

$$\begin{aligned}(3, 1, -4) &= x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 1)\\ &= (x, x, x) + (0, y, y) + (0, 0, z)\\ &= (x, x + y, x + y + z)\end{aligned}$$

ثم نساوي بين المركبات المتقابلة فتحصل على منظومة المعادلات المكافئة:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x + y &= 1 \\ x + y + z &= -4 \end{aligned}$$

والتي تمثلك الحل $x = 3$، $y = -2$، $z = -5$. إذن، $[v]_f = [3,-2,-5]$.

131.8 أوجد المتجه الإحداثي لـ v نسبة للقاعدة المعتادة $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$، $e_3 = (0,0,1)$.

■ نكتب $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ باستخدام المجاهيل x، y، z: $(3,1,-4) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x,y,z)$. نساوي بين المركبات المتقابلة، فنحصل على $x = 3$، $y = 1$، $z = -4$، وبذلك، $[v]_e = [3,1,-4]$. بمعنى آخر، يكون لـ $[v]_e$ نسبة للقاعدة المعتادة نفس المركبات كما v. [المسألة التالية تبين أن هذه النتيجة صحيحة عموماً]

132.8 ليكن v متجهاً في K^n. بيِّن أن المتجه الإحداثي $[v]$ نسبة إلى القاعدة المعتادة $e_1 = (1,0,\ldots,0)$، $e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots$، $e_n = (0,0,\ldots,0,1)$ يكون له نفس المركبات كما v.

■ لنفترض أن $v = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. إذن، $v = x_1e_1 + x_2e_2 +\ldots+ x_ne_n = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$. وبذلك، $x_1 = a_1$، $x_2 = a_2,\ldots$، $x_n = a_n$. ينتج عن ذلك أن $[v] = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$.

133.8 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات التي درجتها أصغر أو تساوي 2:

$$V = \{at^2 + bt + c\colon a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

إن الحدوديات $e_1 = 1$، $e_2 = t - 1$، و $e_3 = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$ تشكل قاعدة لـ V. ليكن $v = 2t^2 - 5t + 6$. أوجد $[v]_e$، المتجه الاحداثي لـ v نسبة للقاعدة $\{e_1,e_2,e_3\}$.

■ نكتب v كتركيبة خطية للـ e_i باستخدام المجاهيل x، y، z؛ أي نضع $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$:

$$\begin{aligned} 2t^2 - 5t + 6 &= x(1) + y(t-1) + z(t^2 - 2t + 1) \\ &= x + yt - y + zt^2 - 2zt + z \\ &= zt^2 + (y - 2z)t + (x - y + z) \end{aligned}$$

ثم نساوي بين معاملات قوى t المتماثلة:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ y - 2z &= -5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

ويكون حل المنظومة أعلاه $x = 3$، $y = -1$، $z = 2$. وبذلك، $v = 3e_1 - e_4 + 2e_3$، أي أن $[v]_e = [3,-1,2]$.

المسائل 134.8-137.8 تتعلق بالقاعدة $u_1 = (2,1)$، $u_2 = (1,-1)$ في $\mathbf{R}^2$.

134.8 أوجد المتجه الإحداثي $[v]$ لـ $v = (2,3)$.

■ نكتب $v = xu_1 + yu_2$ فنحصل على $(2,3) = x(2,1) + y(1,-1) = (2x + y,x - y)$. نساوي بين المركبات المتقابلة، فنحصل على المعادلتين $2x + y = 2$ و $x - y = 3$. نحلهما فنجد أن $x = 5/3$، $y = -4/3$. $[v] = [5/3,-4/3]$.

135.8 أوجد المتجه الإحداثي $[u]$ حيث $u = (4,-1)$.

■ نضع $u = xu_1 + yu_2$ فنحصل على $(4,-1) = (2x + y,x - y)$. نحل $2x + y = 4$ و $x - y = -1$ فنجد أن $x = 1$، $y = 2$. إذن، $[u] = [1,2]$.

136.8 أوجد المتجه الإحداثي $[w]$ حيث $w = (3,-3)$.

■ نضع $w = xu_1 + yu_2$ فنحصل على $(3,-3) = (2x + y,x - y)$. نحل $2x + y = 3$ و $x - y = -3$، فنجد أن $x = 0$، $y = 3$. إذن، $[w] = [0,3]$.

137.8 أوجد المتجه الإحداثي $[v]$ حيث $v = (a,b)$.

■ نكتب $v = xu_1 + yu_2$ فنحصل على $(a,b) = (2x + y, x - y)$. نحل $2x + y = a$ و $x - y = b$ فنجد أن $x = (a + b)/3$، $y = (a - 2b)/3$، وبذلك $[v] = [(a + b)/3, (a - 2b)/3]$.

المسألتان 138.8، 139.8 تتعلقان بالقاعدة $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ في $\mathbf{R}^3$.

138.8 أوجد إحداثيات المتجه $v = (4,-3,2)$.

■ نكتب v كتركيبة خطية في متجهات القاعدة باستخدام سلَميات مجهولة x,y,z:

$$v = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0)$$

ثم نحل من أجل المتجه الحل (x,y,z). [الحل وحيدٌ لأن متجهات القاعدة مستقلة خطياً].

$$(4,-3,2) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (x + y + z, x + y, x)$$

نساوي بين المركبات المتقابلة فنحصل على المنظومة $x + y + z = 4$، $x + y = -3$، $x = 2$. نعوض بـ $x = 2$ في المعادلة الثانية فنحصل على $y = -5$. ثم نضع $x = 2$، $y = -5$ في المعادلة الأولى فنحصل على $z = 7$. وبذلك، يكون $x = 2$، $y = -5$، $z = 7$ الحل الوحيد للمنظومة. إذن، $[v] = [2,-5,7]$.

139.8 أوجد المتجه الإحداثي $[w]$ حيث $w = (a,b,c)$.

■ نكتب w كتركيبة خطية في متجهات القاعدة:

$$(a,b,c) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (x + y + z, x + y, x)$$

إذن، $x + y + z = a$، $x + y = b$، $x = c$. نحل فنحصل على $x = c$، $y = b - c$، $z = a - b$. وبذلك، $[w] = [c, b - c, a - b]$.

المسألتان 140.8-141.8 تتعلقان بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ في الفضاء المتجهي V للمصفوفات 2×2 الحقيقية.

140.8 أوجد المتجه الإحداثي $[A]_B$ للمصفوفة A نسبة للقاعدة

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

■ نكتب A كتركيبة خطية لمصفوفات القاعدة باستخدام السلَميات المجهولة x، y، z، t:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & -z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + z + t & x - y - z \\ x + y & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

نساوي بين المداخل المتقابلة فنحصل على المنظومة $x + z + t = 2$، $x - y - z = 3$، $x + y = 4$، $x = -7$ والتي نحصل منها على $x = -7$، $y = 11$، $z = -21$، $t = 30$. إذن $[A] = [-7,11,-21,30]$. [لاحظ أن المتجه الإحداثي لـ A يجب أن يكون متجهاً في $\mathbf{R}^4$ لأن $\dim V = 4$].

141.8 أوجد المتجه الإحداثي $[A]_E$ للمصفوفة A نسبة للقاعدة المعتادة لـ V، أي القاعدة

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■ $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

إذن، $x=2$، $y=3$، $z=4$، $t=-7$. وبالتالي $[A]_E=[2,3,4,-7]$، حيث مركباته هي عناصر A مكتوبة صفاً بعد صف.

ملاحظة: إن النتيجة أعلاه صحيحة عموماً، أي أنه إذا كانت A أي مصفوفة $m\times n$ في الفضاء المتجهي V للمصفوفات $m\times n$ فوق حقل K، فإن المتجه الإحداثي [A] لـ A نسبة للقاعدة المعتادة لـ V يكون المتجه الإحداثي في K^{mn} الذي مركباته عناصر A مكتوبة صفاً بعد صف.

142.8 حدّد ما إذا كانت المصفوفات التالية مترابطة أم مستقلة:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 8 & -11\\ 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

■ إن التوجهات الإحداثية للمصفوفات أعلاه نسبة للقاعدة المعتادة هي كما يلي:

$$[A]=[1,2,-3,4,0,1]\qquad [B]=[1,3,-4,6,5,4]\qquad [C]=[3,8,-11,16,10,9]$$

نكوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات الإحداثية أعلاه:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 8 & -11 & 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

إختزل M صفياً إلى شكل درجي:

$$M \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 10 & 6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفة الدرجية لها صفان غير صفريين فقط، فإن المتجهات الإحداثية [A]، [B]، و [C] تولّد فضاءً بعده 2، وبذلك تكون مترابطة. ينتج عن ذلك، أن المصفوفات الأصلية A، B، C مترابطة.

143.8 ليكن W الفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 المتناظرة فوق **R**. [أنظر المسألة 60.8]. أوجد المتجه الإحداثي للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}4 & -11\\ -11 & -7\end{pmatrix}$ نسبة للقاعدة $\left\{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & -5\end{pmatrix}\right\}$.

■ نكتب A كتركيبة خطية لمصفوفات القاعدة باستخدام سلّميات مجهولة x، y، z:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -11\\ -11 & -7\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+4z & -2x+y-z\\ -2x+y-z & x+3y-5z\end{pmatrix}$$

نساوي بين المداخل المتقابلة، فنحصل على منظومة المعادلات الخطية المكافئة، التي نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{aligned}x+2y+4z&=4\\ -2x+y-z&=-11\\ 2x+y-z&=-11\\ x+3y-5z&=-7\end{aligned}\quad \text{أو}\quad \begin{aligned}x+2y+4z&=4\\ 5y+7z&=-3\\ y-9z&=-11\end{aligned}\quad \text{أو}\quad \begin{aligned}x+2y+4z&=4\\ 5y+7z&=-3\\ 52z&=52\end{aligned}$$

نحصل على $z=1$ من المعادلة الثالثة، ثم $y=-2$ من المعادلة الثانية، ثم $x=4$ من المعادلة الأولى. فيكون حل المنظومة هو $x=4$، $y=-2$، $z=1$؛ وبالتالي، $[A]=[4,-2,1]$. [بما أن $\dim W=3$ بسبب المسألة 60.8، فإن المتجه الإحداثي لـ A يجب أن يكون متجهاً في $\mathbf{R}^3$].

144.8 لتكن $\{e_1,e_2,e_3\}$ و $\{f_1,f_2,f_3\}$ قاعدتين في فضاء متجهي V (بعده 3). ولنفترض أن

$$\begin{aligned}e_1&=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3\\ e_2&=b_1f_1+b_2f_2+b_3f_3\\ e_3&=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3\end{aligned}\quad \text{و}\quad P=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\qquad (1)$$

هنا، P المصفوفة التي صفوفها المتجهات الإحداثية e_1، e_2، e_3، على الترتيب، نسبة إلى القاعدة $\{f_i\}$. بيّن أن $[v]_eP=[v]_f$، من أجل كل $v\in V$. أي أن ضرب المتجه الإحداثي لـ v نسبة إلى القاعدة $\{e_i\}$ في المصفوفة P يعطينا المتجه الإحداثي لـ v نسبة إلى القاعدة $\{f_i\}$. [غالباً ما تسمى المصفوفة P مصفوفة تغيير القاعدة].

■ نفترض أن $v = re_1 + se_2 + te_3$؛ إذن $[v]_e = (r,s,t)$. لدينا، باستخدام (1)،

$$v = r(a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3) + s(b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3) + t(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)$$
$$= (ra_1 + sb_1 + tc_1)f_1 + (ra_2 + sb_2 + tc_2)f_2 + (ra_3 + sb_3 + tc_3)f_3$$

وبالتالي

$$[v]_f = (ra_1 + sb_1 + tc_1, ra_2 + sb_2 + tc_2, ra_3 + sb_3 + tc_3)$$

من جهة أخرى

$$[v]_e P = (r, s, t)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$= (ra_1 + sb_1 + tc_1, ra_2 + sb_2 + tc_2, ra_3 + sb_3 + tc_3)$$

ينتج عن ذلك، أن $[v]_e P = [v]_f$.

ملاحظة: في الفصول 9-11، سوف نكتب المتجهات الإحداثية كمتجهات عمودية بدلاً من متجهات صفية. إذن، وتأسيساً على ما جاء أعلاه،

$$Q[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 + tc_1 \\ ra_2 + sb_2 + tc_2 \\ ra_3 + sb_3 + tc_3 \end{pmatrix} = [v]_f$$

حيث Q المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الإحداثية لـ e_1، e_2، e_3، نسبة للقاعدة $\{f_i\}$. لاحظ أن Q هي منقول P وأن Q تظهر على يسار المتجه العمودي $[v]_e$ في حين تظهر P على يمين المتجه الصفي $[v]_e$.

المسائل 145.8-150.8 تتعلق بالقاعدة $B = \{1, 1-t, (1-t)^2, (1-t)^3\}$ للفضاء المتجهي V للحدوديات في t من الدرجة 3 فأقل، والحدوديات

$$u = 2 - 3t + t^2 + 2t^3 \qquad w = 3 - 2t - t^2 \qquad v = a + bt + ct^2 + dt^3$$

145.8 أوجد المتجه الإحداثي $[u]$ نسبة للقاعدة B في V.

■ نكتب u كتركيبة خطية لمتجهات القاعدة باستخدام المجاهيل x، y، z، s:

$$u = 2 - 3t + t^2 + 2t^3 = x(1) + y(1-t) + z(1-t)^2 + s(1-t)^3$$
$$= x(1) + y(1-t) + z(1 - 2t + t^2) + s(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$$
$$= x + y - yt + z - 2zt + zt^2 + s - 3st + 3st^2 - st^3$$
$$= (x + y + z + s) + (-y - 2z - 3s)t + (z + 3s)t^2 + (-s)t^3$$

ثم نساوي بين معاملات قوى t المتماثلة:

$$x + y + z + s = 2 \qquad -y - 2z - 3s = -3 \qquad z + 3s = 1 \qquad -s = 2$$

فيكون الحل $x = 2$، $y = -5$، $z = 7$، $s = -2$. وبذلك، $[u] = [2, -5, 7, -2]$.

146.8 أوجد المتجه الإحداثي $[u]$ نسبة للقاعدة $\{1, t, t^2, t^3\}$ في V.

■ تتكون القاعدة من قوى t؛ إذن، اكتب المعاملات المقابلة لتحصل على $[u] = [2, -3, 1, 2]$.

147.8 أوجد المتجه الإحداثي $[w]$ نسبة للقاعدة B في V.

■ نكتب w كتركيبة خطية لمتجهات القاعدة باستخدام المجاهيل x، y، z، s:

$$w = 3 - 2t - t^2 = x(1) + y(1-t) + z(1-t)^2 + s(1-t)^3 = (x + y + z + s) + (-y - 2z - 3s)t + (z + 3s)t^2 + (-s)t^3$$

ثم نساوي بين معاملات قوى t المتماثلة:

$$x + y + z + s = 3 \qquad -y - 2z - 3s = -2 \qquad z + 3s = -1 \qquad -s = 0$$

فنحصل على الحل $x = 0$، $y = 4$، $z = -1$، $s = 0$. وبذلك، $[w] = [0, 4, -1, 0]$.

148.8 أوجد المتجه الإحداثي [w] نسبة للقاعدة $\{t^3,t^2,t,1\}$ في V.

■ تتكون القاعدة من قوى t، وبالتالي نكتب المعاملات المقابلة لنحصل على $[w]=[0,-1,-2,3]$.

149.8 أوجد المتجه الإحداثي [v] نسبة للقاعدة B في V.

■ نكتب v كتركيبة خطية في متجهات القاعدة باستخدام المجاهيل x، y، z، s:

$$v=a+bt+ct^2+dt^3=x(1)+y(1-t)+z(1-t)^2+s(1-t)^3$$
$$=(x+y+z+s)+(-y-2z-3s)t+(z+3s)t^2+(-s)t^3$$

ثم نساوي بين معاملات قوى t المتماثلة:

$$x+y+z+s=a \qquad -y-2z-3s=b \qquad z+3s=c \qquad -s=d$$

فنجد الحل $x=a+b+c+d$، $y=-b-2c-3d$، $z=c+3d$، $s=-d$. وبذلك،

$$[v]=[a+b+c+d,\ \ -b-2c-3d,\ \ c+3d,\ \ -d]$$

150.8 أوجد المتجه الإحداثي [v] نسبة إلى (أ) القاعدة $\{1,t,t^2,t^3\}$ في V، (ب) $\{t^3,t^2,t,1\}$ في V. [هاتان القاعدتان مختلفتان لأن ترتيب العناصر مختلف].

■ نكتب، في كل حالة، المعاملات المقابلة لمتجهات القاعدة: (أ) $[v]=(d,c,b,a)$، (ب) $[v]=[a,b,c,d]$.

151.8 بيّن أن المتجه الإحداثي لـ $0\in V$ نسبة إلى أي قاعدة V يكون دائماً النونية الصفرية، أي أن $[0]=[0,0,\dots,0]$.

■ لتكن $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ قاعدة لـ V. لنفترض أن $0=a_1u_1+\dots+a_nu_n$. بما أن الـ u_i مستقلة خطياً، فإن $a_1=0,\dots,a_n=0$، وبالتالي $[0]=[0,0,\dots,0]$.

152.8 لنفترض أن V و 'V فضاءان متجهيان فوق نفس الحقل K. عرِّف تشاكلا تقابلياً بين V و 'V، وعرِّف الفضاءات المتجهية المتشاكلة تقابلياً.

■ لنفترض أن $f:V\to V'$ تقابل واحد ـ لواحد، أي لنفترض أن f دالة واحد ـ لواحد وفوقية. تسمى f عندئذ تشاكلاً تقابلياً بين V و 'V إذا كانت f «تحافظ» على عمليتي الفضاء المتجهي من جمع متجهي وضرب سلّمي؛ أي، من أجل كل $v,w\in V$ وكل عدد سلمي $k\in K$، يكون لدينا $f(v+w)=f(v)+f(w)$ و $f(kv)=kf(v)$. نقول، في مثل هذه الحالة، أن V و 'V فضاءان متجهيان متشاكلان تقابلياً، ونكتب $V\cong V'$.

مبرهنة 12.8: ليكن V فضاءً متجهياً نوني ـ البعد فوق حقل K. إذن، V و K^n متشاكلان تقابلياً.

153.8 اثبت مبرهنة 12.8.

■ لتكن $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ قاعدة لـ V. إذن، يقابل كل متجه $v\in V$ النونية $[v]_e$ في K^n. من جهة أخرى، من أجل كل متجه $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in K^n$، يوجد متجه في V في الشكل $a_1e_1+\dots+a_ne_n$. وبذلك، فإن القاعدة $\{e_i\}$ تحدد تقابلاً واحداً ـ لواحد بين المتجهات في V والنونيات في K^n. لاحظ أيضاً أن

و $\quad v=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ تقابل $(a_1,\dots,a_n)$

إذن $\quad w=b_1e_1+\cdots+b_ne_n$ تقابل $(b_1,\dots,b_n)$

$v+w=(a_1+b_1)e_1+\cdots+(a_n+b_n)e_n$ تقابل $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)$

من أجل كل سلّمي $k\in K$. أي أن

$kv=(ka_1)e_1+\cdots+(ka_n)e_n$ تقابل $k(a_1,\dots,a_n)$

$$[v+w]_e=[v]_e+[w]_e \quad \text{و} \quad [kv]_e=k[v]_e$$

يعني هذا، أن التقابل واحد ـ لواحد أعلاه بين V و K^n يحافظ على عمليتي الجمع المتجهي والضرب السلّمي. وبذلك، يكون V و K متشاكلين تقابلياً، ونكتبهما $V\cong K^n$.

الفصل 9
التطبيقات

ينظر هذا الفصل في التطبيقات والدوال على مجموعات إختيارية، وليس من الضروري أن تكون فضاءات متجهية. ويمكن النظر إلى المفاهيم التي ستناقش هنا كمقدمة للفصل التالي الذي سيناقش التطبيقات الخطية على فضاءات متجهية.

1.9 تطبيقات، دوال

1.9 عرِّف تطبيقاً من مجموعة A إلى مجموعة B.

■ لنفترض أنه يُقْرَنُ لكل عنصرٍ في A عنصرٌ وحيد في B؛ أن تجميع مثل هذه الاقترانات تسمّى «تطبيقاً» من A إلى B. ونرمز لتطبيق f من A إلى B بواسطة $f{:}A \to B$. ونكتب $f(a)$، التي تقرأ f لـ a، من أجل العنصر في B الذي يقرنه f بـ $a \in A$؛ ويسمّى «قيمة» f عند a أو «صورة» a تحت f.

ملاحظة: يستعمل المصطلح «دالة» كمرادف للكلمة «تطبيق»، رغم أن بعض النصوص يحتكر كلمة دالة من أجل التطبيقات حقيقية ـ القيمة أو عقدية ـ القيمة، أي الذي يُطبِّق مجموعة إلى **R** أو **C**.

2.9 ما هو نطاق «تطبيق» $f{:}\ A \to B$ ؟

■ إن المجموعة A هي نطاق f.

3.9 ما هو «النطاق ـ المصاحب» للتطبيق $f{:}\ A \to B$ ؟

■ إن المجموعة B هي النطاق ـ المصاحب لـ f ؟

4.9 عرِّف صورة التطبيق $f{:}\ A \to B$.

■ يطلق على مجموعة كل القيم التي تقرنها f بعناصر A «صورة» (أو «مدى») f، ونرمز لها بـ Im f أو $f(A)$، أي

$$\text{Im } f = \{b \in B:\ \ \exists\ \ a \in A\ \ \ni\ \ f(a) = b\}$$

(إستخدمنا $\exists$ من أجل «يوجد»، $\ni$ لتعني «حيث») [لاحظ أن Im f مجموعة جزئية (وربما مجموعة جزئية فعلية) لـ B].

5.9 ليكن $f{:}\ A \to B$، ولتكن S مجموعة جزئية في A. عرِّف صورة S تحت f، والتي نرمز لها بـ $f(S)$.

هنا $f(S) = \{f(a){:}a \in S\} = \{b \in B{:}\ \exists\, a \in S \ni f(a) = b\}$. بمعنى آخر، تتكون $f(S)$ من كل صور العناصر في S.

6.9 ليكن $f{:}\ A \to B$ و T مجموعة جزئية في B. عرِّف «الصورة العكسية» أو «قبل الصورة» لـ T تحت f، ونرمز لها بـ $f^{-1}(T)$.

■ هنا، $f^{-1}(T) = \{a \in A{:}\ f(a) \in T\}$. بمعنى آخر، تتكون $f^{-1}(T)$ من العناصر في A التي تنتمي صورنها إلى T.

7.9 عرِّف «المساواة» بين الدوال.

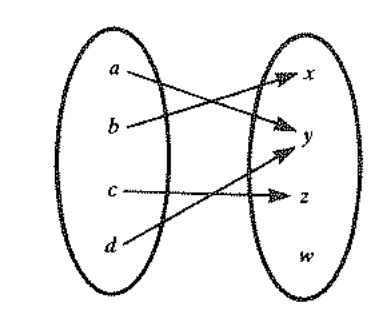
■ نقول عن دالتين $f{:}\ A \to B$ و $g{:}\ A \to B$ بأنهما متساويتان، ونكتب $f = g$، إذا $f(a) = g(a)$ من أجل كل $a \in A$. إن نفي $f = g$ والذي يكتب $f \neq g$ هو القضية: يوجد عنصرٌ $a \in A$ بحيث أن $f(a) \neq g(a)$.

8.9 عرِّف «بيان» الدالة $f{:}\ A \to B$.

■ يقابل كل دالة $f{:}\ A \to B$ المجموعة الجزئية في $A \times B$ المعرَّفة بواسطة $\{(a,f(a){:}\ a \in A)\}$.

نطلق على هذه المجموعة إسم «بيان» f. نلاحظ أن دالتين $f{:}\ A \to B$ و $g{:}\ A \to B$ تتساويان إذا وفقط إذا كان لهما نفس البيان. وبذلك، فإننا لا نميز بين دالة وبيانها.

المسائل 9.9-14.9 تتعلق بتطبيق f من $A = \{a,b,c,d\}$ إلى $B = \{x,y,z,w\}$ معرَّف بواسطة الشكل 1.9.



شكل 1-9

9.9 أوجد صورة كل عنصر في A.

■ يشير السهم إلى صورة كل عنصر، وبذلك، $f(a) = y$، $f(b) = x$، $f(c) = z$، و $f(d) = y$.

10.9 أوجد صورة f.

■ تتكون الصورة f(A) لـ من كل القيم ـ الصورة. القيم الصورة الوحيدة هي x، y، z؛ وبالتالي، $f(A) = \{x,y,z\}$.

11.9 أوجد f(S) حيث $S = \{a,b,d\}$.

■ $f(S) + f(\{a,b,d\}) = \{f(a),f(b),f(d)\} = \{y,x,y\} = \{x,y\}$.

12.9 أوجد $f^{-1}(T)$ حيث $T = \{y,z\}$.

■ العناصر a، c، d صورها في T، إذن $f^{-1}(T) = \{a,c,d\}$.

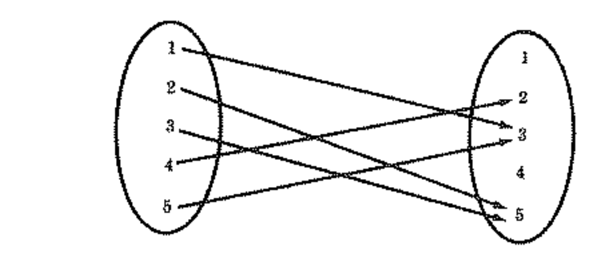
13.9 أوجد $f^{-1}(w)$.

■ لا يوجد أي عنصر تكون صورته w تحت f؛ إذن، $f^{-1}(w) = \emptyset$، أي المجموعة الخالية.

14.9 أوجد بيان f، أي اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة.

■ الأزواج المرتبة (a,f(a))، حيث $a \in A$، تكوّن بيان f. إذن، $f = \{(a,y), (b,x), (c,z), (d,y)\}$.

المسائل 15.9-17.9 تتعلق بالمجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ والدالة $f: A \to A$ المعرّفة بواسطة الشكل 2-9.



شكل 2-9

15.9 أوجد صورة كل عنصر في A.

■ يشير السهم إلى صورة كل عنصر؛ وبذلك، $f(1) = 3$، $f(2) = 5$، $f(3) = 5$، $f(4) = 2$، $f(5) = 3$.

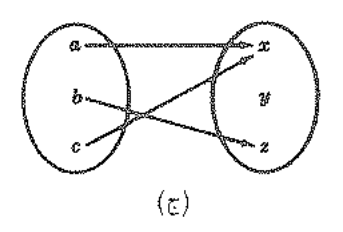
16.9 أوجد الصورة f(A) للدالة f.

■ تتكون الصورة f(A) لـ f من كل القيم ـ الصورة. الآن، أن 2، 3، 5 وحدها التي تظهر كصور لعناصر في A؛ وبالتالي، $f(A) = \{2,3,5\}$.

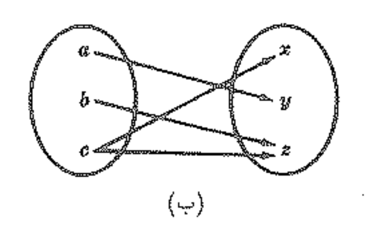
17.9 أوجد بيان f، أي اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة.

■ الأزواج المرتبة (a,f(a))، حيث $a \in A$، تشكل بيان f؛ وبذلك، $f = \{(1,3),(2,5),(3,5),(4,2),(5,3)\}$.

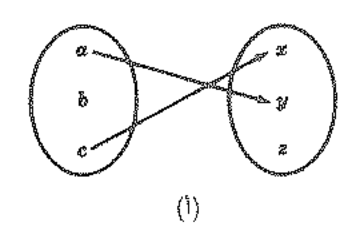
المسائل 18.9-20.9 تتعلق بالمجموعتين $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{x,y,z\}$ والشكل 3-9.



(ج)



(ب)



(أ)

شكل 9-3

18.9 هل شكل 9-3 (أ) يعرّف دالة من A إلى B؟

■ لا، إذ يوجد عنصر $b \in A$ لم يُقْرن به شيء.

19.9 هل شكل 9-3 (ب) يعرّف دالة من A إلى B؟

■ لا، لأنه قُرِنَ عنصران x و z بنفس العنصر $c \in A$.

20.9 هل شكل 9-3 (ج) يعرّف دالة من A إلى B؟

■ نعم، لأن كل عنصر في A يقرن به عنصر وحيد في B.

21.9 لتكن f مجموعة جزئية في $A \times B$. متى تعرِّف f دالة من A إلى B؟

■ تكون مجموعة جزئية f في $A \times B$ دالة $f: A \to B$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر $a \in A$ يظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط في f.

المسائل 22.9-24.9 تتعلق بالمجموعة $X = \{1,2,3,4\}$، والمجموعات الجزئية التالية في $X \times X$:

$$f = \{(2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4)\} \qquad g = \{(3,1), (4,2), (1,1)\}$$
$$h = \{(2,1), (3,4), (1,4), (2,1), (4,4)\}$$

22.9 هل تعرّف f دالة $f: X \to X$؟

■ لا. هناك زوجان مرتبان مختلفان (2,3) و (2,1) في f، لهما نفس الإحداثي الأول 2.

23.9 هل تعرّف g دالة $g: X \to X$؟

■ لا. يوجد عنصر $2 \in X$ لا يظهر كإحداثي أول في أي من الأزواج المرتبة.

24.9 هل تعرّف h دالة $h: X \to X$؟

■ نعم. رغم ظهور $2 \in X$ كإحداثي أول في زوجين مرتبين في h، فهما زوجان مرتبان.

25.9 لتكن A مجموعة الطلبة في مدرسة. حدّد أيًا من هذه الاقترانات تعرّف تطبيقاً على A:

(أ) يقرن لكل طالب عمره.

(ب) يقرن لكل طالب مدرّسة أو مدرّسته.

(ج) يقرن لكل طالب جنسه (ذكر أم أنثى).

(د) يقرن لكل طالب زوجه.

■ إن تجميعاً من الاقترانات يكون تطبيقاً على A إذا قرن بكل عنصر $a \in A$ عنصر واحد فقط. وبذلك،

(أ) نعم، لأن لكل طالب عمر واحد فقط.

(ب) نعم، إذا كان لكل طالب مدرّس واحد؛ لا، إذا كان لأي طالب أكثر من مدرس أو مدرّسة.

(ج) نعم.

(د) لا، فقد لا يكون بعض الطلبة متزوجين.

26.9 ليكن $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تطبيقاً يقرن بكل عدد حقيقي x مربعه x^2. صف طرقاً مختلفة لتعريف f.

■ يمكن أن يوصف التطبيق f بواسطة ما يلي:

$$f(x) = x^2 \quad \text{أو} \quad x \mapsto x^2 \quad \text{أو} \quad y = x^2$$

السهم $\mapsto$ يقرأ هنا «يذهب إلى». في الترميز الأخير (على اليسار)، x هو «المتغير المستقل» و y «المتغير المرتبط/ أو غير المستقل»، لأن قيمة y تعتمد (أو ترتبط بـ) بالقيمة التي يأخذها x.

ملاحظة: عندما تعطى دالة f بواسطة صيغة تستخدم المتغير المستقل x، كما هو مبيّن أعلاه، فإننا نفترض (إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك) بأن f دالة من $\mathbf{R}$ (أو من أكبر مجموعة حيث يكون لـ f معنىً). [أنظر القسم 2.9].

المسائل 27.9-30.9 تتعلق بالدالة المذكورة $f(x) = x^2$.

27.9 أوجد قيم f عند 5، -4، 0.

■ $f(5) = 5^2 = 25,\ f(-4) = (-4)^2 = 16,\ f(0) = 0^2 = 0$.

28.9 أوجد (أ) $f(y+2)$، (ب) $f(x+h)$

■ (أ) $f(y+2) = (y+2)^2 = y^2 + 4y + 4$، (ب) $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.

29.9 أوجد $[f(x+h) - f(x)]/h$.

■ $[f(x+h) - f(x)]/h = (x^2 + 2xh + h^2 - x^2)/h = (2xh + h^2)/h = 2x + h$.

30.9 أوجد $\operatorname{Im} f$، أي صورة f.

■ إن كل عدد حقيقي غير سالب هو مربع لـ $\sqrt{a}$ ، كما أن مربع أي عدد لا يمكن أن يكون سالباً، إذن، $\operatorname{Im} f = \{x : x \geqslant 0\}$، أي مجموعة كل الأعداد الحقيقية غير السالبة.

31.9 أوجد عدد الدوال من $X = \{a,b\}$ إلى $Y = \{1,2,3\}$.

■ هناك خيارات ثلاثة من أجل صورة a، وخيارات ثلاثة من أجل صورة b؛ وبالتالي، توجد $3.3 = 3^2 = 9$ دوال ممكنة من X إلى Y.

32.9 لنفترض أن لـ X عدد $|X|$ عنصر، ولـ Y عدد $|Y|$ عنصراً. بيّن أن هناك $|Y|^{|X|}$ دالة ممكنة من X إلى Y. [لهذا السبب، نكتب غالباً Y^X من أجل تجميع كل الدوال من X إلى Y].

■ هناك $|Y|$ خياراً من أجل صورة كل واحد من عناصر X الـ $|X|$؛ وبالتالي، يوجد لدينا عدد $|Y|^{|X|}$ دالة ممكنة من X إلى Y.

33.9 لتكن A أي مجموعة غير خالية. عرّف التطبيق المحايد على A.

■ المحايد على A، ويرمز له بـ 1_A، هو التطبيق المعرّف بواسطة $1_A(x) = x$ من أجل كل $x \in A$.

34.9 لتكن $A = \{1,2,3,\ldots,9\}$. أوجد $1_A(3)$، $1_A(6)$، $1_A(9)$.

■ إن صورة أي عنصر، تحت التطبيق المحايد، هي العنصر نفسه، وبذلك، $1_A(3) = 3$، $1_A(6) = 6$، $1_A(8) = 8$.

35.9 عرّف تطبيقاً ثابتاً.

■ لتكن f دالة نطاقها A. إذن، تكون f تطبيقاً ثابتاً إذا قرنت بكل $a \in A$، نفس العنصر.

36.9 أعطينا مجموعتين A و B. كم تطبيقاً ثابتاً يوجد من A إلى B؟

■ كل $b \in B$ تعرّف تطبيقاً ثابتاً $f(x) = b$، من أجل كل $a \in A$. وبالتالي، يوجد عدد $|B|$ من التطبيقات الثابتة، حيث ترمز $|B|$ إلى عدد العناصر في B.

37.9 لتكن S مجموعة جزئية في A ولتكن $f: A \to B$. عرّف تقييد (أو إقتصار) f إلى S.

■ يعرّف تقييد f إلى S بانه التطبيق $\hat{f}: S \to B$ المعرّف بواسطة $\hat{f}(s) = f(s)$ من أجل كل $s \in S$. ونكتب عادة $f|_s$ لنرمز إلى تقييد f إلى S.

38.9 لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرّفة بواسطة $f(x) = x^2$. ولنكن $\hat{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تقييد f إلى N، أي ليكن $\hat{f} = f|_{\mathbb{N}}$. أوجد $f(4)$، $f(-3)$، $f(1/2)$.

■ لدينا تعريفاً $\hat{f}(n) = f(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. وبذلك، $\hat{f}(4) = f(4) = 4^2 = 16$ ،
و $\hat{f}(-3) = f(-3) = (-3)^2 = 9$ ولكن $\hat{f}(\frac{1}{2})$ غير معرّفة، لأن 1/2 ليست في نطاق $\hat{f}$.

2.9 الدوال حقيقية ـ القيمة

يغطي هذا القسم الدوال حقيقية القيمة، أي الدوال f التي تطبق مجموعات إلى **R**. غالباً، يكون نطاق f هو **R** نفسه أو مجموعة جزئية في **R**، وبالتالي يمكن رسمها في المستوى الإحداثي $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$. يمكننا أيضاً استخدام الترميز التالي من أجل الفترات من a إلى b، حيث a و b عددان حقيقيان بحيث $a < b$:

$[a,b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$، تسمى الأولى بالفترة المغلقة من a إلى b

$[a,b) = \{x: a \leqslant x < b\}$، والثانية بالفترة نصف ـ المفتوحة من a إلى b

$(a,b] = \{x: a < x \leqslant b\}$، والثالثة بالفترة نصف المفتوحة من a إلى b

$(a,b) = \{x: a < x < b\}$، والأخيرة بالفترة المفتوحة من a إلى b.

39.9 ما هو النطاق D لدالة حقيقية ـ القيمة $f(x)$ [حيث x متغير حقيقي] عندما تعطى $f(x)$ بواسطة صيغة ما؟

■ يتكون D من أوسع مجموعة جزئية في **R** يكون فيها لـ $f(x)$ معنى وتكون حقيقية، إلا إذا ذكر غير ذلك.

40.9 أوجد النطاق D للدالة $f(x) = 1/(x-2)$.

■ f غير معرّف من أجل $x - 2 = 0$، أي عندما $x = 2$؛ وبالتالي، $D = \mathbf{R} \backslash \{2\}$.

41.9 أوجد النطاق D للدالة $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

■ g معرّفة من أجل كل عدد حقيقي، إذن، $D = \mathbf{R}$.

42.9 أوجد النطاق D للدالة $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

■ h ليست معرّفة من أجل $25 - x^2$ سالبة؛ وبالتالي، $D = [-5,5] = \{x: -5 \leqslant x \leqslant 5\}$.

43.9 أوجد النطاق D للدالة $f(x) = x^2$، حيث $0 \leqslant x \leqslant 2$.

■ رغم أن للصيغة من أجل f معنىً من أجل كل عدد حقيقي، إلاّ أن نطاق f يُعْطَى صراحة على أنّه $D = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.
المسائل 44.9-49.9 تتعلق بالدوال التالية من **R** إلى **R**:

(i) كل عدد تقرن به f مكعبه.

(ii) كل عدد تقرن به g العدد 5.

(iii) لكل عدد موجب تقرن به h مربعه، وبكل عدد غير موجب تقرن به h العدد 6.

44.9 استخدم صيغة لتعريف f.

■ بما أن f تقرن بأي عدد x مكعبه x^3، فإنه يمكننا تعريف f بواسطة $f(x) = x^3$.

45.9 أوجد قيم f عند 4، -2 ، 0.

■ $f(4) = 4^3 = 64$، $f(-2) = (-2)^3 = -8$، $f(0) = 0^3 = 0$.

46.9 استخدم صيغةً لتعريف g.

■ بما أن g تقرن العدد 5 بأي عدد x، فإنه يمكننا تعريف g بواسطة $g(x) = 5$.

47.9 أوجد صوَر 4، -2 ، 0 تحت g.

■ إن صورة كل عدد هي 5، وبذلك $g(4) = 5$، $g(-2) = 5$، $g(0) = 5$.

48.9 استخدم صيغةً لتعريف h.

■ نستخدم قاعدتين مختلفتين لتعريف h، كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{إذا } x > 0 \\ 6 & \text{إذا } x \leqslant 0 \end{cases}$$

49.9 أوجد $h(4)$، $h(-2)$، $h(0)$.

■ بما أن $0 < 4$، إذن $h(4) = 4^2 = 16$. من جهة أخرى، $-2, 0 \leqslant 0$ إذن $h(-2) = 6$، $h(0) = 6$.

المسائل 50.9-54.9 تتعلق بالدالة $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ المعرّفة بواسطة $f(x) = x^3$.

50.9 أوجد $f(3)$ و $f(-5)$.

■ $f(3) = 3^3 = 27$، $f(-5) = (-5)^3 = -125$.

51.9 أوجد $f(y)$ و $f(y + 1)$.

■ $f(y) = (y)^3 = y^3$، $f(y + 1) = (y + 1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$.

52.9 أوجد $f(x + h)$.

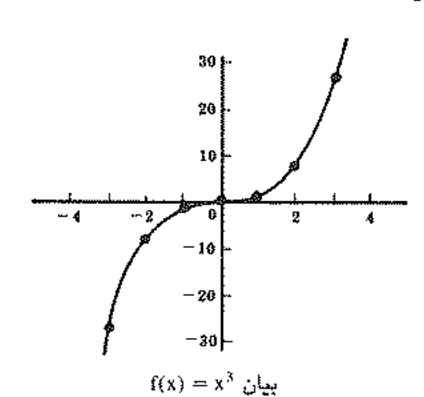
■ $f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

53.9 أوجد $[f(x + h) - f(x)]/h$.

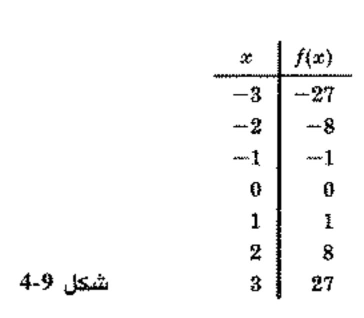
■ $[f(x + h) - f(x)]/h = (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3)/h = (3x^2h + 3xh^2 + h^3)/h = 3x^2 + 3xh + h^2$.

54.9 أرسم بيان f.

■ بما أن f دالة حدودية، فإنه يمكن رسمها بأن نعين أولاً بعض النقط في بيانها ثم نرسم منحنى مصقولاً عبر هذه النقط كما في شكل 4-9.



بيان $f(x) = x^3$



x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

شكل 4-9

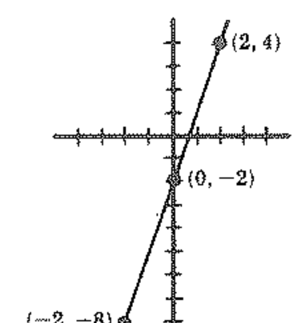
55.9 ارسم بيان $f(x) = 3x - 2$.

■ بما أن f خطية، فإننا نحتاج إلى نقطتين فقط (وثالثة للتحقيق) لرسم بيانها. ضع جدولاً بثلاث قيم لـ x، مثلاً $x = -2, 0, 2$، وأوجد القيم المقابلة لها لـ $f(x)$:

$f(-2) = 3(-2) - 2 = -8 \qquad f(0) = 3(0) - 2 = -2 \qquad f(2) = 3(2) - 2 = 4$

أرسم مستقيماً يمر بهذه النقط كما في الشكل 9-5.

x	$f(x)$
−2	−8
0	−2
2	4



بيان f

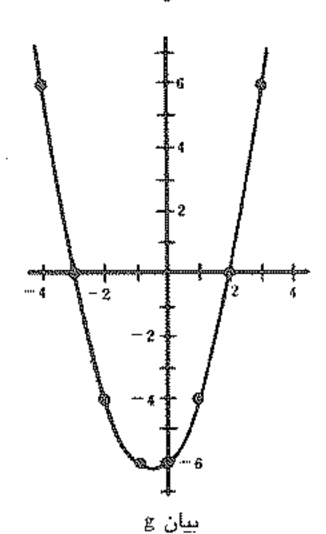
شكل 9-5

المسائل 56.9-58.9 تتعلق بالدالة $g(x) = x^2 + x - 6$.

56.9 أرسم بيان g.

▩ ضع جدولاً لقيم من أجل x، ثم أوجد القيم المقابلة لها للدالة. ثم عين مواقع النقط على مخطط إحداثي، وارسم منحنى مستمراً مصقولاً عبر هذه النقط كما في الشكل 9-6.

x	$g(x)$
−4	6
−3	0
−2	−4
−1	−6
0	−6
1	−4
2	0
3	6



بيان g

شكل 9-6

57.9 أوجد $g^{-1}(14)$.

▩ نضع $g(x) = 14$، ثم نحل من أجل x:

$$x^2+x-6=14 \quad \text{أو} \quad x^2 + x - 20 = 0 \quad \text{أو} \quad (x+5)(x-4) = 0$$

إذن، $x = -5$ و $x = 4$. بمعنى آخر، $g^{-1}(-4) = -5,4$.

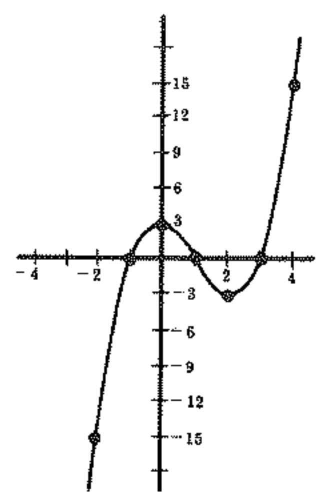
58.9 أوجد $g^{-1}(-8)$.

▩ نضع $g(x) = -8$ ثم نحل من أجل x: $x^2 + x - 6 = -8$ أو $x^2 + x + 2 = 0$. نستخدم الصيغة التربيعية، والتي مميزها $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.2 = -7$ أي سالب القيمة، وبالتالي لا توجد حلول حقيقية. إذن، $g^{-1}(-8) = \emptyset$ أي المجموعة الخالية.

59.9 أرسم بيان $h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

■ أرسم منحنى مستمراً مصقولاً يمر ببعض نقط بيان h كما في الشكل 9-7.

x	$h(x)$
−2	−15
−1	0
0	3
1	0
2	−3
3	0
4	15



بيان h

شكل 9-7

60.9 لتكن f كمجموعة جزئية في $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. أذكر شرطاً هندسياً لكي تكون f دالة من **R** إلى **R**.

■ يكون بيان f دالة من **R** إلى **R** إذا كان كل خط رأسي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط.

المسائل 61.9-66.9 تتعلق بالشكل 9-8.

61.9 هل شكل 9-8 (أ) يعرّف دالة من **R** إلى **R**؟

■ نعم، لأن كل خط رأسي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط.

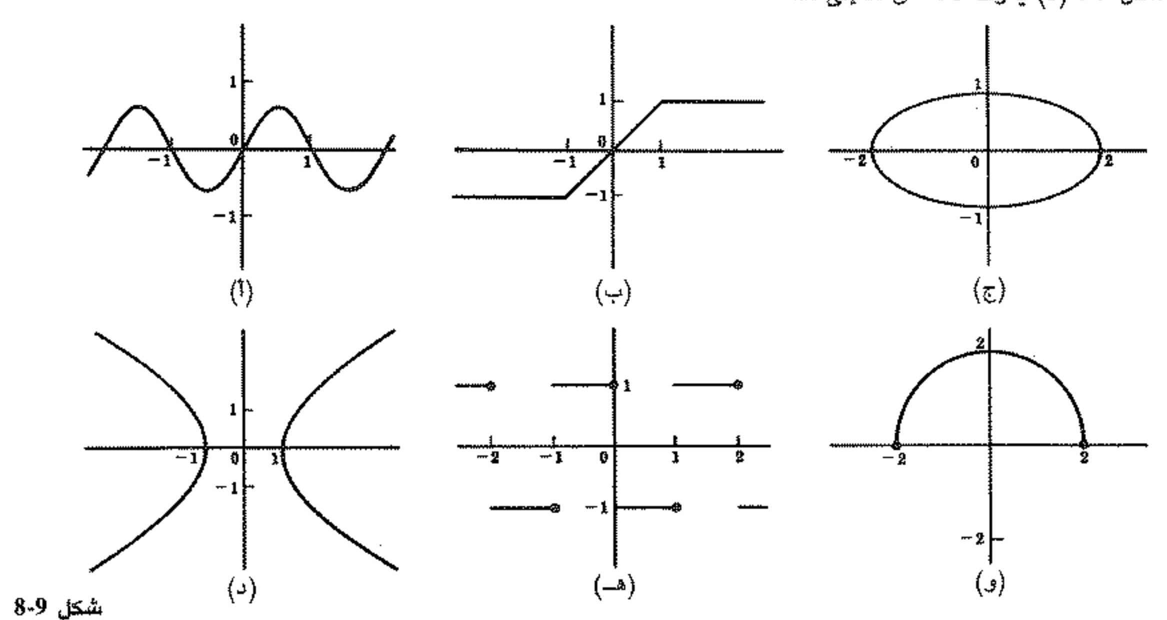
62.9 هل شكل 9-8 (ب) يعرّف دالة من **R** إلى **R**؟

■ نعم، لأن كل خط رأسي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط.

63.9 هل شكل 9-8 (ج) يعرّف دالة من **R** إلى **R**؟

■ لا، لأن بعض الخطوط الرأسية تقطع البيان في أكثر من نقطة واحدة.

64.9 هل شكل 9-8 (د) يعرّف دالة من **R** إلى **R**؟



شكل 9-8

■ لا، لأن بعض الخطوط الرأسية تقطع البيان في أكثر من نقطة واحدة، أو لا تقطعه على الإطلاق.

65.9 هل شكل 9-8 (هـ) يعرّف دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$؟

■ نعم، لأن كل خط رأسي يقطع البيان في نقطة واحدة فقط.

66.9 هل شكل 8.9 (و) يعرّف دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$؟

■ لا؛ ولكن البيان يعرّف دالة من D إلى $\mathbb{R}$ حيث $D = \{x: -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

3.9 التطبيقات متجهية القيمة

ينظر هذا القسم في تطبيقات من فضاء متجهي V إلى فضاء متجهي آخر V'. [بعض الحالات الخاصة لمثل هذه التطبيقات، وتعرف بـ «التطبيقات الخطية» (فصل 10)، تشكل الموضوع الرئيسي للجبر الخطي]

المسائل 67.9-72.9 تتعلق بالتطبيقات $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرّفة بواسطة $F(x,y,z) = (yz, x^2)$.

67.9 أوجد $F(2,3,4)$.

■ نعوض في المعادلة من أجل F فنحصل على: $F(2,3,4) = (3{,}4{,}2^2) = (12{,}4)$.

68.9 أوجد $F(5,-2,7)$.

■ $F(5,-2,7) = (-2.7, 5^2) = (-14, 25)$.

69.9 أوجد $F(3,-5)$.

■ إن نطاق F ليس $\mathbb{R}^2$، وبذلك لا تكون $F(3,-5)$ معرّفة.

70.9 أوجد $F(a,a,a)$.

■ $F(a,a,a) = (a.a, a^2) = (a^2, a^2)$.

71.9 ليكن S المستقيم $x = y = z$ في $\mathbb{R}^3$. أوجد $F(S)$.

■ نستخدم المسألة 70.9 فنحصل على $F(S) = \{(a^2,a^2): a \in \mathbb{R}\} = \{(b,b): b \geqslant 0\}$.

72.9 أوجد كل المتجهات $v \in \mathbb{R}^3$ التي تحقق $F(v) = 0$، أي أوجد $F^{-1}(0,0)$.

■ نضع $F(v) = 0$ حيث $v = (x,y,z)$ ثم نحل من أجل x، y، z.

$$F(x,y,z) = (yz, x^2) = (0,0) \quad \text{أو} \quad yz = 0 \quad \text{و} \quad x^2 = 0$$

وبذلك، تكون $x = 0$، وإمّا $y = 0$ أو $z = 0$. بمعنى آخر، $x = 0$ و $y = 0$، أو $x = 0$ و $z = 0$. ينتج عن ذلك أن v يقع على محور -z أو محور -y.

المسائل 73.9-78.9 تتعلق بالتطبيق $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة:

$$G(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 3y + z)$$

73.9 أوجد $G(4,5,-2)$.

■ $G(4,5,-2) = (4 + 10 + 8, 8 + 15 - 2) = (22, 21)$.

74.9 أوجد $G(1,-5,3)$.

■ $G(1,-5,3) = (1 - 10 - 12, 2 - 15 + 3) = (-21, -10)$.

75.9 أوجد $G(0)$ [حيث $0 = (0,0,0)$].

■ $G(0) = G(0,0,0) = (0+0+0,0+0+0) = (0,0) = 0$.

76.9 أوجد $G(a,a,a)$.

■ $G(a,a,a) = (a+2a-4a,2a+3a+a) = (-a,6a)$.

77.9 أوجد $G(14,-9,-1)$.

■ $G(14,-9,-1) = (14-18+4,28-27-1) = (0,0)$.

78.9 أوجد $G^{-1}(3,4)$.

■ نضع $G(x,y,z) = (3,4)$، فنحصل على المنظومة:

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=3 \\ 2x+3y+z&=4 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x+2y-4z&=3 \\ -y+9z&=-2 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x+2y-4z&=3 \\ y-9z&=2 \end{aligned}$$

هنا، z متغير حرّ. نضع $z = a$ فنحصل على الحل العام:

$$z = a \qquad y = 9a+2 \qquad x = -14a-1$$

بمعنى آخر، $G^{-1}(3,4) = \{(-14a-1,9a+2,a)\}$، حيث $a \in \mathbf{R}$.

المسائل 79.9-84.9 تتعلق بالتطبيق $H: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $H(t) = (2t,t^2,3t+5)$. [يسمى مثل هذا التطبيق من $\mathbf{R}$ إلى $\mathbf{R}^n$ بـ «منحنى» في $\mathbf{R}^n$. ويمثل هذا المنحنى أحياناً في الشكل $x = 2t$، $y = t^2$، $z = 3t+5$].

79.9 أوجد $H(0)$.

■ $H(0) = (0,0^2,0+5) = (0,0,5)$.

80.9 أوجد $H(2)$.

■ $H(2) = (4,4,6+5) = (4,4,11)$.

81.9 أوجد $H(1,2,3)$.

■ إن نطاق H هو $\mathbf{R}$، وبذلك لا تكون $H(1,2,3)$ معرّفة.

82.9 أوجد $H^{-1}(8)$.

■ إن النطاق ـ المصاحب لـ H هو $\mathbf{R}^3$، وبذلك لا تكون $H^{-1}(8)$ معرّفة.

83.9 أوجد $H^{-1}(v)$ حيث $v = (6,9,14)$.

■ نضع $H(t) = v$ ثم نحل من أجل t:

$$(2t,t^2,3t+5) = (6,9,14) \quad \text{أو} \quad 2t = 6, \quad t^2 = 9, \quad 3t+5 = 14$$

يعطينا هذا $t = 3$. وبذلك، $H^{-1}(v) = 3$.

84.9 أوجد $H^{-1}(v)$ حيث $v = (8,4,20)$.

■ نضع $H(t) = v$ ثم نحل من أجل t:

$$(2t,t^2,3t+5) = (8,4,20) \quad \text{أو} \quad 2t = 8, \quad t^2 = 4, \quad 3t+5 = 20$$

لا توجد قيمة واحدة لـ t تكون حلاً للمعادلات الثلاث معاً. وبذلك، $H^{-1}(v) = \emptyset$ أي المجموعة الخالية.

المسائل 85.9-88.9 تتعلق بالتطبيق $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $F(x,y) = (3y,2x)$.

85.9 أوجد $F(4,-5)$.

■ $F(4,-5) = (3.(-5),2.4) = (-15,8)$.

86.9 أوجد $F^{-1}(6,-8)^{-8}$.

■ نضع $F(x,y) = (6,-8)$ ثم نحل من أجل x و y:

$(3y,2x) = (6,-8)$ أو $3y = 6$، $2x = -8$ أو $y = 2$، $x = -4$

وبالتالي، $F^{-1}(6,-8) = (-4,2)$.

87.9 لتكن S دائرة الوحدة في $\mathbf{R}^2$، أي مجموعة الحل لـ $x^2 + y^2 = 1$. صف $F(S)$.

■ ليكن (a,b) عنصراً في $F(S)$. إذن، توجد $(x,y) \in S$ بحيث أن $F(x,y) = (a,b)$. وبالتالي،

$$(3y, 2x) = (a, b) \quad \text{أو} \quad 3y = a \ ، \ 2x = b \quad \text{أو} \quad y = \frac{a}{3} \ ، \ x = \frac{b}{2}$$

بما أن $(x,y) \in S$، أي أن $x^2 + y^2 = 1$، فيكون لدينا

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4} = 1$$

أي أن $F(S)$ قطع ناقص (إهليلج).

88.9 أوجد $F^{-1}(S)$ حيث S دائرة الوحدة في $\mathbf{R}^2$.

■ لتكن $F(x,y) = (a,b)$ حيث $(a,b) \in S$. إذن $(3y,2x) = (a,b)$ أو $3y = a$، $2x = b$. بما أن $(a,b) \in S$، يكون لدينا $a^2 + b^2 = 1$. إذن، $(3y)^2 + (2x)^2 = 1$. ينتج عن ذلك أن $F^{-1}(S)$ هو القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 1$.

المسألتان 89.9-90.9 تتعلقان بالمصفوفة 2×3: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

89.9 إذا نظرنا إلى المتجهات في $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ كمتجهات صفية، فإن A تعرّف تطبيقاً $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $f(v) = vA$. أوجد $f(v)$ حيث $v = (2,-3)$.

■ $$f(v) = vA = (2,-3)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = (2-6, -6-12, 10+3) = (-4, -18, 13)$$

90.9 إذا نظرنا إلى المتجهات في $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ على أنها متجهات أعمدة، فإن A تحدّد تطبيقاً $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $g(v) = Av$. أوجد $g(v)$ حيث $v = (3,1,-2)$. [للسهولة الترميزية، تكتب المتجهات الأعمدة غالباً في شكل صفوف.]

■ $$g(v) = Av = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تشير المسألتان 89.9 و 90.9 إلى أن أي مصفوفة A، $m \times n$، فوق حقل K يمكن النظر إليها على أنها تطبيق من K^m إلى K^n أو تطبيق من K^n إلى K^m وفقاً لاعتبار المتجهات صفوفاً أو أعمدة. سنفترض، إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك، بأن A تطبيق من K^m إلى K^n كما في المسألة 90.9، وينظر بذلك إلى المتجهات على أنها أعمدة وليست صفوفاً. بالإضافة إلى ذلك، سوف نرمز للتطبيق بـ A، أي الرمز نفسه المستخدم من أجل المصفوفة.

المسألتان 91.9-92.9 تتعلقان بالمصفوفة الحقيقية $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

91.9 أوجد $B(v)$ حيث $v = (3,-2)$.

■ بما أننا ننظر إلى v على أنه متجه عمودي، إذن

$$B(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 12-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

أي أن، $B(v) = (-1,6)$.

92.9 أوجد $B^{-1}(w)$ حيث $w = (-3,8)$.

■ نضع $B(v) = w$ حيث $v = (x,y)$ ثم نحل من أجل x و y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} x+2y=-3 \\ 4x+3y=8 \end{matrix}$$

ويكون حل المنظومة $x = 5$، $y = -4$. وبذلك، $B^{-1}(w) = (5,-4)$.

ملاحظة: ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات في المتغير t فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$. إذن، يعرّف المشتق تطبيقاً $D: V \to V$ حيث نضع $D(f) = df/dt$، من أجل كل حدودية $f \in V$.

المسائل 93.9-96.9 تتعلق بالتطبيق المشتق أعلاه $D: V \to V$ حيث V الفضاء المتجهي للحدوديات الحقيقية في المتغير t.

93.9 أوجد $D(3t^2 - 5t + 2)$.

■ نأخذ المشتق: $D(3t^2 - 5t + 2) = 6t - 5$.

94.9 أوجد $D(at^3 + bt^2 + ct + d)$.

■ نأخذ المشتق $D(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c$.

95.9 أوجد $D^{-1}(g)$ حيث $g(t) = 6t^2 + 8t - 5$.

■ نأخذ مقابل ـ المشتق (التكامل) لـ g فنحصل على $D^{-1}(g) = 2t^3 + 4t^2 - 5t + C$ حيث C ثابت المكاملة.

96.9 أوجد صورة D، أي $\text{Im } D$.

■ إن كل حدودية $g \in V$ هي مشتق حدودية؛ وبالتالي، $\text{Im } D = V$.

ملاحظة: ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات في t فوق $\mathbf{R}$. إذن، التكامل (من 0 إلى 1 مثلاً) يعرّف تطبيقاً $I: V \to \mathbf{R}$ حيث وضعنا $I(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$ ، من أجل كل حدودية $f \in V$.

المسألتان 97.9-98.9 تتعلقان بالتطبيق التكامل أعلاه $I: V \to \mathbf{R}$.

97.9 أوجد $I(f)$ حيث $f(t) = 3t^2 - 5t + 2$.

■ $I(f) = \int_0^1 (3t^2 - 5t + 2)\, dt = \frac{1}{2}$

98.9 أوجد $I(g)$ حيث $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.

■ $I(g) = \int_0^1 (at^3 + bt^2 + ct + d)\, dt = a/4 + b/3 + c/2 + d$

4.9 تركيب التطبيقات

99.9 ليكن التطبيقان $f: A \to B$ و $g: B \to C$. عرّف تطبيق التركيب لـ f و g.

■ ليكن $a \in A$؛ إذن $f(a) \in B$، حيث B نطاق g. يمكننا إذن الحصول على صورة $f(a)$ تحت التطبيق g؛ أي، يمكننا الحصول على $g(f(a))$. إن هذا التطبيق من A إلى C يسمى «تركيب» أو «جداء» f و g، ويرمز له بـ $g^\circ f$. بمعنى آخر، $(g \circ f): A \to C$ هو التطبيق المعرّف بواسطة $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

ملاحظة: ليكن $F: A \to B$. بعض النصوص تكتب aF بدلاً من F(a) من أجل صورة $a \in A$. باستخدام هذا الترميز، يرمز لتركيب الدالتين $F: A \to B$ و $G: B \to C$ بواسطة $F^\circ G$ وليس بـ $G^\circ F$ كما في هذا النص.

المسائل 100.9-103.9 تتعلق بالتطبيق $f: A \to B$ و $g: B \to C$ المعرّفتين بالشكل 9-9.

A f B g C
a b c x y z r s t

شكل 9-9

100.9 أوجد تطبيق التركيب $(g \circ f): A \to C$.

■ نستخدم تعريف تطبيق التركيب لحساب

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

لاحظ أننا سوف نصل إلى نفس الجواب إذا «إتبعنا الأسهم» في المخطّط:

$$a \to y \to t, \qquad b \to x \to s, \qquad c \to y \to t$$

101.9 أوجد صورتي f و g.

■ باستخدام المخطّط، نجد أن القيم ـ الصورة تحت التطبيق f هي x و y، والقيم ـ الصورة تحت g هي r، s، t؛ إذن، $\text{Im } f = \{x,y\}$ و $\text{Im } g = \{r,s,t\}$.

102.9 أوجد صور تطبيق التركيب $g^\circ f$.

■ نجد، من المسألة 100.9، أن القيم ـ الصورة تحت تطبيق التركيب $g^\circ f$ هي t و s؛ وبالتالي، $\text{Im } g^\circ f = \{s,t\}$. نلاحظ أن صورتي g و $g^\circ f$ مختلفتان.

103.9 أوجد تطبيق التركيب $f^\circ g$.

■ إن التركيب $f^\circ g$ ليس معرّفاً لأن نطاق f ليس النطاق ـ المصاحب لـ g.

المسائل 104.9-110.9 تتعلق بالتطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفين بواسطة $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2$.

104.9 أوجد: (أ) $(g^\circ f)(4)$ و (ب) $(f^\circ g)(4)$.

■ (أ) $f(4) = 2.4 + 1 = 9$ إذن $(g^\circ f)(4) = f(f(4)) = g(9) = 9^2 - 2 = 79$. (ب) $g(4) = 4^2 - 2 = 14$ إذن $(f^\circ g)(4) = f(g(4)) = f(14) = 2.14 + 1 = 29$. [لاحظ أن $f^\circ g \neq g^\circ f$ لانهما مختلفان عند $x = 4$].

105.9 أوجد $(g^\circ f)(a + 2)$.

■ $f(a + 2) = 2(a + 2) + 1 = 2a + 5$ إذن

$$(g \circ f)(a+2) = g(f(a+2)) = g(2a+5) = (2a+5)^2 - 2 = 4a^2 + 20a + 23$$

106.9 أوجد $(f^\circ g)(a+2)$.

■ $g(a + 2) = (a + 2)^2 - 2 = a^2 + 4a + 2$ إذن

$$(f \circ g)(a+2) = f(g(a+2)) = f(a^2 + 4a + 2) = 2(a^2 + 4a + 2) + 1 = 2a^2 + 8a + 5$$

107.9 أوجد صيغة للتطبيق $g^\circ f$.

■ نحسب الصيغة من أجل $g^\circ f$ كما يلي:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1$$

لاحظ أنه يمكن الحصول على الإجابة نفسها بكتابة $y=f(x)=2x+1$ و $z=g(y)=y^2-2$، ثم بحذف $y: z=y^2-2=(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1$.

108.9 أوجد صيغة من أجل التطبيق $f\circ g$.

■ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=2(x^2-2)+1=2x^2-3$.

109.9 أوجد صيغة من أجل التطبيق $f\circ f$ [والذي يرمز له أحياناً بـ f^2].

■ $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$.

110.9 أوجد صيغة من أجل التطبيق $g\circ g$.

■ $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-2)=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2$.

111.9 ليكن التطبيق الإختياري $f: A\to B$. متى يكون $f\circ f$ معرّفاً؟

■ يكون التطبيق $f\circ f$ معرّفاً عندما يكون نطاق f مساوٍ لنطاقه ـ المصاحب؛ أي عندما $A=B$.

المسائل 112.9-118.9 تتعلق بالتطبيق $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ و $g: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ المعرّفين بواسطة $f(x,y)=(x^2+1, x+y)$ و $g(x,y)=2x+3y$.

112.9 أوجد: (أ) $f(1,4)$، (ب) $g(1,4)$.

■ (أ) $f(1,4)=(1^2+1, 1+4)=(2,5)$. (ب) $g(1,4)=2.1+3.4=2+12=14$. [لاحظ أن صورة متجه تحت f تكون متجهاً في $\mathbf{R}^2$، في حين أن صورة متجه تحت g تكون عنصراً في $\mathbf{R}$].

113.9 أوجد $(g\circ f)(2,3)$.

■ نحسب أولاً $f(2,3)=(2^2+1, 2+3)=(5,5)$، ثم

$$(g\circ f)(2,3)=g(f(2,3))=g(5,5)=2\cdot 5+3\cdot 5=25$$

114.9 أوجد $(f\circ g)(2,3)$.

■ التركيب $f\circ g$ ليس معرّفاً لأن النطاق ـ المصاحب $\mathbf{R}$ لـ g ليس نطاقاً لـ g إذن $(f\circ g)(2,3)$ غير موجود.

115.9 أوجد $(f\circ f)(3,1)$.

■ نحسب أولاً $f(3,1)=(3^2+1, 3+1)=(10,4)$. ثم نحسب $f(f(3,1))=f(10,4)=(10^2+1, 10+4)=(101,14)$.
إذن $(f\circ f)(3,1)=(101,14)$.

116.9 أوجد $(g\circ g)(3,1)$.

■ إن التركيب $g\circ g$ غير معرّف لأنّ النطاق المصاحب $\mathbf{R}$ لـ g ليس نطاقاً لـ g.

117.9 أوجد $(f\circ f\circ f)(v)$ [أو $f^3(v)$] حيث $v=(2,5)$.

■ نحسب أولاً $f(v)=f(2,5)=(2^2+1, 2+5)=(5,7)$، ثم نحسب $f(f(v))=f(5,7)=(5^2+1, 5+7)=(26,12)$.
ونحسب أخيراً $f(f(f(v)))=f(26,12)=(26^2+1, 26+12)=(677,38)$. إذن، $f^3(v)=(677,38)$.

118.9 أوجد صيغة من أجل $f\circ f$.

■
$$\begin{aligned}(f\circ f)(x,y)&=f(f(x,y))=f(x^2+1, x+y)=[(x^2+1)^2+1, (x^2+1)+(x+y)]\\&=(x^4+2x^2+2, x^2+x+1+y).\end{aligned}$$

119.9 بيّن أن $1_B \circ f = f$ من أجل أي تطبيق $f: A \to B$ [هنا، $1_B: B \to B$ هو التطبيق المحايد على B، أي أن $1_B(b) = b$ من أجل كل $b \in B$].

■ $(1_B \circ f)(a) = 1_B(f(a)) = f(a)$، من أجل كل $a \in A$. إذن، $1_B \circ f = f$.

120.9 بيّن أن $f \circ 1_A = f$ من أجل أي تطبيق $f: A \to B$. (هنا، $1_A: A \to A$ هو التطبيق المحايد على A).

■ $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$، من أجل كل $a \in A$. إذن، $f \circ 1_B = f$.

مبرهنة 1.9: ليكن $f: A \to B$، $g: B \to C$، و $h: C \to D$. إذن $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

121.9 اثبت مبرهنة 1.9 والتي تقضي بأن تطبيقات التركيب تحقق قانون التجميع.

■ ليكن أي عنصر $a \in A$. إذن

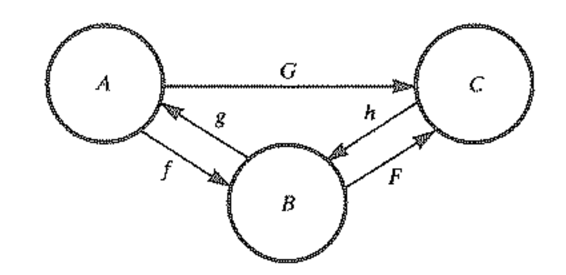
$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

وبذلك، $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$ من أجل كل $a \in A$. إذن، $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

122.9 عرّف مخطط تطبيقات.

■ يطلق على مخطط موجه، تمثل رؤوسه المجموعات، وحوافه التطبيقات بين المجموعات، اسم «مخطط تطبيقات».

المسائل 123.9-126.9 تتعلق بالتطبيقات $f: A \to B$، $g: B \to A$، $h: C \to B$، $F: B \to C$، و $G: A \to C$ المصورة في مخطط التطبيقات بالشكل 9-10.



شكل 9-10

123.9 هل التطبيق $g^\circ f$ معرّف؟ إذا كان الأمر كذلك، فما هو نطاقه ونطاقه ـ المصاحب؟

■ بما أن f يذهب من A إلى B، و g يذهب من B إلى A، فإن $g^\circ f$ معرّف وتكون A نطاقه ونطاقه ـ المصاحب.

124.9 هل $h^\circ f$ معرّف؟ وإذا كان كذلك، فما هو نطاقه ونطاقه المصاحب؟

■ لاحظ أن h لا «يتبع» f في المخطط، أي أن النطاق ـ المصاحب B لـ f ليس نطاقاً لـ h. وبالتالي، لا يكون $h^\circ f$ معرّفاً.

125.9 هل $F^\circ h^\circ G$ معرّف؟ إذا كان الأمر كذلك، فما هو نطاقه ونطاقه ـ المصاحب؟

■ إن الأسهم الممثلة لـ G,h,F يتبع كل منها الآخر في المخطط وتذهب من A إلى C إلى B إلى C. وبذلك، يكون $F^\circ h^\circ G$ معرّفاً بنطاق A ونطاق ـ مصاحب C. [نؤكد هنا أن التطبيقات «تقرأ» من اليمين إلى اليسار].

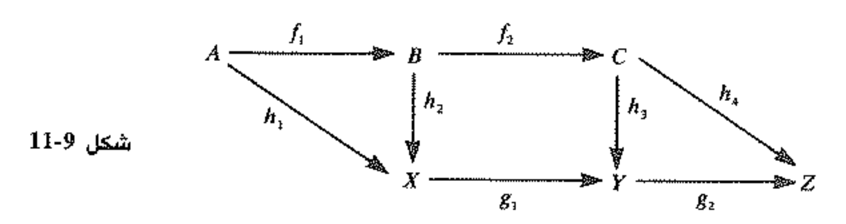
126.9 هل $G^\circ F^\circ h$ معرّف؟ إذا كان الأمر كذلك، فما هو نطاقه ونطاقه ـ المصاحب؟

■ F يتبع h في المخطط، ولكن G لا تتبع F، أي أن النطاق ـ المصاحب C لـ F ليس هو نطاق G. وبالتالي، لا يكون $G^\circ F^\circ h$ معرّفاً.

127.9 عرّف مخطط تطبيقات تبديلياً.

■ يكون مخطط تطبيقات تبديلياً إذا تساوى أي مسارين لهما نفس الرأسين الابتدائي والنهائي.

المسائل 128.9-132.9 تتعلق بمخطط التطبيقات التبديلي في الشكل 11-9.



شكل 11-9

128.9 مثل $h_2 \circ f_1$ بتطبيق واحد.

■ إن تطبيق التركيب $h_2 \circ f_1$ يذهب من A إلى B إلى X. بما أن المخطط تبديلي، إذن $h_2 \circ f_1 = h_1$.

129.9 مثِّل $h_3 \circ f_2$ بكل الطرق الممكنة.

■ التطبيق $h_3 \circ f_2$ يذهب من B إلى C إلى Y. إذن، المسار الآخر الوحيد من B إلى Y هو $g_1 \circ h_2$.

130.9 مثِّل التطبيق $g_2 \circ h_3$ بتطبيق واحد.

■ التطبيق $g_2 \circ h_3$ يذهب من C إلى Y إلى Z. التطبيق h_4 يذهب من C إلى Z. بما أن المخطط تبديلي، إذن $g_2 \circ h_3 = h_4$.

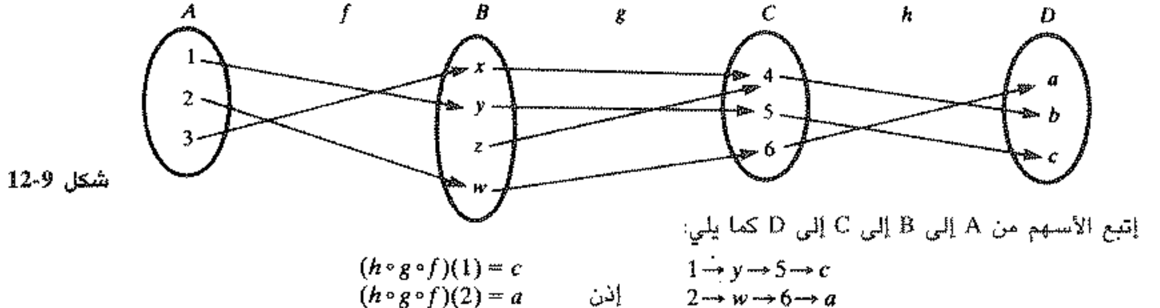
131.9 مثِّل التطبيق $g_1 \circ h_3$ بتطبيق واحد.

■ التطبيق $g_1 \circ h_3$ ليس معرّفاً، لأن النطاق المصاحب Y لـ h_3 ليس نطاقاً لـ g_1.

132.9 مثِّل التطبيق $g_2 \circ h_3 \circ f_2 \circ f_1$ بكل الطرق الممكنة.

■ التطبيق $g_2 \circ h_3 \circ f_2 \circ f_1$ يذهب من A إلى B إلى C إلى Y إلى Z. هناك ثلاثة مسارات أخرى من A إلى Z:
(i) $g_2 \circ g_1 \circ h_1$ ، (ii) $g_2 \circ g_1 \circ h_2 \circ f_1$ ، (iii) $h_4 \circ f_2 \circ f_1$.

133.9 الشكل 12-9 يعرّف التطبيقات $f: A \to B$ ، $g: B \to C$ ، و $h: C \to D$. أوجد تطبيق التركيب $h \circ g \circ f$.



شكل 12-9

■ إتبع الأسهم من A إلى B إلى C إلى D كما يلي:

$1 \to y \to 5 \to c$ $(h \circ g \circ f)(1) = c$
$2 \to w \to 6 \to a$ إذن $(h \circ g \circ f)(2) = a$
$3 \to x \to 4 \to b$ $(h \circ g \circ f)(3) = b$

5.9 تطبيقات واحد ـ لواحد، فوقية، عكوسة

134.9 عرِّف تطبيقاً واحد ـ لواحد أو تطبيقاً متبايناً.

■ نقول عن تطبيق $f: A \to B$ أنه واحد ـ لواحد (أو 1 ـ 1) أو متباين إذا كان للعناصر المختلفة في A صور مختلفة؛ أي إذا $a \neq a'$ يقتضي $f(a) \neq f(a')$، أو بشكل مكافىء، إذا $f(a) = f(a')$ يقتضي $a = a'$.

135.9 عرِّف تطبيقاً فوقياً أو غامراً.

■ نقول عن تطبيق $f: A \to B$ انه فوقي (أو أن f يطبق A فوق B) أو غامراً إذا كان كل $b \in B$ صورة لعنصر $a \in A$ واحد على الأقل.

136.9 عرِّف تقابلاً واحداً ـ لواحد أو تطبيقاً تقابلياً.

■ نقول عن تطبيق $f: A \to B$ أنه تقابل واحد ـ لواحد بين A و B أو تطبيقاً تقابلياً إذا كان f واحداً ـ لواحد وفوقياً في أن معاً.

المسائل 137.9-145.9 تتعلق بالتطبيقات $f: A \to B$، $g: B \to C$، و $h: C \to D$ في الشكل 12-9.

137.9 هل f واحد ـ لواحد؟

■ نعم، لأن صور 1,2,3 مختلفة.

138.9 هل f تطبيق فوقي؟

■ لا، لأن z ليس قبل ـ صورة تحت f.

139.9 هل f تقابل واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن f ليست تطبيقاً فوقياً.

140.9 هل g واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن x و z لهما نفس الصورة 4.

141.9 هل g تطبيق فوقي؟

■ نعم، لأن لكل عنصر في C قبل ـ صورة.

142.9 هل g تقابل واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن g ليس واحداً ـ لواحد.

143.9 هل h واحد ـ لواحد؟

■ نعم، لأن 4، 5، 6 لهم صور مختلفة.

144.9 هل h تطبيق فوقي؟

■ نعم، لأن العناصر a، b، c لها قبل ـ صور.

145.9 هل h تقابل واحد ـ لواحد؟

■ نعم، لأن h واحد ـ لواحد وفوقية.

146.9 أذكر شرطاً هندسياً لكي تكون دالة $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ واحداً ـ لواحد.

■ تكون $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ واحداً ـ لواحد إذا لم يكن هناك أي خط أفقي يحتوي أكثر من نقطة واحدة لـ f.

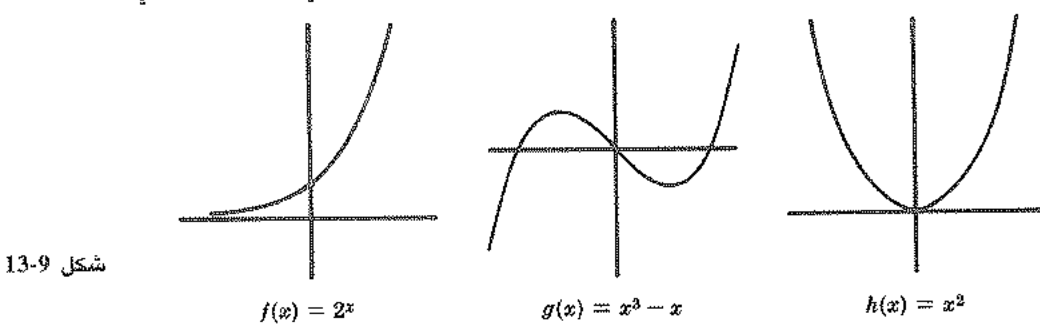
147.9 أذكر شرطاً هندسياً لكل تكون دالة $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ فوقية.

■ تكون $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دالة فوقية إذا كان كل خط أفقي يحتوي نقطة واحدة على الأقل لـ g.

148.9 أذكر شرطاً هندسياً لكل تكون دالة $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تقابلاً واحداً ـ لواحد.

■ تكون الدالة $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تقابلاً واحداً ـ لواحد إذا كان كل خط أفقي يحتوي تماماً نقطة واحدة فقط لـ h.

المسائل 149.9-157.9 تتعلق بالدوال $f(x) = 2^x$، $g(x) = x^3 - x$، و $h(x) = x^2$ التي تظهر بياناتها في الشكل 13-9.



شكل 13-9

149.9 هل f واحد ـ لواحد؟

■ نعم، لأنه لا يوجد خط أفقي يحتوي أكثر من نقطة واحدة لـ f.

150.9 هل f فوقية؟

■ لا، لأن بعض الخطوط الأفقية [تلك التي تحت محور -y] لا تحتوي نقطاً لـ f.

151.9 هل f تقابل واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن f ليست غامرة، أي أنها ليست دالة فوقية.

152.9 هل g متباينة (أي واحد ـ لواحد)؟

■ لا، لأن بعض الخطوط الأفقية تحتوي أكثر من نقطة لـ g، مثلاً $y = 0$ يحتوي ثلاث نقط لـ g. بمعنى آخر، $g(1) = g(0) = g(-1) = 0$، وبذلك لا تكون g واحداً ـ لواحد.

153.9 هل g غامرة (أي، دالة فوقية)؟

■ نعم، لأن كل خط أفقي يحتوي نقطة واحدة على الأقل لـ g.

154.9 هل g تقابل واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن g ليست متباينة.

155.9 هل h واحد ـ لواحد؟

■ لا، مثلاً $h(2) = h(-2) = 4$؛ أي أن الخط الأفقي $y = 4$ يحتوي نقطتين على h.

156.9 هل h دالة فوقية؟

■ لا، مثلاً ليس لـ -16 قبل ـ صورة؛ أي أن الخط الأفقي $y = -16$ لا يحتوي نقطاً لـ h.

157.9 هل h تقابل واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن h ليست واحد ـ لواحد ولا فوقية.

158.9 لنفترض أن $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دالتان واحد ـ لواحد. بيّن أن $g \circ f: A \to C$ واحد ـ لواحد.

■ لنفترض أن $(g°f)(x) = (g°f)(y)$. إذن، $g(f(x)) = g(f(y))$. بما أن g واحد ـ لواحد، إذن $f(x) = f(y)$. بما أن f واحد ـ لواحد، إذن $x = y$. لقد بينا إذن أن $(g°f)(x) = (g°f)(y)$ يقتضي $x = y$. وبالتالي تكون $g°f$ واحداً ـ لواحد.

159.9 لنفترض أن $f: A \to B$ و $g: B \to C$ تطبيقان فوقيان. بيّن أن $g \circ f: A \to C$ تطبيق فوقي.

■ ليكن $c \in C$. بما أن g تطبيق فوقي، إذن يوجد $b \in B$ بحيث أن $g(b) = c$. بما أن f تطبيق فوقي، إذن يوجد $a \in A$ بحيث أن $f(a) = b$. لذلك، $(g°f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$؛ وبالتالي، يكون $g°f$ فوقياً.

160.9 أُعطينا $f: A \to B$ و $g: B \to A$، بيّن أنه إذا كان $g°f$ واحداً ـ لواحد، فإن f يكون واحداً ـ لواحد.

■ لنفترض أن f ليس واحداً ـ لواحد. إذن، يوجد عنصران مختلفان $x, y \in A$ بحيث أن $f(x) = f(y)$ إذن $(g°f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g°f)(y)$؛ وبالتالي، لا يكون $g°f$ واحداً ـ لواحد. لذلك، إذا $g°f$ واحد ـ لواحد، فإن f يجب أن يكون واحداً ـ لواحد.

161.9 أعطينا $f: A \to B$ و $g: B \to C$. بين أنه إذا كان $g°f$ فوقياً، فإن g يكون فوقياً.

■ ليكن $a \in A$. إذن، $(g°f)(a) = g(f(a)) \in g(B)$؛ وبالتالي، $(g°f)(A) \subset g(B)$. لنفترض أن g ليس فوقياً. إذن، تكون $g(B)$ محتواة فعلياً في C، وبذلك تكون $(g°f)(A)$ محتواة فعلياً في C؛ إذن، $g°f$ ليس فوقياً. ينتج عن ذلك، أنه إذا $g°f$، فإن g يجب أن يكون فوقياً.

162.9 عرِّف تطبيقاً عكوساً.

▩ نقول عن تطبيق $f: A\to B$ أنه «عكوس» إذا وجد تطبيق $g: B\to C$ بحيث أن $f\circ g=1_B$ و $g\circ f=1_A$ (حيث 1_A و 1_B التطبيقان المحايدان). ويسمى التطبيق g، في مثل هذه الحالات، معكوس f ويرمز له بـ f^{-1}. وبشكل بديل، يكون f عكوساً إذا كانت العلاقة العكسية f^{-1} تطبيقاً من B إلى A. [سوف نعرف، من مسألة 163.9، أنه يكون لـ f معكوس إذا وفقط إذا كان f واحداً ـ لواحد وفوقياً. أيضاً، إذا $b\in B$، إذن $f^{-1}(b)=a$، حيث a العنصر الوحيد في A الذي يحقق $f(a)=b$].

163.9 اثبت أن تطبيقاً $f: A\to B$ يكون له معكوس إذا وفقط إذا كان واحداً ـ لواحد وفوقياً.

▩ لنفترض أن لـ f معكوساً، أي أنه توجد دالة $f^{-1}: B\to A$ بحيث أن $f^{-1}\circ f=1_A$ و $f\circ f^{-1}=1_B$ بما أن 1_A واحد ـ لواحد، فإنه f تكون واحداً ـ لواحد (بسبب مسألة 160.9؛ وبما أن 1_B فوقية، فإن f تكون فوقية (بسبب مسألة 161.9). أي أن f واحد ـ لواحد وفوقية في آنٍ معاً.

لنفترض الآن أن f واحد ـ لواحد وفوقية. إذن كل $b\in B$ يكون صورة لعنصر وحيد في A، ليكن $\hat{b}$. وبذلك، إذا $f(a)=b$، فإن $a=\hat{b}$؛ وبالتالي، $f(\hat{b})=b$. لنرمز الآن بـ g للتطبيق من B إلى A، المعرّف بواسطة $b\mapsto\hat{b}$. يكون لدينا

(i) $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=\hat{b}=a$، من أجل كل $a\in A$؛ إذن $g\circ f=1_A$.

(ii) $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(\hat{b})=b$، من اجل كل $b\in B$؛ إذن $f\circ g=1_B$.

ينتج عن ذلك، ان f يمتلك معكوساً، وأن معكوسه هو التطبيق g.

164.9 لتكن $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ معرّفاً بواسطة $f(x)=2x-3$. الآن، f واحد ـ لواحد وفوقي؛ وبالتالي، يكون له تطبيق معكوس f^{-1}. أوجد صيغة من أجل f^{-1}.

▩ لتكن y صورة x تحت التطبيق f؛ أي نضع $y=2x-3$. نبادل بين x و y، فنحصل على $x=2y-3$ والتي هي العلاقة العكسية f^{-1}. نحل من أجل y بدلالة x فنحصل على $y=(x+3)/2$. وبذلك، فإن الصيغة المعرّفة للتطبيق العكسي تكون $f^{-1}(x)=(x+3)/2$.

165.9 أوجد صيغة من أجل معكوس $g(x)=x^2-1$.

▩ نضع $y=x^2-1$. نبادل بين x و y فنحصل على $x=y^2-1$. نحل من أجل y فنحصل على $y=\pm\sqrt{x+1}$. إن معكوس g غير موجود، إلا إذا قيدنا نطاق g^{-1} إلى $x\geqslant 1$. نقتصر ايضاً على القيمة الموجبة لـ $\sqrt{x+1}$ إذن، $g^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$.

166.9 ليكن $P=\{A_i\}$ تجزئة لمجموعةٍ S. عرّف التطبيق الطبيعي (أو القانون) f من S إلى P.

▩ ليكن $s\in S$. بما أن P تجزئة لـ S، فإنه يوجد دليل وحيد i_0 بحيث أن $s\in A_{i_0}$. نعرّف $f: S\to P$ بواسطة $f(s)=A_{i_0}$؛ هذا هو التطبيق الطبيعي.

167.9 ليكن التطبيق الطبيعي $f: S\to P$ في المسألة 166.9. بيِّن أن التطبيق الطبيعي تطبيق فوقي.

▩ لتكن $A_i\in P$. إذن، $A_i\neq\varnothing$. وبذلك، يوجد $s\in S$ بحيث أن $s\in A_i$. إذن، $f(s)=A_i$. وبذلك، يكون f تطبيقاً فوقياً.

168.9 لتكن S مجموعة جزئية لمجموعةٍ S. عرِّف تطبيق الاحتواء من S إلى A.

▩ إن تطبيق الاحتواء من S إلى A، والذي نرمز له بـ $i: S\hookrightarrow A$، يعرّف بواسطة $i(s)=s$ من أجل كل $s\in S$. [لاحظ أن تطبيق الاحتواء هو التطبيق المحايد عندما $S=A$].

169.9 ليكن $i: S\hookrightarrow A$ تطبيق الاحتواء في المسألة 168.9. بيِّن أن i واحد ـ لواحد.

▩ نفترض أن $i(x)=i(y)$. لاحظ أن $i(x)=x$ و $i(y)=y$. إذن، $x=y$. وبذلك، يكون i واحداً ـ لواحد.

الفصل 10
التطبيقات الخطية

نفترض أن كل الفضاءات المتجهية معرّفة فوق نفس الحقل K، إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك.

1.10 التطبيقات الخطية

1.10 عرّف تطبيقاً خطياً.

■ ليكن V و U فضاءين متجهيين فوق نفس الحقل K. نقول عن تطبيق $F: V \to U$ أنه تطبيق خطي [أو تحويل خطي أو تشاكل فضاءي خطي] إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) $F(v + w) = F(v) + F(w)$، من أجل كل $v, w \in V$.

(2) $F(kv) = kF(v)$، من أجل أي $k \in K$ وأي $v \in V$.

بمعنى آخر، يكون $F: V \to U$ خطياً إذا كان «يحافظ» على العمليتين الأساسيتين لفضاء متجهي، أي الجمع المتجهي والضرب السلمي.

2.10 لنفترض أن $F: V \to U$ خطي. بيّن أن $F(0) = 0$.

■ نعوض بـ $k = 0$ في $F(kv) = kF(v)$ فنحصل على $F(0) = 0$.

3.10 لنفترض أن $F: V \to U$ خطي. بيّن أن $F(0) = 0$.

■ باستخدام $F(ku) = kF(u)$. نحصل على $F(-u) = F[(-1)u] = (-1)F(u) = -F(u)$.

4.10 بيّن أن $F: V \to U$ خطي إذا وفقط إذا كان لدينا

$$F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w) \tag{1}$$

من أجل أي عددين سلميين $a, b \in K$ وأي متجهين $v, w \in V$.

■ لنفترض أن F خطي، إذن، $F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w)$. بالعكس، نفترض أن (1) تتحقق. نحصل، من أجل $a = 1$ و $b = 1$ على $F(v + w) = F(v) + F(w)$؛ ومن أجل $b = 0$ نحصل على $F(av) = aF(v)$؛ وبالتالي، يكون F فوقياً.

ملاحظة: إن الشرط $F(av + bw) = aF(v) + bF(w)$ يميز تماماً التطبيقات الخطية ويستخدم أحياناً كتعريف لها.

5.10 لنفترض أن $F: V \to U$ تطبيق خطي. بيّن أنه، من أجل أي $a_i \in K$ وأي $v_i \in V$، يكون لدينا

$$F(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \cdots + a_nF(v_n)$$

■ بما أن F خطي، فإن الشرط يتحقق من أجل $n = 1$ و $n = 2$. لنفترض أنّ $n > 2$. إذن، نحصل بالاستقراء على $F(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = F(a_1v_1) + F(a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \cdots + a_nF(v_n)$. [سوف يستخدم هذا الشرط بشكل متكرر عبر هذا النص].

6.10 لتكن A أي مصفوفة $m \times n$ فوق حقل K. كما نوّهنا سابقاً، تحدّد A تطبيقاً $T: K^n \to K^m$ بواسطة الاقتران $v \mapsto Av$. [المتجهات تكتب هنا في K^n و K^m كأعمدة]. بيّن أن T خطيّ.

■ لدينا، من خواص المصفوفات، أن $T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = T(v) + T(w)$ وأن $T(kv) = A(kv) = kAv = kT(v)$، حيث $v, w \in K^n$ و $k \in K$. وبذلك، تكون T خطية.

ملاحظة: إن النوع أعلاه من التطبيقات الخطية سوف يقابلنا كثيراً. وسوف نبين، في الفصل التالي، أن كل تطبيق خطي من فضاء متجهي منتهي البعد إلى آخر يمكن أن يمثل كتطبيق خطي من هذا النوع.

7.10 ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق الإسقاط على المستوى -xy، أي أن $F(x,y,z) = (x,y,0)$. بيِّن أن F خطي.

■ ليكن $v = (a,b,c)$ و $w = (a',b',c')$. إذن

$$F(v + w) = F(a + a', b + b', c + c') = (a + a', b + b', 0) = (a, b, 0) + (a', b', 0) = F(v) + F(w)$$

ويكون لدينا $F(kv) = F(ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kF(v)$، من أجل أي $k \in \mathbb{R}$. وبذلك، يكون F خطياً.

8.10 ليكن $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق «الانسحاب» المعرّف بواسطة $F(x,y) = (x + 1, y + 2)$. بيِّن أن F ليس خطياً.

■ لاحظ أن $F(0) = F(0,0) = (1,2) \neq 0$. أي أن المتجه الصفري لا يطبق فوق المتجه الصفري. وبالتالي، لا يكون F خطياً.

9.10 ليكن $F: V \to U$ التطبيق الذي يقرن $0 \in U$ بكل $v \in V$. بيِّن أن F خطي.

■ من أجل كل $v, w \in V$ وكل $k \in K$، يكون لدينا $F(v + w) = 0 = 0 + 0 = F(v) + F(w)$ و $F(kv) = 0 = k0 = kF(v)$. وبذلك، يكون F خطياً. نطلق على F اسم «التطبيق الصفري» وسوف نرمز له عادة بـ 0.

10.10 ليكن التطبيق المحايد $I: V \to V$ الذي يطبق كل $v \in V$ إلى نفسه. بيِّن أن I خطي.

■ لدينا $I(av + bw) = av + bw = aI(v) + bI(w)$. من أجل كل $v, w \in V$ وكل $a, b \in K$، وبذلك، يكون I خطياً.

المسألتان 11.10-12.10 بالفضاء المتجهي V للحدوديات في المتغير t فوق الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$.

11.10 ليكن $D: V \to V$ التطبيق الاشتقاقي $D(v) = dv/dt$. بيِّن أن D خطي.

■ من المبرهن عليه في الحسبان أن

$$\frac{d(u + v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \qquad \text{و} \qquad \frac{d(ku)}{dt} = k\frac{du}{dt}$$

أي أن $D(u + v) = D(u) + D(v)$ و $D(ku) = kD(u)$. وبذلك، تكون D خطية.

12.10 ليكن $I: V \to \mathbb{R}$ تطبيق التكامل $I(v) = \int_0^1 v(t)\,dt$. بيِّن أن I خطيٌّ.

■ لقد بُرْهِنَ في الحسبان أن

$$\int_0^1 (u(t) + v(t))dt = \int_0^1 u(t)dt + \int_0^1 v(t)dt$$

و

$$\int_0^1 ku(t)dt = k\int_0^1 u(t)dt$$

أي أن $I(u + v) = I(u) + I(v)$ و $I(ku) = kI(u)$. وبذلك، يكون I خطياً.

13.10 ليكن التطبيق $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة $F(x, y) = (x + y, x)$. بيِّن أن F خطي.

■ ليكن $v = (a, b)$ و $w = (a', b')$. إذن، $v + w = (a + a', b + b')$ و $kv = (ka, kb)$. ويكون لدينا $F(v) = (a + b, a)$ و $F(w) = (a' + b', a')$. إذن

$$F(v + w) = F(a + a', b + b') = (a + a' + b + b', a + a') = (a + b, a) + (a' + b', a') = F(v) + F(w)$$

و $F(kv) = F(ka, kb) = (ka + kb, ka) = k(a + b, a) = kF(v)$. بما أن v، w، و k إختيارية، إذن يكون F خطياً.

14.10 ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ معرّفاً بواسطة $F(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$. بيِّن أن F خطي.

■ ليكن $v=(a,b,c)$ و $w=(a',b',c')$، إذن

$$v+w=(a+a',\, b+b',\, c+c') \quad \text{و} \quad kv=(ka,\, kb,\, kc) \qquad k\in\mathbb{R}$$

ولدينا

$$F(v)=2a-3b+4c \quad \text{و} \quad F(w)=2a'-3b'+4c'$$

وبذلك

$$F(v+w)=F(a+a',\, b+b',\, c+c')=2(a+a')-3(b+b')+4(c+c')=(2a-3b+4c)+(2a'-3b'+4c') = F(v)+F(w)$$

وكذلك

$$F(kv)=F(ka,\, kb,\, kc)=2ka-3kb+4kc=k(2a-3b+4c)=kF(v)$$

ينتج عن ذلك أن F خطي.

15.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ معرّفة بواسطة $F(x,y)=xy$. بيّن أن F ليست خطيه.

■ ليكن $v=(1,2)$ و $w=(3,4)$؛ إذن، $v+w=(4,6)$. لدينا $F(v)=1.2=2$ و $F(w)=3.4=12$، وبالتالي، $F(v+w)=F(4,6)=(4.6)=24\neq F(v)+F(w)$. ينتج عن ذلك أن F ليست خطية.

16.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ معرّفة بواسطة $F(x,y)=(x+1, 2y, x+y)$. بيّن أن F ليست خطية.

■ بما أن $F(0,0)=(1,0,0)\neq(0,0,0)$، فإن F لا يمكن أن تكون خطية.

17.10 لتكن $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ معرّفة بواسطة $F(x,y,z)=(|x|,0)$. بيّن أن F ليست خطية.

■ ليكن $v=(1,2,3)$ و $k=-3$؛ بالتالي، $kv=(-3,-6,-9)$. لدينا، $F(v)=(1,0)$ وبذلك $kF(v)=-3(1,0)=(-3,0)$. إذن $F(kv)=F(-3,-6,-9)=(3,0)\neq kF(v)$ ينتج عن ذلك أن F ليست خطية.

18.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ معرّفة بواسطة $F(x,y)=(2x-y,x)$. بيّن أن F خطية.

■ ليكن $u=(a,b)$ و $v=(a',b')$. إذن، $u+v=(a+a',b+b')$ و $k(u)=(ka,kb)$. لدينا، $F(u)=(2a-b,a)$ و $F(v)=(2a'-b',a')$. وبذلك

$$F(u+v)=F(a+a',\, b+b')=[2(a+a')-(b+b'),\; a+a']=(2a-b,\, a)+(2a'-b',\, a')=F(u)+F(v)$$

و

$$F(ku)=F(ka,\, kb)=(2ka-kb,\, ka)=k(2a-b,\, a)=kF(u)$$

إذن F خطية.

19.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ معرّفة بواسطة $F(t)=(2t,3t)$. بيّن أن F خطية.

■

$$F(t_1+t_2)=[2(t_1+t_2),\, 3(t_1+t_2)]=[2t_1+2t_2,\, 3t_1+3t_2]=(2t_1,\, 3t_1)+(2t_2,\, 3t_2)=F(t_1)+F(t_2)$$

و

$$F(kt)=(2kt,\, 3kt)=k(2t,\, 3t)=kF(t)$$

إذن، F خطية.

20.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ معرّفة بواسطة $F(x,y)=(x^2,y^2)$. بيّن أن F ليست خطية.

■ ليكن $u=(1,2)$ و $k=3$. إذن، $ku=(3,6)$. لدينا، $F(u)=(1,4)$ وبذلك $kF(u)=(3,12)$، إذن، $F(ku)=F(3,6)=(9,16)\neq kF(u)$. ينتج عن ذلك أن F ليست خطية.

21.10 لتكن $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ معرّفة بواسطة $F(x,y,z)=(x+1,y+z)$. بيّن أن F ليست خطية.

■ $F(0)=F(0,0,0)=(0+1,0+0)=(1,0)\neq(0,0)$. وبذلك، لا تكون F خطية.

22.10 لتكن $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ معرّفة بواسطة $F(x,y)=|x+y|$. بيّن أن F ليست خطية.

■ ليكن $u=(1,2)$ و $k=-3$؛ وبذلك $ku=(-3,-6)$. لدينا، $F(u)=1+2=3$، وبالتالي $kF(u)=(-3)(3)=-9$، إذن، $F(ku)=F(-3,-6)=|-3-6|=|-9|=9\neq kF(u)$. وبذلك، لا تكون F خطية.

المسائل 23.10-25.10 تتعلق بالفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة -n فوق حقل K، ومصفوفة إختيارية M في V.

23.10 لتكن $T: V \to V$ معرّفة بواسطة $T(A) = AM + MA$ حيث $A \in V$. بيِّن أن T خطية.

■ لدينا، من أجل أي $A,B \in V$ وأي $k \in K$،

$$T(A+B) = (A+B)M + M(A+B) = AM + BM + MA + MB = (AM+MA) + (BM+MB) = T(A) + T(B)$$

و

$$T(kA) = (kA)M + M(kA) = k(AM) + k(MA) = k(AM+MA) = kT(A)$$

إذن، T خطية.

24.10 لتكن $T: V \to V$ معرّفة بواسطة $T(A) = M + A$ حيث $A \in V$. بيِّن أن T تكون خطية إذا وفقط إذا $M = 0$.

■ إذا $M = 0$، فإن $T(A) = A$، أي أن T الدالة المحايدة، وبالتالي، تكون T خطية. من جهة أخرى، لنفترض أن $M \neq 0$: إذن، $T(0) = M + 0 = M \neq 0$، وبذلك لا تكون T خطية.

25.10 ليكن $T: V \to V$ تطبيقاً معرّفاً بواسطة $T(A) = MA$ حيث $A \in V$ بيِّن أن T خطِّي.

■ لدينا، من أجل أي $A,B \in V$ وأي $a,b \in K$، أن
$T(aA + bB) = M(aA + bB) = aMA + bMB = aT(A) + bT(B)$. إذن، T تطبيق خطي.

26.10 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات في t فوق K. بيِّن أن التطبيق $T: V \to V$ خطِّي، حيث $T(a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n) = a_0t + a_1t^2 + \dots + a_nt^{n+1}$.

■ لاحظ أن T لضرب حدودية $f(t)$ في t، أي أن $T(f(t)) = tf(t)$. وبالتالي، $T(f(t) + g(t)) = t(f(t) + g(t)) = tf(t) + tg(t) = T(f(t)) + Tg(t))$. كما أن $T(kf(t)) = t(kf(t)) = k(tf(t)) = kT(f(t))$. من أجل أي عدد سلّمي $k \in K$.

المسألتان 27.10-28.10 تتعلقان بالتطبيق المرافق $T: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ على الحقل العقدي C. أي أن $T(z) = \bar{z}$، حيث $z \in \mathbf{C}$، أو $T(a + bi) = a - bi$ حيث $a,b \in \mathbf{R}$.

27.10 بيِّن أنه، إذا نظرنا إلى C على أنه فضاء متجهي فوق نفسه، لا يكون T تطبيقاً خطياً.

■ ليكن $u = 3 + 4i$ و $k = 2 - i$. إذن، $ku = (2-i)(3+4i) = 10 + 5i$ و $T(ku) = 10 - 5i$. ولكن $kT(u) = (2-i)(3-4i) = 2 - 11i \neq T(ku)$. إذن، T ليس خطياً.

28.10 إذا نظرنا إلى C على أنه فضاء متجهي فوق الحقل الحقيقي R، فإن T يكون خطياً.

■ ليكن $z = a + bi$، $w = c + di$، حيث $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. إذن، $z + w = (a+c) + (b+d)i$، وبذلك، $T(z+w) = (a+c) - (b+d)i = (a - bi) + (c - di) = T(z) + T(w)$. أيضاً، لدينا $kz = ka + kbi$ من أجل $k \in \mathbf{R}$، وبالتالي، $T(kz) = ka - kbi = k(a - bi) = kT(z)$. إذن، T يكون خطياً.

2.10 خواص التطبيقات الخطية

مبرهنة 1.10: ليكن V و U فضاءين متجهيين فوق حقل K. ولتكن $(v_1, \dots, v_n)$ قاعدة لـ V، ولتكن $u_1, \dots, u_n$ متجهات إختيارية في U. إذن، يوجد تطبيق خطِّي وحيد $F: V \to U$ بحيث أن $F(v_1) = u_1, F(v_2) = u_2, \dots, F(v_n) = u_n$.

يستخدم هذا القسم مبرهنة 1.10 التي يظهر إثباتها في المسائل 43.10-45.10.

29.10 بيِّن أن يوجد تطبيق خطي وحيد $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ يحقق $F(1,2) = (2,3)$ و $F(0,1) = (1,4)$.

■ بما أن $(1,2)$ و $(0,1)$ يشكلان قاعدة لـ $\mathbf{R}^2$، فإن وجود تطبيق خطي وحيد F تضمنه مبرهنة 1.10.

المسائل 30.10-32.10 تتعلق بالتطبيق الخطي F في المسألة 29.10.

30.10 أوجد صيغة من أجل F، أي أوجد $F(a,b)$.

■ نكتب (a,b) كتركيبة خطية لـ (1,2) و (0,1) باستخدام المجهولين x,y:

$(a,b) = x(1,2) + y(0,1) = (x, 2x + y)$ وبذلك $a = x,\ b = 2x + y$

نحلّ من أجل x و y بدلالة a و b فنحصل على $x = a,\ y = -2a + b$. إذن،
$F(a,b) = xF(1,2) + yF(0,1) = a(2,3) + (-2a + b)(1,4) = (b, -5a + 4b)$.

31.10 أوجد $F(5,6)$.

■ نستخدم الصيغة من أجل F فنحصل على $F(5,6) = (6, -25 + 24) = (6, -1)$.

32.10 أوجد $F^{-1}(-2,7)$.

■ نضـع $F(a,b) = (-2,7)$، ونحـلّ مـن أجـل a و b، نحصـل علـى $(b, -5a + 4b) = (-2,7)$ وبـذلـك $b = -2$؛ و $-5a + 4b = 7$. إذن، $a = -3$، $b = -2$. وبذلك، $F^{-1}(-2,7) = (-3,-2)$.

33.10 بيّن أنه يوجد تطبيق خطي وحيد $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. يحقق $T(3,1) = (2,-4)$ و $T(1,1) = (0,2)$.

■ بما أن (3,1) و (1,1) مستقلان خطياً، فإنهما يشكلان قاعدة لـ $\mathbf{R}^2$؛ وبالتالي، يوجد مثل هذا التطبيق الخطي الوحيد T (من مبرهنة 1.10).

المسائل 34.10-36.10 تتعلق بالتطبيق الخطي T في مسألة 33.10.

34.10 أوجد صيغة من أجل T.

■ نكتب أولاً (a,b) كتركيبة خطية لـ (3,1) و (1,1) باستخدام السلّميين المجهولين x و y:

$$(a, b) = x(3, 1) + y(1, 1)$$

وبالتالي

$$(a, b) = (3x, x) + (y, y) = (3x + y, x + y) \quad \text{و} \quad \begin{cases} 3x + y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

نحلّ من أجل x و y بدلالة a و b: $x = 1/2\, a - 1/2\, b$ و $y = -1/2\, a + 3/2\, b$. وبذلك،
$T(a,b) = xT(3,1) + yT(1,1) = x(2,-4) + y(0,2) = (2x, -4x) + (0, 2y) = (2x, -4x + 2y) = (a - b, 5b - 3a)$.

35.10 أوجد $T(7,4)$.

■ نستخدم الصيغة من أجل T فنحصل على $T(7,4) = (7-4, 20-21) = (3,-1)$.

36.10 أوجد $T^{-1}(5,-3)$.

■ نضع $T(a,b) = (5,-3)$ ثم نحلّ من أجل a و b، نحصل على $(a-b, -3a + 5b) = (5,-3)$ وبذلك $a - b = 5$ و $-3a + 5b = -3$. إذن، $a = 11$، $b = 6$. وبذلك، $T^{-1}(5,-3) = (11,6)$.

37.10 بيّن أنه يوجد تطبيق خطي وحيد $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ يحقق $T(1,1) = 3$ و $T(0,1) = -2$.

■ بما أن $\{(1,1),(0,1)\}$ قاعدة لـ $\mathbf{R}^2$، فإن مثل هذا التطبيق الخطي الوحيد نحصل عليه من مبرهنة 1.10.

المسائل 38.10-41.10 تتعلق بالتطبيق الخطي T في المسألة 37.10.

38.10 أوجد صيغة من أجل T.

■ نكتب أولاً (a,b) كتركيبة خطية في (1,1) و (0,1) باستخدام السلّميين المجهولين x و y:

$$(a, b) = x(1, 1) + y(0, 1)$$

إذن، $(a,b) = (x,x) + (0,y) = (x, x + y)$ وبذلك $x = a$، $x + y = b$. نحلّ من أجل x و y بدلالة a و b، فنحصل على $x = a$، $y = b - a$. لذلك، $T(a,b) = T(x(1,1) + y(0,1)) = xT(1,1) + yT(0,1) = a(3) + (b - a)(-2) = 5a - 2b$.

39.10 أوجد $T(8,2)$ و $T(-4,6)$.

■ نستخدم الصيغة من أجل T، فنحصل على $T(8,2) = 40 - 4 = 36$ و $T(-4,6) = -20 - 12 = -32$.

40.10 أوجد $T^{-1}(6)$.

■ نضع $T(a,b) = 6$ فنحصل على $5a - 2b = 6$. هنا، b متغير حرّ. نضع $b = t$، حيث t وسيط، فنحصل على الحل $a = (2t+6)/5$، $b = t$. إذن، $T^{-1}(6) = \{((2t+6)/5, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

41.10 هل T واحد ـ لواحد؟

■ لا، لأن لـ $T^{-1}(6)$ أكثر من عنصر واحد، مثلاً $T(6/5,0) = 6$ و $T(8/5,0) = 6$.

42.10 هل يوجد تطبيق خطي $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحقق $T(2,2) = (8,-6)$ و $T(5,5) = (3,-2)$؟

■ مبرهنة 1.10 لا تنطبق هنا لأن $(2,2)$ و $(5,5)$ مترابطان خطياً، وبذلك لا يشكلان قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$. لاحظ أن $(5,5) = 5/2\,(2,2)$. وإذا كان T خطياً، فإن $T(5,5) = T(5/2(2,2)) = 5/2\,T(8,-6) = (20,-15)$. ولكن $T(5,5) = (3,-2)$ معطاة. إذن، لا يوجد مثل هذا التطبيق الخطي T.

المسائل 43.10-45.10 تتعلق بإثبات المبرهنة 1.10 الذي يتكون من ثلاث خطوات:

(1) نعرّف التطبيق $F: V \to U$ بحيث أن $F(v_i) = u_i$ من أجل $i = 1,\dots,n$.

(2) نبيّن أن F تطبيق خطي.

(3) نبيّن أن F وحيد.

43.10 خطوة (1): عرّف التطبيق الخطي $F: V \to U$ بحيث أن $F(v_i) = u_i$.

■ ليكن $v \in V$. بما أن $\{v_1,\dots,v_n\}$ قاعدة لـ V، فإنه توجد سلّميات وحيدة $a_1,\dots,a_n \in K$ بحيث أن $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. نعرّف $F: V \to U$ بواسطة $F(v) = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$ [بما أن الـ a_i وحيدة، فإن التطبيق يكون معرّفاً جيداً]. الآن، $v_i = 0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n$، من أجل $i = 1,\dots,n$. وبالتالي، $F(v_i) = 0u_1 + \dots + 1u_i + \dots + 0u_n = u_i$. وهكذا تكتمل الخطوة الأولى من البرهان.

44.10 خطوة (2): بيّن أن F خطية.

■ لنفترض أن $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ و $w = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$. إذن $v + w = (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + \dots + (a_n+b_n)v_n$، كما أن $kv = ka_1v_1 + ka_2v_2 + \dots + ka_nv_n$ من أجل أي $K \in K$. لدينا من تعريف التطبيق F، أن $F(v) = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$ و $F(w) = b_1u_1 + b_2v_2 + \dots + b_nu_n$. وبالتالي،

$$\begin{aligned} F(v+w) &= (a_1+b_1)u_1 + (a_2+b_2)u_2 + \dots + (a_n+b_n)u_n \\ &= (a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) + (b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n) \\ &= F(v) + F(w) \end{aligned}$$

و

$$F(k) = k(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = kF(v)$$

وبذلك، يكون F خطياً.

45.10 خطوة (3): بيّن أن F وحيد.

■ لنفترض أن $G: V \to U$ خطي، وأن $G(v_i) = u_i$، $i = 1,\dots,n$. إذا $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$، إذن

$$\begin{aligned} G(v) &= G(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = a_1G(v_1) + a_2G(v_2) + \dots + a_nG(v_n) \\ &= a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = F(v) \end{aligned}$$

بما أن $G(v) = F(v)$ من أجل كل $v \in V$، فإن $G = F$. وبذلك، يكون F وحيداً، وهكذا يكتمل إثبات المبرهنة.

46.10 لنفترض أن التطبيق الخطي $F: V \to U$ واحد ـ لواحد وفوقي بيّن أن التطبيق العكسي $F^{-1}: U \to V$ خطي أيضاً.

■ لنفترض أن $u,u' \in U$. بما أن F واحد ـ لواحد وفوقي، فإنه يوجد متجهان وحيدان $v,v' \in V$ بحيث أن $F(v) = u$ و $F(v') = u'$. بما أن F خطي، يكون لدينا أيضاً $F(v + v') = F(v) + F(v') = u + u'$ و $F(kv) = kF(v) = ku$. من تعريف التطبيق العكسي، نجد أن $F^{-1}(u) = v$، $F^{-1}(u') = v'$، $F^{-1}(u + u') = v + v'$، و $F^{-1}(ku) = kv$. إذن، $F^{-1}(u + u') = v + v' = F^{-1}(u) + F^{-1}(u')$ و $F^{-1}(ku) = kv = kF^{-1}(u)$ وبذلك يكون F^{-1} خطياً.

47.10 لنفترض أن $F: V \to U$ و $G: U \to W$ تطبيقان خطيان. بيّن أن تطبيق التركيب $G \circ F: V \to W$ خطي. [تذكر أن $G^\circ F$ معرّف بواسطة $(G^\circ F)(v) = G(F(v))$].

■ لدينا، من أجل أي متجهين $v,w \in V$ وأي سلّميين $a,b \in K$، أن

$(G^\circ F)(av + bw) = G(F(av + bw)) = G(aF(v) + bF(w)) = aG(F(v)) + bG(F(w)) = a(G^\circ F)(v) + b(G^\circ F)(w)$. وبذلك يكون $G^\circ F$ خطياً.

48.10 ليكن $\{e_1,e_2,e_3\}$ قاعدة لـ V و $\{f_1,f_2\}$ قاعدة لـ U. وليكن $T: V \to U$ خطياً. لنفترض، إضافة لذلك، أن

$$T(e_1) = a_1 f_1 + a_2 f_2 \qquad T(e_2) = b_1 f_1 + b_2 f_2 \qquad T(e_3) = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

بيّن أن $A[v]_e = [T(v)]_f$، من أجل أي $v \in V$، حيث كُتِبت المنجهات في K^2 و K^3 في شكل عمودي.

■ لنفترض أن $v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$؛ إذن $[v]_e = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ أيضاً.

$$\begin{aligned} T(v) &= k_1T(e_1) + k_2T(e_2) + k_3T(e_3) \\ &= k_1(a_1f_1 + a_2f_2) + k_2(b_1f_1 + b_2f_2) + k_3(c_1f_1 + c_2f_2) \\ &= (a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3)f_1 + (a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3)f_2 \end{aligned}$$

ينتج عن ذلك أن

$$[T(v)]_f = \begin{pmatrix} a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \end{pmatrix}$$

نحسب، فنحصل على

$$A[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \end{pmatrix} = [T(v)]_f$$

49.10 ليكن $T: V \to U$ خطياً، ولنفترض أن $v_1,\ldots,v_n \in V$ لها خاصية أن صُورَها $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ مستقلة خطياً. بيّن أن المتجهات $v_1,\ldots,v_n$ تكون مستقلة خطياً.

■ لنفترض أن $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$، من أجل سلّميات $a_1,\ldots,a_n$. إذن

$$0 = T(0) = T(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n)$$

بما أن الـ $T(v_i)$ مستقلة خطياً، إذن كل الـ $a_i = 0$. وبذلك، تكون $v_1,\ldots,v_n$ مستقلة خطياً.

3.10 نواة وصورة تطبيق خطي

50.10 ليكن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً. عرّف نواة F.

■ إن «نواة» F، وتكتب Ker F، هي مجموعة العناصر في V التي تُطَبَّق إلى $0 \in U$:

$$\text{Ker } F = \{v \in V: F(v) = 0\}$$

51.10 ليكن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً. عرّف صورة F.

■ إن «صورة F»، وتكتب Im F، هي مجموعة النقط ـ الصور في U:

$$\text{Im } F = \{u \in U : \exists v \in V \text{ من أجل } F(v) = u\}$$

52.10 ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق الإسقاط على المستوى -xy المعرّف بواسطة $F(x,y,z) = (x,y,0)$. أوجد نواة F.

■ إن النقط على محور -z، وهذه النقط فقط، تطبَّق على المتجه الصفري $0 = (0,0,0)$. إذن، $\text{Ker } F = \{(0,0,c): c \in \mathbb{R}\}$.

53.10 أوجد صورة تطبيق الإسقاط $F(x,y,z) = (x,y,0)$ في المسألة 52.10.

■ تتكون صورة F تماماً من تلك النقط في المستوى -xy: $\text{Im } F = \{(a,b,0): a,b \in \mathbb{R}\}$.

54.10 ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الذي يدير متجها حول محور -z بزاوية θ:

$$F(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

أوجد نواة F.

■ إن طول أي متجه لا يتغير تحت الدوران. لذلك، فإن المتجه الصفري وحده الذي يطبق على المتجه الصفر؛ وبالتالي، $\text{Ker } F = \{0\}$. [بمعنى آخر، وضع $F(x,y,z) = (0,0,0)$ يعطينا $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$].

55.10 أوجد صورة تطبيق الدوران F في مسألة 54.10.

■ بما أنه يمكن دائماً الدوران إلى الخلف بزاوية $-\theta$، فإن كل $v \in \mathbb{R}^3$ ينتمي إلى صورة F؛ أي أن $\text{Im } F = \mathbb{R}^3$.

المسائل 56.10-60.10 تتعلق بالفضاء المتجهي V للحدوديات الحقيقية في المتغير t، وتطبيق الإشتقاق الثالث $D^3: V \to V$، أي $D^3(f) = d^3f/dt^3$. [نستعمل غالباً D من أجل المشتق الأول، D^2 من أجل المشتق الثاني، وهكذا].

56.10 أوجد $D^3(f)$ حيث $f(t) = t^4 - 2t^3 + 5t^2 - 6t + 9$.

■ نأخذ المشتق ثلاث مرات:

$$\frac{df}{dt} = 4t^3 - 6t^2 + 10t - 6 \qquad \frac{d^2f}{dt^2} = 12t^2 - 12t + 10 \qquad D^3(f) = \frac{d^3f}{dt^3} = 24t - 12$$

57.10 أوجد $D^3(g)$ حيث $g(t) = at^2 + bt + c$.

■

$$\frac{dg}{dt} = 2at + b \qquad \frac{d^2g}{dt^2} = 2a \qquad D^3(g) = \frac{d^3g}{dt^3} = 0$$

58.10 أوجد نواة D^3.

■ إن المشتق الثالث لأي حدودية من الدرجة الثانية أو أقل يساوي صفراً، أما الحدوديات ذات الدرجات الأعلى فمشتقها الثالث يختلف عن الصفر. وبذلك، $\text{Ker } D^3 = \{f \in V : \deg f \leqslant 2\}$.

59.10 أوجد قبل الصورة لـ $h(t) = t^3$. [أرمز له بـ $D^{-3}(h)$].

■ نكامل ثلاث مرات:

$$D^{-1}(h) = \frac{t^4}{4} + C_1 \qquad D^{-2}(h) = \frac{t^5}{20} + C_1t + C_2 \qquad D^{-3}(h) = \frac{t^6}{120} + \frac{C_1t^2}{2} + C_2t + C_3 = \frac{t^6}{120} + at^2 + bt + c$$

60.10 أوجد صورة D^3.

■ إذا أعطينا أي حدودية $f(t)$، فإنه يمكن المكاملة ثلاث مرات للحصول على حدودية $F(t)$ بحيث أن d^3F/dt^3 يكون $f(t)$. وبذلك، تحتوي صورة D^3 على كل حدودية f، أي أن $\text{Im } D^3 = V$.

61.10 لنفترض أن $F: V \to U$ تطبيق خطّي. بيّن أن نواة F فضاء جزئي لـ V.

■ بما أن $F(0) = 0$، إذن $0 \in \text{Ker } F$. نفترض الآن أن $v, w \in \text{Ker } F$ وأن $a, b \in K$. بما أن v و w ينتميان إلى نواة F، فإن $F(v) = 0$ و $F(w) = 0$. وبذلك، $F(av + bw) = aF(v) + bF(w) = a0 + b0 = 0$، أي أن $av + bw \in \text{Ker } F$. إذن، نواة F تكون فضاء جزئياً في V.

62.10 لنفترض أن $F: V \to U$ تطبيق خطي. بيّن أن صورة F فضاءً جزئي في U.

■ بما أن $F(0) = 0$، إذن $0 \in \text{Im} F$. لنفترض الآن أن $u, u' \in \text{Im } F$ وأن $a, b \in K$. بما أن u و u' ينتميان إلى صورة F، فإنه يوجد متجهان $v, v' \in V$ بحيث أن $F(v) = u$ و $F(v') = u'$. إذن $F(av + bv') = aF(v) + bF(v') = au + bu' \in \text{Im } F$. وبذلك، تكون صورة F فضاءً جزئياً في U.

63.10 لنفترض أن المتجهات $v_1, \ldots, v_n$ تولّد V وأن $F: V \to U$ تطبيق خطي. بيّن أن المتجهات $F(v_1), \ldots, F(v_n) \in U$ تولّد $\text{Im } F$.

■ لنفترض أن $u \in \text{Im } F$؛ إذن $F(v) = u$ من أجل متجه $v \in V$. بما أن $v_1, \ldots, v_n$ تولّد V، وبما أن $v \in V$، فإنه توجد سلّميات $a_1, \ldots, a_n$ بحيث أن $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$. ينتج عن ذلك أن

$$u = F(v) = F(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \cdots + a_nF(v_n)$$

وبذلك، فإن المتجهات $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ تولّد $\text{Im } F$.

64.10 لتكن $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ مصفوفة 4×3 إختيارية فوق حقلٍ K. [تذكر أننا نعتبر A تطبيقاً خطياً $A: K^3 \to K^4$]. برهن أنّ صورة A هي تماماً الفضاء العمودي لـ A.

■ لتكن e_1, e_2, e_3 القاعدة المعتادة لـ K^3. بما أن e_1, e_2, e_3 تولّد K^3، فإن قيمها Ae_1, Ae_2, Ae_3 تحت A تولّد صورة A. ولكن المتجهات Ae_1, Ae_2, Ae_3 هي أعمدة A:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \qquad Ae_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \qquad Ae_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

إذن، تكون صورة A الفضاء العمودي لـ A.

ملاحظة: نؤكد أنه إذا كانت A أي مصفوفة $m\times n$ فوق حقلٍ K، فإننا ننظر إلى A كتطبيق خطي $A: K^n \to K^m$ حيث تكتب المتجهات في شكل أعمدة. وفي هذه الحالة، تكون صورة A الفضاء العمودي لـ A. من جهة أخرى، تنظر بعض النصوص إلى A على أنها تطبيق خطي $A: K^m \to K^n$ حيث تكتب المتجهات في شكل صفوف؛ وهناك، تكون صورة A الفضاء الصفّي لـ A.

65.10 لنفترض أن V ذو بعد منتهٍ وأن $F: V \to U$ تطبيق خطي. بيّن أن بعد $\text{Im } F$ منتهٍ، وأن $\dim(\text{Im } F) \leqslant \dim V$.

■ لنفترض أن $\dim V = n$، وأن $\dim(\text{Im } F) > \dim V$. يوجد عندئذ متجهات $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1} \in \text{Im } F$ تكون مستقلة خطياً. لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ متجهات في V بحيث أن $F(v_i) = w_i$. لنفترض أن $a_1v_1 + \ldots + a_{n+1}v_{n+1} = 0$. إذن، $0 = F(0) = F(a_1v_1 + \ldots + a_{n+1}v_{n+1}) = a_1F(v_1) + \ldots + a_{n+1}F(v_{n+1}) = a_1w_1 + \ldots + a_{n+1}w_{n+1}$. بمـا أن الـ w_i مستقلـة خطياً، فإن $a_1 = 0, \ldots, a_{n+1} = 0$. وبذلك، تكون $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ مستقلة خطياً. يناقض هذا حقيقة أن $\dim V = n$. إذن، $\dim(\text{Im } F) \leqslant \dim V$.

مبرهنة 2.10 : ليكن V منته البعد، وليكن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً. إذن

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

[أي أن مجموع بعدي الصورة والنواة لتطبيق خطي يساوي بعد نطاقه].

66.10 أثبت مبرهنة 2.10.

■ لنفترض أن $\dim(\text{Ker } F) = r$ وأن $\{w_1,\ldots,w_r\}$ قاعدة لـ Ker F؛ ولنفترض أن $\dim(\text{Im } F) = s$ وأن $\{u_1,\ldots,u_s\}$ قاعدة لـ Im F. [من المسألة 65.10، نعرف أن بعد Im F منتهٍ]. بما أن $u_j \in \text{Im } F$، فإنه توجد متجهات $v_1,\ldots,v_s$ في V بحيث أن $F(v_1) = u_1,\ldots,F(v_s) = u_s$. إننا ندّعي بأن المجموعة $B = \{w_1,\ldots,w_r,v_1,\ldots,v_s\}$ تشكل قاعدة لـ V، أي أن (i) B تولّد v و (ii) B مستقلة خطياً. إذا نحن برهنا على صحة (i) و (ii) فإن $\dim V = r + s = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$.

(i) B تولّد V. ليكن $v \in V$. إذن، $F(v) \in \text{Im } F$. بما أن u_j تولّد Im F، فإنه توجد سلّميات $a_1,\ldots,a_s$ بحيث أن $F(v) = a_1u_1 +\ldots+ a_su_s$. نضع $\hat{v} = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s - v$. إذن

$$F(\hat{v}) = F(a_1v_1 + \cdots + a_sv_s - v) = a_1F(v_1) + \cdots + a_sF(v_s) - F(v) = a_1u_1 + \cdots + a_su_s - F(v) = 0$$

وبذلك، $v \in \text{Ker } F$. بما أن الـ w_i تولّد Ker F، فإنه توجد سلّميات $b_1,\ldots,b_r$ بحيث أن $\hat{v} = b_1w_1 + \cdots + b_rw_r = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s - v$. ينتج عن ذلك أن $v = a_1v_1 +\ldots+ a_sv_s - b_1w_1 - \ldots - b_rw_r$. إذن، B تولّد V.

(ii) B مستقلة خطياً. لنفترض أن

$$x_1w_1 + \cdots + x_rw_r + y_1v_1 + \cdots + y_sv_s = 0 \qquad (1)$$

حيث $x_i, y_j \in K$. إذن

$$0 = F(0) = F(x_1w_1 + \cdots + x_rw_r + y_1v_1 + \cdots + y_sv_s) = x_1F(w_1) + \cdots + x_rF(w_r) + y_1F(v_1) + \cdots + y_sF(v_s) \qquad (2)$$

ولكن $F(w_i) = 0$ لأن $w_i \in \text{Ker } F$ و $F(v_j) = u_j$. التعويض في (2) يعطي $y_1u_1 +\ldots+ y_su_s = 0$.

بما أن الـ u_j مستقلة خطياً، فإن $y_j = 0$. التعويض في (1) يعطي $x_1w_1 +\ldots+ x_rw_r = 0$.

بما أن الـ w_i مستقلة خطياً، فإن كل $x_i = 0$. إذن، B مستقلة خطياً.

67.10 عرّف رتبة تطبيق خطي $F: V \to U$.

■ تُعرَّفُ رتبة F بأنها صورته؛ أي أن $\text{rank}(F) = \dim(\text{Im } F)$.

68.10 عرِّف صفرية تطبيق خطي $F: V \to U$.

■ تُعرَّف «صفرية» F بأنها بُعْد نواته؛ أي أن $\text{nullity}(F) = \dim(\text{Ker } F)$.

69.10 أعد صياغة مبرهنة 2.10 باستخدام الاصطلاحات أعلاه.

■ **مبرهنة 2.10**: ليكن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً، حيث V منته البعد. إذن بُعْد (نطاق F) = صفرية (F) + رتبة (F) [حيث Dom F هو النطاق V لـ F].

70.10 كانت رتبة مصفوفةٍ A تُعرَّف أصلاً بأنها بعد فضاء A العمودي وبعد فضاءها الصفي. كيف يرتبط هذا التعريف بتعريف الرتبة في المسألة 67.10؟

■ التعريفان يعطيان كلاهما نفس القيمة لأن صورة A هي فضاء A العمودي.

71.10 ليكن $F: V \to U$ و $G: U \to W$ خطيين. بيِّن أن $\text{rank}(G^\circ F) \leqslant \text{rank } G$.

■ بما أن $F(V) \subset U$، فإنه يكون أيضاً لدينا $F(F(V) \subset G(U)$، وبذلك يكون $\dim G(F)V)) \leqslant \dim G(U)$. إذن،

$$\text{rank}(G^\circ F) = \dim((G^\circ F)(V)) = \dim(G(F(V))) \leqslant \dim G(U) = \text{rank } G$$

72.10 ليكن $F: V \to U$ و $G: U \to W$ خطيين. بيِّن أن $\text{rank}(G^\circ F) \leqslant \text{rank } F$.

■ لدينا $\dim(G(F)) \leqslant \dim F(V)$، وبالتالي،

$$\text{rank}(G^\circ F) = \dim((G^\circ F)(V)) = \dim(G(F(V))) \leqslant \dim F(V) = \text{rank } F$$

73.10 لنفترض أن $f: V \to U$ خطي بنواة W وأن $f(v) = u$. بيّن أن $v + W = \{v + w : w \in W\}$ قبل ـ الصورة لـ u، أي أن $f^{-1}(u) = v + W$. [تعرف المجموعة $v + W$ بالمجموعة المصاحبة لـ W].

■ يجب أن نثبت أن (i) $f^{-1}(u) \subset v + W$ و (ii) $v + W \subset f^{-1}(u)$. نبرهن أولاً (i). لنفترض أن $v' \in f^{-1}(u)$. إذن $f(v') = u$، وبذلك $f(v' - v) = f(v') - f(v) = u - u = 0$، أي أن $v' - v \in W$. إذن، $v' = v + (v' - v) \in v + W$ وبالتالي $f^{-1}(u) \subset v + W$.

نبرهن الآن (ii). لنفترض أن $v' \in v + W$. إذن $v' = v + w$ حيث $w \in W$. بما أن W نواة f، إذن $f(w) = 0$. ينتج عن ذلك أن $f(v') = f(v + w) = f(v) + f(w) = f(v) + 0 = f(v) = u$. إذن، $v' \in f^{-1}(u)$ وبذلك $v + W \subset f^{-1}(u)$.

4.10 حساب نواة وصورة تطبيق خطي

74.10 ليكن $F: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ التطبيق الخطي المعرّف بواسطة $F(x,y,s,t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$. أوجد قاعدة الصورة U لـ F وكذلك بعدها.

■ نوجد صورة قاعدة المتجهات المعتادة لـ $\mathbf{R}^4$:

$$F(1,0,0,0) = (1,1,1) \qquad F(0,1,0,0) = (-1,0,1) \qquad F(0,0,1,0) = (1,2,3)$$
$$F(0,0,0,1) = (1,-1,-3)$$

إن المتجهات الصورة تولّد U: نكوّن بالتالي المصفوفة التي صفوفها هذه المتجهات الصورة، ثم نختزلها صفياً إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$ قاعدة لـ U، وبالتالي، $\dim U = 2$.

75.10 أوجد قاعدة للنواة W، وكذلك بعدها، للتطبيق F في المسألة 74.10.

■ نضع $F(v) = 0$ حيث $v = (x,y,z,t)$:

$$F(x,y,s,t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t) = (0,0,0)$$

نساوي بين المركبات المتقابلة، فنكوّن المنظومة التالية التي يكون فضاؤها الحلّي النواة W لـ F:

$$\begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ x + 2s - t &= 0 \\ x + y + 3s - 3t &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ y + s - 2t &= 0 \\ 2y + 2s - 4t &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ y + s - 2t &= 0 \end{aligned}$$

المتغيران الحرّان هما s و t؛ وبالتالي، $\dim W = 2$. نضع

(i) $s = -1$، $t = 0$ فنحصل على الحل $(2,1,-1,0)$.

(ب) $t = 1$، $s = 0$ فنحصل على الحل $(1,2,0,1)$.

وبذلك، تكون $\{(2,1,-1,0),(1,2,0,1)\}$ قاعدة لـ W. [لاحظ أن $\text{dum } U + \dim W = 2 + 2 = 4$، وهو بعد النطاق $\mathbf{R}^4$ لـ F].

76.10 ليكن $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ الفضاء الخطي المعرّف بواسطة $T(x,y,z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. أوجد قاعدة الصورة U لـ T، وكذلك بعدها.

■ نبحث عن صورة المتجهات التي تولّد النطاق $\mathbf{R}^3$:

$$T(1,0,0) = (1,0,1) \qquad T(0,1,0) = (2,1,1) \qquad T(0,0,1) = (-1,1,-2)$$

هذه الصورة تولّد الصورة U لـ T: فنكوّن بالتالي المصفوفة التي صفوفها المتجهات الصورة، ثم نختزلها صفّيا إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ قاعدة لـ U. إذن، $\dim U = 2$.

77.10 أوجد قاعدة للنواة W للتطبيق T في المسألة 76.10، وكذلك بُعْدها.

■ نضـع $T(v) = 0$ حيـث $v = (x,y,z)$: $T(x,y,z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z) = (0,0,0)$. نسـاوي بيـن المركبات المتقابلة، فنكوّن المنظومة المتجانسة التي يكون فضاؤها الحلّي النواة W لـ T:

$$\begin{matrix}x+2y-z=0\\y+z=0\\x+y-2z=0\end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+2y-z=0\\y+z=0\\-y-z=0\end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+2y-z=0\\y+z=0\end{matrix}$$

المتغير الحرّ الوحيد هو z؛ إذن، $\dim W = 1$. نضع $z = 1$، إذن $y = -1$ و $x = 3$. وبذلك، يكون $\{(3,-1,1)\}$ قاعدة لـ W. [لاحظ أن $\dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$ وهـو بُعْد النطاق $\mathbf{R}^3$ لـ T.]

78.10 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ معرّفاً بواسطة $F(x,y,z) = (x + y + z,\ x + 2y - 3z,\ 2x + 3y - 2z,\ 3x + 4y - z)$. أوجد قاعدة لصورة F، وكذلك بُعْدها.

■ نجد أولاً صورة المتجهات التي تولّد النطاق $\mathbf{R}^3$ لـ F:

$$F(1,0,0) = (1,1,2,3) \qquad F(0,1,0) = (1,2,3,4) \qquad F(0,0,1) = (1,-3,-2,-1)$$

[المتجهات الصـورة الثلاثة تولّد Im F]. نكوّن المصفوفة التي صفوفها المتجهات الصورة، ثم نختزلها إلى شكل درجي:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&4\\1&-3&-2&-1\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&1\\0&-4&-4&-4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $\{(1,1,2,3),(0,1,1,1)\}$ قاعدة لـ Im F، ويكون $\dim(\mathrm{Im}\, F) = 2$.

79.10 أوجد قاعدة لنواة التطبيق F في المسألة 78.10، وكذلك بُعْدها.

■ نضع $F(v) = 0$ حيث $v = (x,y,z)$ ثم نحلّ المنظومة المتجانسة: $F(x,y,z) = (x + y + z,\ x + 2y - 3z,\ 2x + 3y - 2z, 3x + 4y - z) = (0,0,0,0)$. وبذلك،

$$\begin{matrix}x+y+z=0\\x+2y-3z=0\\2x+3y-2z=0\\3x+4y-z=0\end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+y+z=0\\y-4z=0\\y-4z=0\\y-4z=0\end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+y+z=0\\y-4z=0\end{matrix}$$

المتغير الحرّ الوحيد هو z، إذن $\dim(\mathrm{Ker}\, F) = 1$. نضع $z = 1$ فنحصل على $y = 4$ و $x = -5$. وبذلك، تكون $\{(-5,4,1)\}$ قاعدة لـ Ker F.

المسائل 80.10-85.10 تتعلق بالتطبيق المصفوفيين $A: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ و $B: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرّفين بالمصفوفتين

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\3&8&13&-3\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix}1&2&5\\3&5&13\\-2&-1&-4\end{pmatrix}$$

80.10 أوجد بعد صورة A، وكذلك قاعدة لها.

■ إن الفضاء العمودي لـ A يساوي Im A. لذلك، نختزل A^T إلى شكل درجي:

$$A^T = \begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&8\\3&5&13\\1&-2&-3\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&2&4\\0&-3&-6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $\{(1,1,3),(0,1,2)\}$ قاعدة لـ Im A، ويكون $\dim(\text{Im } A) = 2$.

81.10 أوجد بُعْد نواة التطبيق المصفوفي A.

■ إنّ نطاق A هو $\mathbf{R}^4$؛ وبالتالي، $\dim(\text{Dom } A) = 4$. نجد من مبرهنة 2.10 أن $\dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Dom } A) - \dim(\text{Im } A) = 4\text{-}2 = 2$.

82.10 أوجد قاعدة لنواة التطبيق المصفوفي A.

■ نضع $0 = A(v)$ حيث $v = (x,y,z,t)$، ثم نحل المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\1 & 3 & 5 & -2\\3 & 8 & 13 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+3z+t\\x+3y+5z-2t\\3x+8y+13z-3t\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+3z+t&=0\\x+3y+5z-2t&=0\\3x+8y+13z-3t&=0\end{aligned}$$

إن مصفوفة المعاملات للمنظومة المتجانسة هي المصفوفة المعطاة A. نختزل A إلى شكل درجي:

$$A \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\0 & 1 & 2 & -3\\0 & 2 & 4 & -6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\0 & 1 & 2 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+3z+t&=0\\y+2z-3t&=0\end{aligned}$$

المتغيران الحرّان هما z و t. نضع (i) $z = 1$، $t = 0$ فنحصل على الحل $(1,-2,1,0)$ و (ii) $z = 0$، $t = 1$ فنحصل على الحل $(-7,3,0,1)$. إذن، $(1,-2,1,0)$ و $(-7,3,0,1)$ يشكلان قاعدة من أجل Ker A. [إن $\dim(\text{Ker } A) = 2$ كما كان متوقعاً].

83.10 أوجد بُعْد نواة التطبيق المصفوفي B، وكذلك قاعدة لها.

■ نختزل B إلى شكل درجي للحصول على المنظومة المتجانسة المقابلة لـ Ker B:

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\3 & 5 & 13\\-2 & -1 & -4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & -1 & -2\\0 & 3 & 6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned}x+2y+5z&=0\\y+2z&=0\end{aligned}$$

هناك متغير حرّ واحد z، وبذلك $\dim(\text{Ker } B) = 1$. نضع $z = 1$ فنحصل على الحل $(-1,-2,1)$ الذي يشكل قاعدة لـ Ker B.

84.10 أوجد بُعْد صورة التطبيق المصفوفي B.

■ نطاق B هو $\mathbf{R}^3$، إذن $\dim(\text{Dom } B) = 3$. وبذلك، $\dim(\text{Im } B) = 3 - 1 = 2$.

85.10 أوجد قاعدة لصورة B.

■ نختزل B^T إلى شكل درجي:

$$B^T = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 5 & -1\\5 & 13 & -4\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & -1 & 3\\0 & -2 & 6\end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

وبذلك، يشكل $(1,3,-2)$ و $(0,1,-3)$ قاعدة لـ Im B. [تتكون القاعدة، كما هو متوقع، من متجهين.]

86.10 أوجد تطبيقاً خطياً $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ تكون صورته مولّدة بواسطة $(1,2,0,-4)$ و $(2,0,-1,-3)$.

■ لتكن القاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$، $e_3 = (0,0,1)$. نضع $F(e_1) = (1,2,0,-4)$، $F(e_2) = (2,0,-1,-3)$. نعرف من مبرهنة 1.10، أن تطبيقاً خطياً F مثل هذا موجود ووحيد. بالإضافة إلى ذلك، فإن صورة F تولّدها الـ $F(e_i)$؛ وبالتالي، يكون لـ F الخاصية المطلوبة. نبحث عن صيغة عامة من أجل $F(x,y,z)$:

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= F(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3)\\&= x(1,2,0,-4) + y(2,0,-1,-3) + z(0,0,0,0)\\&= (x+2y, 2x, -y, -4x-3y)\end{aligned}$$

87.10 أوجد تطبيقاً مصفوفياً $A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ تكون صورته مولّدة بواسطة المتجهين $(1,2,0,-4)$ و $(2,0,-1,-3)$.

■ كوِّن مصفوفة A، 4×3، تتكوَّن صفوفها من المتجهين المذكورين فقط؛ أي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

تذكر أن A تحدِّد تطبيقاً خطياً $A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ تتولَّد صورته بواسطة أعمدة A. إذن، تحقق A الشرط المطلوب.

المسائل 88.10-91.10 تتعلق بالفضاء المتجهي V للحدوديات الحقيقية f(t) من الدرجة 10 فأقل، والتطبيق الخطي $D^4: V \to V$ المعرّف بواسطة d^4f/dt^4، أي المشتق الرابع.

88.10 ما هو بُعْد V؟

■ أي حدودية f(t) في V تكون درجتها 10 أو أقل؛ وبالتالي، فإن الحدوديات $1,t,t^2,\ldots,t^{10}$ الـ 11 تشكل قاعدة لـ V. إذن، $\dim V = 11$.

89.11 أوجد بُعْد $\mathrm{Ker}\, D^4$، وكذلك قاعدة له.

■ يتكون $\mathrm{Ker}\, D^4$ من تلك الحدوديات التي درجتها 3 فاقل. وبذلك، تكون $\{1,t,t^2,t^3\}$ قاعدة لـ $\mathrm{Ker}\, D^4$ ويكون $\dim(\mathrm{Ker}\, D^4) = 4$.

90.10 ما هو بُعْد $\mathrm{Im}\, D^4$؟

■ نجد، من مبرهنة 2.10، أن $\dim(\mathrm{Im}\, D^4) = \dim(\mathrm{Dom}\, D^4) - \dim(\mathrm{Ker}\, D^4) = 11 - 4 = 7$.

91.10 أوجد قاعدة لـ $\mathrm{Im}\, D^4$.

■ إن المشتق الرابع للحدوديات من الدرجة 10 أو أقل تعطي حدوديات من الدرجة 6 أو أقل. إذن، تشكل $1,t,t^2,t^3,t^4,t^5,t^6$ قاعدة لـ $\mathrm{Im}\, D^4$.

5.10 تطبيقات خطية شاذة أو غير شاذة، تشاكلات تقابلية

92.10 عرّف التطبيقات الخطية الشاذة وغير ـ الشاذة.

■ نقول عن تطبيق خطي $F: V \to U$ أنه «شاذ» إذا كانت صورة متجه غير صفري ما تساوي 0، أي إذا وجد $v \in V$ بحيث $v \neq 0$ ولكن $F(v) = 0$. وبذلك، يكون $F: V \to U$ غير شاذ إذا كان $0 \in V$ فقط هو الذي يُطَبَّقُ إلى $0 \in U$؛ أو، بشكل مكافيء، إذا كانت نواته تتكون فقط من المتجه الصفري: $\mathrm{Ker}\, F = \{0\}$.

93.10 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ تطبيق الإسقاط على المستوى -xy، والمعرّف بواسطة $F(x,y,z) = (x,y,0)$. هل F شاذ أم غير ـ شاذ؟

■ F شاذ لان المتجهات غير الصفر على محور -z تطبق إلى 0.

94.10 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ التطبيق الخطي الذي يدير متجها حول محور -z بزاوية θ :

$$F(x, y, z) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta,\ z)$$

هل F شاذ أم غير ـ شاذ؟

■ بما أن طول أي متجه لا يتغير تحت الدوران، فإن المتجه الصفري وحده الذي يطبق إلى المتجه الصفري. وبذلك، فإن تطبيق الدوران F غير ـ شاذ.

95.10 ليكن $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $F(x,y) = (x - y, x - 2y)$. هل F غير ـ شاذ؟ إذا كان الجواب لا، فأوجد $v \neq 0$ بحيث أن $F(v) = 0$.

■ نوجد $\text{Ker}\, F$ بوضع $F(v) = 0$ حيث $v = (x,y)$:

$$(x-y,\, x-2y) = (0,0) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned}$$

الحل الوحيد هو $x = 0$، $y = 0$؛ وبالتالي، يكون F غير ـ شاذ.

96.10 ليكن $G: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $G(x,y) = (2x - 4y,\ 3x - 6y)$. هل G غير ـ شاذ؟ إذا لم يكن الأمر كذلك، فأوجد $v \neq 0$؛ بحيث أن $G(v) = 0$.

■ نضع $G(x,y) = (0,0)$ لإيجاد $\text{Ker}\, G$:

$$(2x-4y,\, 3x-6y) = (0,0) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} 2x - 4y &= 0 \\ 3x - 6y &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad x - 2y = 0$$

للمنظومة حلول غير ـ صفرية، أي أن y متغير حرّ؛ وبالتالي، يكون G شاذاً. ليكن $y = 1$، نحصل على الحل $v = (-2,1)$ وهو متجه غير صفري يحقق $G(v) = 0$.

97.10 ليكن $H: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $H(x,y,z) = (x + y - 2z, x + 2y + z,\ 2x + 2y - 3z)$. هل H غير شاذ؟ إذا كان شاذًا، أوجد $v \neq 0$ بحيث $H(v) = 0$.

■ نضع $H(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$(x+y-2z,\, x+2y+z,\, 2x+2y-3z) = (0,0,0) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

إن المنظومة الدرجية في شكل مثلثي، وبذلك فالحل الوحيد هو $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. إذن، H غير شاذة.

98.10 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y - z, 3x + 5y - z)$. هل H غير شاذ؟ إذا كان الجواب لا، فأوجد $v \neq 0$ يحقق $F(v) = 0$.

■ نضع $F(x,y,z) = (0,0,0)$ فنحصل على المنظومة:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ 3x + 5y - z &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ 2y - 4z &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y \ \ z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

بما أن z متغير حرّ، فإنه يكون للمنظومة حلٌ غير ـ صفري، وبذلك يكون F شاذًا. نضع $z = 1$، فنحصل على الحل غير ـ الصفري $v = (-3,2,1)$ بحيث أن $F(v) = 0$.

المسألتان 99.10-100.10 تتعلقان بالفضاء المتجهي V للحدوديات الحقيقية (في المتغير t).

99.10 ليكن $D^n: V \to V$ تطبيق المشتق النوني، أي $D^n(f) = d^nf/dt^n$ (حيث $n > 0$). هل D^n شاذ أم غير ـ شاذ؟

■ بما أن مشتق حدودية ثابتة غير صفرية $f(t) = k$ (حيث $k \neq 0$) يساوي صفراً، فإن D^n يكون شاذاً من أجل كل n.

100.10 ليكن $G: V \to V$ التطبيق الخطي الذي يضرب حدودية في t، أي $G(f(t) = tf(t)$. هل G شاذ أم غير شاذ؟

■ إذا $f(t) \neq 0$ فإن $tf(t) \neq 0$؛ وبالتالي، يكون G غير شاذ.

101.10 لنفترض أن تطبيقاً $F: V \to U$ يكون واحداً ـ لواحد. بيِّن أن F غير شاذ.

■ بما أن F خطي، إذن $F(0) = \{0\}$. وبما أنه واحد ـ لواحد، فإن $0 \in v$ وحده هو الذي يُطَبَّق إلى $0 \in U$؛ أي أن $\text{Ker}\, F = \{0\}$. وبذلك، يكون F غير شاذ.

102.10 لنفترض أن $F: V \to U$ غير شاذ. بيّن أن F واحد ـ لواحد.

■ لنفترض أن $F(v) = F(w)$؛ إذن، $F(v - w) = F(v) - F(w) = 0$. وبذلك، $v - w \in \text{Ker}\, F$. ولكن F غير شاذ.

أي أن $\text{Ker } F = 0$؛ وبالتالي، $v - w = 0$ أو $v = w$. إذن، $F(v) = F(w)$ يقتضي $v = w$؛ وهذا يعني أن F واحد ـ لواحد.

103.10 أعط مثالاً لتطبيق غير خطي $F: V \to U$ بحيث أن $F^{-1}(0) = \{0\}$ ولكن F ليس واحداً ـ لواحد.

■ ليكن $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرّفاً بواسطة $F(x) = x^2$. إذن، $F^{-1}(0) = \{0\}$، ولكن $F(2) = F(-2) = 4$، أي أن F ليس واحداً ـ لواحد.

104.10 لنفترض أن $F: V \to U$ خطي وأن V منته البعد. بيّن أنه يكون لـ V وصورة F نفس البعد إذا وفقط إذا كان F غير شاذ.

■ نعرف، من مبرهنة 2.10، أن $\dim V = \dim(\text{Im } F) + \dim(\text{Ker } F)$. وبالتالي، يكون لـ V و Im F نفس البعد إذا وفقط إذا $\dim(\text{Ker } F) = 0$ أو $\text{Ker } F = \{0\}$، أي إذا وفقط إذا كان F غير ـ شاذ.

105.10 عيّن كل التطبيقات الخطية غير ـ الشاذة $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

■ بما أن $\dim \mathbb{R}^3$ أصغر من $\dim \mathbb{R}^4$، فيكون لدينا أن $\dim(\text{Im } T)$ أصغر من بُعْد نطاق $\mathbb{R}^4$ لـ T. ينتج عن ذلك، أنه لا يمكن لأي تطبيق خطي $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ أن يكون غير شاذ.

106.10 لتكن A مصفوفة مربعة -n فوق حقل K [وهي تعرّف تطبيقاً خطياً $A: K^n \to K^n$]. نقول عن المصفوفة A أنها غير ـ شاذة إذا $\det(A) \neq 0$. بيِّن توافق تعريفي عدم الشذوذ.

■ يكون لدينا $\det(A) \neq 0$ إذا وفقط إذا لم يكن للمنظومة المتجانسة $Ax = 0$ إلا الحل الصفري فقط، إذا وفقط إذا $\text{Ker } A = \{0\}$. وبذلك، يتوافق التعريفان.

107.10 بيّن أنه كان $F: V \to U$ خطياً ويُطَبِّق مجموعات مستقلة إلى مجموعات مستقلة، فإن F يكون غير شاذ.

■ لنفترض أن $v \in V$ غير صفري، إذن $\{v\}$ مستقلة؛ وبالتالي، تكون $\{F(v)\}$ مستقلة. إذن، $F(v) \neq 0$. ينتج عن ذلك أن F غير شاذ.

مبرهنة 10.3: لنفترض أن تطبيقاً خطي $F: V \to U$ يكون غير شاذّ. إذن، صورة أي مجموعة مستقلة خطياً تكون مستقلة خطياً.

108.10 اثبت مبرهنة 3.10.

■ لنفترض أن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ متجهات مستقلة خطياً. سوف نبين أن المتجهات $F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_n)$ تكون مستقلة هي أيضاً. لنفترض أن $a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \ldots + a_nF(v_n) = 0$ حيث $a_i \in K$. بما أن F خطّيّ، فإن $F(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = 0$؛ وبالتالي، تنتمي $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ إلى Ker F. ولكن F غير ـ شاذ، أي أن $\text{Ker } F = \{0\}$؛ وبالتالي، $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$. بما أن الـ v_i مستقلة خطياً، تكون كل الـ a_i صفرية. ينتج عن ذلك أن الـ $F(v_i)$ مستقلة خطياً. وهكذا يكمل البرهان.

109.10 لنفترض أن V ذو بُعد منتهٍ وأن $\dim V = \dim U$. بيِّن أن تطبيقاً خطياً $F: V \to U$ يكون غير شاذ إذا وفقط إذا كان F غامراً، أي يطبق V فوق U.

■ لدينا، من مبرهنة 3.10، أن $\dim(V) = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$. ولذلك، يكون F غامراً إذا وفقط إذا $\text{Im } F = U$، إذا وفقط إذا $\dim(\text{Im } F) = \dim U = \dim V$ إذا وفقط إذا $\dim(\text{Ker } F) = 0$ إذا وفقط إذا كان F غير شاذ.

110.10 أعط مثالاً لتطبيق خطي $F: V \to V$ يكون فوقياً ولكنه لا يكون غير شاذ. [نعرف، من مسألة 109.10، لا يمكن أن يكون V ذا بعد منته.]

■ ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات $f(t)$. نفترض أنّ $D: V \to V$ التطبيق المشتق أي $D(f) = df/dt$. إذن يكون D فوقياً لكن غير شاذ.

111.10 أعط مثالاً لتطبيق خطي $G: V \to V$ غير شاذ لكن ليس فوقياً [من المسألة 109.10، ليس لها بُعْد منته].

■ ليكن V الفضاء المنجهي للحدوديات $f(t)$. ولكن $G: V \to V$ التطبيق الخطي الذي يضرب حدودية في t، أي $G(f(t)) = tf(t)$. إذن، يكون G غير شاذ، ولكن ليس فوقياً.

112.10 عرّف تشاكلاً تقابلياً لفضاء متجهي.

■ يطلق على تطبيق $F: V \to U$ إسم تشاكل تقابلي إذا كان F خطياً، وإذا كان F تطبيقاً تقابلياً (أي واحداً ـ لواحد وفوقياً). [في هذه الحالة، يكون لـ F معكوس $F^{-1}: U \to V$، وبذلك نقول عن F أنه عكوس.]

113.10 عرّف فضاءات متجهية متشاكلة تقابلياً.

■ نقول أن فضاء متجهياً V متشاكل تقابلياً مع فضاء متجهي U، ونكتب $V \cong U$، إذا كان يوجد تشاكل تقابلي $F: V \to U$.

114.10 لنفترض أن V فضاء منجهي فوق حقل K، وأن $\dim V = n$. بيّن أن $V \cong K^n$.

■ لتكن $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ قاعدة لـ V. ولنرمز بـ $[v]$ لإحداثيات $v \in V$ نسبة إلى القاعدة المعطاة. إذن، التطبيق $F: V \to K^n$ المعرّف بواسطة $F(v) = [v]$ يكون تشاكلاً تقابلياً. وبذلك، $V \cong K^n$.

مبرهنة 4.10: ليكن V ذا بعد منته، و $\dim V = \dim U$. ولنفترض أن $F: V \to U$ تطبيق خطي. إذن، يكون F تشاكلاً تقابلياً إذا وفقط إذا كان F غير شاذ.

115.10 أثبت مبرهنة 4.10.

■ إذا كان F تشاكلاً تقابلياً، فإن 0 وحده يطبق على 0، وبذلك يكون F غير شاذ. لنفترض أن F غير شاذ. إذن، $\dim(\text{Ker } F) = 0$. نجد، من مبرهنة 2.10، أن $\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$. وبذلك، $\dim U = \dim V = \dim(\text{Im } F)$. بما أن U له بعد منته، فإن $\text{Im } F = U$، وبذلك يكون F غامراً. إذن، يكون F واحداً ـ لواحد وفوقياً في آن معاً، أي أنه تشاكل تقابلي.

116.10 إن التطبيق الخطي $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $F(x,y) = (x - y, x - 2y)$ غير شاذ (مسألة 95.10]. أوجد صيغة لـ F^{-1}.

■ نضع $F(x,y) = (a,b)$ [وبذلك، $F^{-1}(a,b) = (x,y)$]:

$$(x - y, x - 2y) = (a, b) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y &= a \\ x - 2y &= b \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x - y &= a \\ -y &= b - a \end{aligned}$$

نحل من أجل x و y بدلالة a و b فنحصل على $x = 2a - b$، $y = a - b$. وبذلك، $F^{-1}(a,b) = (2a - b, a - b)$ أو [بشكل مكافىء $F^{-1}(x,y) = (2x - y, x - y)$].

117.10 إن التطبيق الخطي $G: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $F(x,y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$ غير شاذ. أوجد صيغة من أجل F^{-1}.

■ رغم أن G غير شاذ، إلا أنّه ليس عكوساً لأن لـ $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ بعدين مختلفين. [لذلك، فإن مبرهنة 4.10 لا تنطبق هنا]. ينتج عن ذلك أن F^{-1} غير موجود.

118.10 إن التطبيق الخطي $H: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $H(x,y,z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z)$ غير شاذ (مسألة 97.10). أوجد صيغة من أجل H^{-1}.

■ نضع $H(x,y,z) = (a,b,c)$ ثم نحلّ من أجل x، y، z بدلالة a، b، c.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= a \\ x + 2y + z &= b \\ 2x + 2y - 3z &= c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y - 2z &= a \\ y + 3z &= b - a \\ z &= c - 2a \end{aligned}$$

نحل من أجل x، y، z فنحصل على $x = -8a - b + 5c$، $y = 5a + b - 3c$، $z = -2a + c$. إذن،

$H^{-1}(a,b,c) = (-8a - b + 5c, \; 5a + b - 3c, \; -2a + c)$. أو نستبدل x، y، z بـ a، b، c على الترتيب، فنحصل على $H^{-1}(x,y,z) = (-8x - y + 5z, \; 5x + y - 3z, \; -2x + z)$.

المسائل 119.10-121.10 تبين أن العلاقة $V \simeq U$ للتشاكل التقابلي للفضاءات المتجهية هي علاقة تكافؤ، أي أنها إنعكاسية وتناظرية ومتعدية.

119.10 بيِّن أن $\simeq$ إنعكاسية، أي أن $V \simeq V$ من أجل أي فضاء متجهي V.

■ إن التطبيق المحايد $1_V: V \to V$ خطي وتقابلي واحد ـ لواحد، أي تشاكل تقابلي من أجل أي فضاء متجهي V.

120.10 بيِّن أن $\simeq$ متناظرة، أي أنه إذا $V \simeq U$، إذن $U \simeq V$.

■ لنفترض أن $V \simeq U$ وأن $F: V \to U$ تشاكل تقابلي. نعرف، من مسالة 30.10، أن F^{-1} خطي أيضاً. كما أن F^{-1} تقابل واحد ـ لواحد. إذن، $F^{-1}: U \to V$ تشاكل تقابلي، وبذلك يكون $U \simeq V$.

121.10 بيِّن أن $\simeq$ متعدية؛ أي أنه إذا $V \simeq U$ و $U \simeq W$، إذن $V \simeq W$.

■ لنفترض أن $V \simeq U$ و $V \simeq W$، مثلا $F: V \to U$ و $G: U \to W$ تشاكلان تقابليان. بما أن F و G تقابلان واحد ـ لواحد، فإن الأمر يكون كذلك أيضاً من أجل التركيب $G°F$. نعرف، من مسالة 47.10، أن $G°F$ خطي، لأن F و G خَطّيان. وبذلك، يكون $G \circ F: V \to W$ تشاكلان تقابليان؛ إذن، $V \simeq W$.

6.10 تطبيقات في الهندسية، مجموعات محدّبة

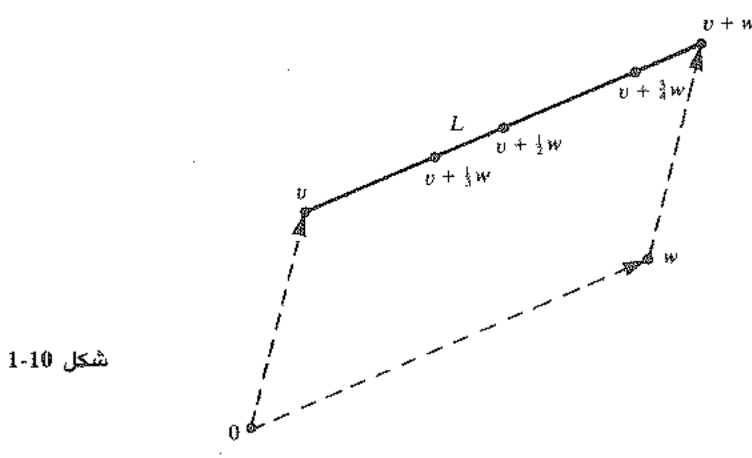
يفترض هذا القسم أن كل الفضاءات المتجهية معرّفة على الحقل الحقيقي **R**.

122.10 ليكن v و w عنصرين في V. تعرَّف القطعة المستقيمة L من v إلى $v + w$ بأنها مجموعة المتجهات $v + tw$ من أجل $0 \leq t \leq 1$ [أنظر شكل 10-1]. صف النقطة التي على (أ) منتصف المسافة بين v و $v + w$، (ب) ثلث المسافة بين v و $v + w$، (ج) ثلاثة أرباع المسافة بين v و $v + w$.

■ (أ) نضع $t = 1/2$ لنحصل على النقطة $v + 1/2\, w$ التي على منتصف المسافة بين v و $v + w$.

(ب) نضع $t = 1/3$ لنحصل على النقطة $v + 1/3\, w$ التي على ثلث المسافة من v إلى $v + w$.

(ج) نضع $t = 3/4$ لنحصل على النقطة $v + 3/4\, w$ التي على ثلاثة أرباع المسافة من v إلى $v + w$.



شكل 1-10

المسائل 123.10-125.10 تتعلق بالقطعة المستقيمة بين v و u.

123.10 بيّن أن L تتكون من النقط $(1-t)v+tu$ من أجل $0 \leqslant t \leqslant 1$.

■ ليكن $w = u - v$. إذن، $u = v + w$. نعرف من مسألة 122.10 أن L تتكون من النقط $v + tw = v + t(u - v) = v + tu - tv = (1 - t)v + tu$ من أجل $0 \leqslant t \leqslant 1$.

124.10 بيّن أن L تتكون من النقط $sv + (1 - s)u$ من أجل $0 \leqslant s \leqslant 1$.

■ ليكن $s = 1 - t$. إذن، $t = 1 - s$. لدينا أيضاً أن $0 \leqslant s \leqslant 1$ عندما $0 \leqslant t \leqslant 1$. وبذلك، تتكون L من النقط $(1 - t)v + tu = sv = sv + (1 - s)u$ من أجل $0 \leqslant s \leqslant 1$.

125.10 بيّن أن L تتكون من النقط $t_1v + t_2u$ من أجل $t_1 + t_2 = 1$، $t_1 \geqslant 0$، $t_2 \geqslant 0$.

■ لنفترض $t_1 + t_2 = 1$، $t_1 \geqslant 0$، $t_2 \geqslant 0$. إذن $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ و $t_2 = 1 - t_1$. وبذلك، $t_1v + t_2u = t_1v + (1 - t_1)u$. وبالتالي، تنتمي $t_1v + t_2u$ إلى L (المسألة 124.10). بالعكس، ليكن أي عنصر $sv + (1 - s)u$ في L. نضع $t_1 = s$ و $t_2 = 1 - s$. إذن $sv + (1 - s)u = t_1v + t_2u$؛ كما أن $t_1 + t_2 = 1$ و $t_1 \leqslant 0$ و $t_2 \leqslant 0$.

126.10 ليكن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً. بيّن أن الصورة $F(L)$ لقطعة مستقيمة L في V تكون قطعة مستقيمة في U.

■ لنفترض أن L قطعة مستقيمة بين v و u. إذن، تتكون L من النقط $t_1v + t_2u$، حيث t_1 و t_2 غير سالبتين و $t_1 + t_2 = 1$. إذن، تتكون $F(L)$ من النقط $F(t_1v + t_2u) = t_1F(v) + t_2F(u)$ وهي قطعة مستقيمة بين $F(v)$ و $F(u)$ في U.

127.10 عرّف مجموعة محدّبة.

■ نقول عن مجموعة جزئية X في فضاء متجهي V أنها «محدّبة» إذا كانت القطعة المستقيمة L بين أي نقطتين (متجهين) $P,Q \in X$ تقع بالكامل في X.

128.10 هل المساحة المستطيلة X في شكل 10-2 (أ) محدّبة؟

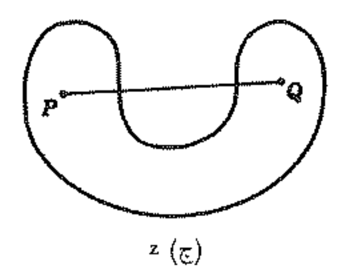
■ نعم، لأن القطعة المستقيمة بين أي نقطتين $P,Q \in X$ محتواة في X.

129.10 هل المساحة الاهليلجية (قطع ناقص) Y في الشكل 10-2 (ب) محدّبة؟

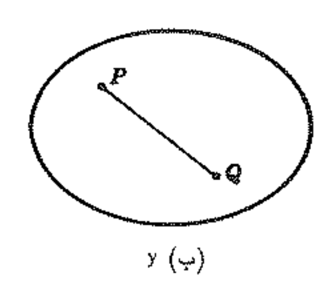
■ نعم، لأن القطعة المستقيمة بين أي نقطتين $P,Q \in Y$ محتواة في Y.

130.10 هل المساحة Z التي على شكل U في شكل 10-2 (ج) محدّبة؟

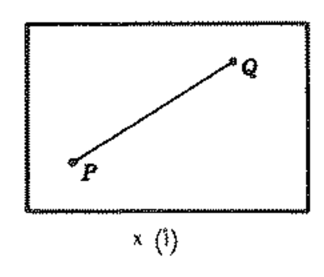
■ لا، لأنه (وكما موضح بالشكل) ليس من الضروري أن تكون القطعة المستقيمة محتواة في Z.



(ج) z



(ب) y



(أ) x

شكل 10-2

131.10 اثبت أن تقاطع أي عدد من المجموعات المحدبة يكون محدّباً.

■ ليكن $\{X_i : i \in I\}$ تجميعاً لمجموعات محدّبة، وليكن $Y = \cap_i X_i$. يلزمنا أن نبيّن أن Y محدّبة. لتكن $P,Q \in Y$.

إذن، $P,Q \in X_i$ من أجل كل $i \in I$. لتكن L القطعة المستقيمة بين P و Q. بما أن كل X_i محدّبة، إذن $L \subset X_i$ من أجل كل $i \in I$. وبالتالي، $L \subset Y$، وهذا يعني أن Y محدّبة.

132.10 ليكن W فضاء جزئياً في V. بيِّن أن W محدّب.

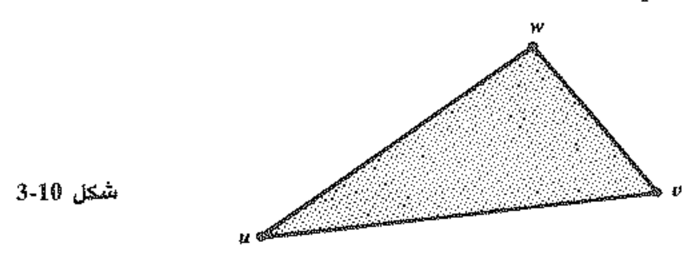
■ ليكن $u,v \in W$. إذن، $t_1u + t_2v \in W$ من أجل كل $t_1, t_2 \in R$. وبالتالي، $t_1u + t_2v \in W$ من أجل $t_1,t_2 \geqslant 0$ و $t_1 + t_2 = 1$. وبذلك يكون W محدّباً.

133.10 عرّف البَسْطة المحدّبة لمجموعة جزئية في فضاء متجهي V.

■ إن البسطة المحدّبة $H(x)$ لمجموعة جزئية X في V هي تقاطع كل المجموعات المحدبة التي تحتوي X. [نعرف من المسألة 131.10 أن $H(X)$ محدّبة].

134.10 صف البسطة المحدّبة H لثلاثة متجهات u، v، w في V.

■ تتكون H من كل المتجهات $t_1u + t_2v + t_3w$ حيث $t_i \geqslant 0$، $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. [هندسياً، تكون H هي المثلث الذي رؤوسه u، v، w كما موضح بالشكل 10-3].



شكل 10-3

135.10 صف البسطة المحدّبة H المتجهات $v_1,v_2,\ldots,v_n$ في V.

■ تتكون H من كل المتجهات $t_1v_1 + t_2v_2 +\ldots+t_nv_n$ حيث $t_i \geqslant 0$، والمجموع $t_1 +\ldots+ t_n = 1$.

136.10 لنفترض أن $F: V \to U$ تطبيقاً خطياً وأن X مجموعة جزئية محدّبة في X. بيِّن أن الصورة $F(X)$ مجموعة جزئية محدّبة في U.

■ ليكن $u_1, u_2 \in F(X)$. إذن، يوجد متجهان $v_1,v_2 \in X$ بحيث أن $F(v_1) = u_1$ و $F(v_1) = u_2$. بما أن X محدّبة، إذن كـل المتجهـات $t_1v_1 + t_2v_2$، حيـث $t_1,t_2 \geqslant 0$ و $t_1 + t_2 = 1$، تنتمـي إلـى X. وبـالتـالـي، تنتمـي المتجهـات $F(t_1v_1 + t_2v_2) = t_1F(v_1) + t_2F(v_2) = t_1u_1 + t_2u_2$ إلى $F(X)$. وبذلك، تكون $F(X)$ محدّبة.

137.10 ليكن $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $F(x,y) = (3x + 5y, 2x + 3y)$. أوجد الصورة $F(S)$ لدائرة الوحدة S في $\mathbf{R}^2$. [تتكون S من كل النقط التي تحقق $x^2 + y^2 = 1$].

■ نضع $F(x,y) = (s,t)$:

$$(3x + 5y, 2x + 3y) = (s, t) \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 3x + 5y = s \\ 2x + 3y = t \end{cases}$$

نحلّ من أجل x، و y بدلالة s، t فنحصل على $x = -3s + 5t$، $y = 2s - 3t$. نعوض في $x^2 + y^2 = 1$ فنحصل على $13s^2 - 42st + 34t^2 = 1$ أو $13x^2 - 42xy + 34y^2 = 1$ وهي صورة S تحت F. [لاحظ أن $F(S)$ قطع ناقص (إهليلج)].

138.10 أوجد قبل ـ الصورة $F^{-1}(S)$ من أجل التطبيق F في المسألة 137.10 ودائرة الوحدة S.

■ نضـع $F(x,y) = (s,t)$ حيـث $(s,t) \in S$، أي حيـث $s^2 + t^2 = 1$. نحصـل علـى $3x + 5y = s$، $2x + 3y = t$. التعـويـض فـي $s^2 + t^2 = 1$ يعطينـا $13x^2 + 42xy + 24y^2 = 1$ وهـي $F^{-1}(S)$. [لاحـظ أن $F^{-1}(S)$ قطـع نـاقـص (إهليلج)].

المسائل 141.10-139.10 تتعلق بالتطبيق الخطي $G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرّفة بواسطة

$$G(x, y, z) = (x + y + z,\ y - 2z,\ y - 3z)$$

وكرة الوحدة S_2 في $\mathbf{R}^3$ التي تتكون من النقط التي تحقق $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

139.10 أوجد الصورة $G(S_2)$ لدائرة الوحدة S_2.

■ نضع $G(x,y,z) = (r,s,t)$:

$$(x + y + z,\ y - 2z,\ y - 3z) = (r, s, t) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + z &= r \\ y - 2z &= s \\ y - 3z &= t \end{aligned}$$

نحل من أجل x، y، z بدلالة r، s، t لنحصل على $x = r - 4s + 3t$، $y = 3s - 2t$، $z = s - t$. نعوض في $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ فنحصل على $(r - 4s + 3t)^2 + (3s - 2t)^2 + (s - t)^2 = 1$، $r^2 - 8rs + 16s^2 + 6rt - 38st + 14t^2 = 1$، أو $x^2 - 8xy + 26y^2 + 6xz - 38yz + 14z^2 = 1$ كلاهما $G(S_2)$.

140.10 أوجد قبل ـ الصورة $G^{-1}(S_2)$ لكرة الوحدة S_2.

■ نضع $G(x,y,z) = (r,s,t)$ حيث $(r,s,t) \in S_2$، أي حيث $r^2 + s^2 + t^2 = 1$. فنحصل على $x + y + z = r$، $y - 2z = s$، $y - 3z = t$. نعوض في $r^2 + s^2 + t^2 = 1$ فنحصل على $(x + y + z)^2 + (y - 2z)^2 + (y - 3z)^2 = 1$ أو $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz - 8yz + 14z^2 = 1$ وهي قبل ـ الصورة $G^{-1}(S_2)$.

141.10 أوجد قبل ـ الصورة $G^{-1}(H)$ حيث H المستوى $x + 2y - 3z = 4$.

■ نضع $G(x,y,z) = (r,s,t)$ حيث $r + 2s - 3t = 4$. نحصل على $x + y + z = r$، $y - 2z = s$، $y - 3z = t$. نعوض في $r + 2s - 3t = 4$ فنحصل على $(x + y + z) + 2(y - 2z) - 3(y - 3z) = 4$ أو $x - 12z = 4$ وهي $G^{-1}(H)$. [لاحظ أن $G^{-1}(H)$ مستوٍ هو أيضاً].

الفصل 11
فضاءات التطبيقات الخطية

1.11 عمليات التطبيقات الخطية

1.11 عرّف جمع تطبيقين خطيين.

■ لنفترض أن $F: V \to U$ و $G: V \to U$ تطبيقان خطيان لفضاءين متجهيين V و U فوق حقلٍ K. نعرّف المجموع F + G بأنه التطبيق من V إلى U الذي يقرن F(v) + G(v) بكل v ∈ V؛ أي أن (F + G)(v) = F(v) + G(v).

2.11 بيّن أنه إذا كان $F: V \to U$ و $G: V \to U$ خطيين، فإن F + G يكون خطّياً.

■ لدينا، من أجل أي متجهين u,w ∈ V، أي سلّميين a,b ∈ K، أن

$$\begin{aligned}(F + G)(av + bw) &= F(av + bw) + G(av + bw)\\ &= aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w)\\ &= a(F(v) + G(v)) + b(F(w) + G(w))\\ &= a(F + G)(v) + b(F + G)(w)\end{aligned}$$

وبذلك، يكون F + G خطياً.

3.11 عرّف جداء عدد سلّمي وتطبيق خطي.

■ لنفترض أن $F: V \to U$ تطبيق خطي لفضاءين متجهيين V و U فوق حقلٍ K. نعرّف، من أجل أي عدد k ∈ K، الجداء kF بأنه التطبيق من V إلى U الذي يقرن kF(v) بكل v ∈ V؛ أي أن (kF)(v) = kF(v).

4.11 بيّن أنه إذا كان $F: V \to U$، فإن kF يكون خطياً.

■ لدينا، من أجل أي متجهين v,w ∈ V وأي سلّميين a,b ∈ K:

$$(kF)(av + bw) = kF(av + bw) = k(aF(v) + bF(w)) = akF(v) + bkF(w) = a(kF)(v) + b(kF)(w)$$

وبذلك، يكون kF خطياً.

المسائل 5.11-18.11 تتعلق بالتطبيقات الخطية $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ، $G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ، $H: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرّفة بواسطة F(x,y,z) = (2x,y + z)، G(x,y,z) = (x − z,y)، و H(x,y) = (y,x).

5.11 أوجد (F + G)(v) حيث v = (2,3,4).

■ (F + G)(v) = F(v) + G(v) = F(2,3,4) + G(2,3,4) = (4,7) + (−2,3) = (2,10).

6.11 أوجد (3F)(v) حيث v = (2,3,4).

■ (3F)(v) = 3F(v) = 3F(2,3,4) = 3(4,7) = (12,21).

7.11 أوجد (2F − 5G)(w) حيث w = (5,1,3).

■ (2F − 5G)(w) = 2F(w) − 5G(w) = 2F(5,1,3) − 5G(5,1,3) = 2(10,4) − 5(2,1) = (20,8) + (−10,−5) = (10,3).

8.11 أوجد صيغة من أجل F + G.

■ (F + G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z) = (2x,y + z) + (x − z,y) = (3x − z,2y + z).

9.11 أوجد صيغة من أجل 3F.

■ $(3F)(x,y,z) = 3F(x,y,z) = 3(2x,y,z) = (6x,3y+3z)$.

10.11 أوجد صيغة من أجل $2F-5G$.

■
$$(2F-5G)(x,y,z) = 2F(x,y,z) - 5G(x,y,z) = 2(2x,\ y+z) - 5(x-z,\ y)$$
$$= (4x,\ 2y+2z) + (-5x+5z,\ -5y) = (-x+5x,\ -3y+2z)$$

11.11 أوجد $(H^\circ F)(v)$ حيث $v=(2,3,4)$.

■ $(H^\circ F)(v) = H(F(v)) = H(F(2,3,4)) = H(4,7) = (7,4)$.

12.11 أوجد صيغة من أجل $H^\circ F$.

■ $(H^\circ F)(x,y,z) = H(F(x,y,z)) = H(2x,y+z) = (y+z,2x)$.

13.11 أوجد $(H^\circ G)(v)$ حيث $v=(2,3,4)$.

■ $(H^\circ G)(v) = H(G(v)) = H(G(2,3,4)) = H(-2,3) = (3,-2)$.

14.11 أوجد صيغة من أجل $H^\circ G$.

■ $(H^\circ G)(x,y,z) = H(G(x,y,z)) = H(x-z,y) = (y,x-z)$.

15.11 أوجد صيغة من أجل $F+H$.

■ $F+H$ ليس معرّفاً لأن نطاقي F و H مختلفان.

16.11 أوجد صيغة من أجل $G^\circ F$.

■ $G^\circ F$ ليس معرّفاً لأن النطاق المصاحب لـ F ليس نطاقاً لـ G.

17.11 أوجد صيغة من أجل $5H$.

■ $(5H)(x,y) = 5H(x,y) = 5(y,x) = (5y,5x)$.

18.11 أوجد صيغة من أجل $H^2 = H^\circ H$.

■ $H^2(x,y) = H(H(x,y)) = H(y,x) = (x,y)$. بمعنى آخر، $H^2 = I$ هو التطبيق المحايد على $\mathbf{R}^2$.

المسائل 19.11-28.11 تتعلق بالتطبيقات $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ ، $G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ و $H:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$، المعرّفة بواسطة $F(x,y,z) = (y,x+z)$، $G(x,y,z) = (2z,x-y)$، $H(x,y) = (y,2x)$، والمتجهين $v=(4,-1,5)$ و $w=(3,4,1)$.

19.11 أوجد $(F+G)(V)$.

■
$$(F+G)(v) = F(v) + G(v) = F(4,-1,5) + G(4,-1,5) = (-1,9) + (10,5) = (9,14)$$

20.11 أوجد $(F+G)(w)$.

■ $(F+G)(w) = F(w) + G(w) = F(3,4,1) + G(3,4,1) = (4,4) + (2,-1) = (6,3)$.

21.11 أوجد صيغة من أجل $F+G$.

■ $(F+G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z) = (y,x+z) + (2z,x-y) = (y+2z,2x-y+z)$.

22.11 أوجد $(H^\circ F)(v)$.

■ $(H^\circ F)(v) = H(F(v)) = H(F(4,-1,5)) = H(-1,9) = (9,-2)$.

23.11 أوجد صيغة من أجل $H(^\circ F)(x,y,z) = H(F(x,y,z)) = H(y,x+z) = (x+z,2y)$.

24.11 أوجد $(H^\circ G)(w)$.

■ $(H^\circ G)(w) = H(G(w)) = H(G(3,4,1)) = H(2,1) = (-1,4)$.

25.11 أوجد صيغة من أجل $H^\circ G$.

■ $(H^\circ G)(x,y,z) = H(G(x,y,z)) = H(2z, x-y) = (x-y, 4z)$.

26.11 أوجد صيغة من أجل $H^\circ(F+G)$.

■ نستخدم المسألة 21.11:
$H^\circ(F+G)(x,y,z) = H((F+G)(x,y,z)) = H(y+2z, 2x-y+z) = (2x-y+z, 2y+4z)$.

27.11 أوجد صيغة $H^\circ F + H^\circ G$. قارن بالمسألة 26.11.

■ نستخدم المسألتين 23.11 و 25.11:
$(H^\circ F + H^\circ G)(x,y,z) = (H^\circ F)(x,y,z) + (H^\circ G)(x,y,z) = (x+z,2y) + (x-y,4z) = (2x-y+z, 2y+4z)$. نجد، من المسألة 26.11، أن $H^\circ(F+G) = H^\circ F + H^\circ G$.

28.11 أوجد صيغة من أجل $H^2 = H^\circ H$.

■ $H^2(x,y) = H(H(x,y)) = H(y,2x) = (2x,2y)$.

مبرهنة 1.11: لتكن V، U، W فضاءات متجهية فوق K. وليكن F' و F تطبيقين من V إلى U، وليكن G و G' تطبيقين من U إلى W؛ وليكن $k \in K$. إذن (i) $G^\circ(F+F') = G^\circ F + G^\circ F'$؛ (ii) $(G+G')^\circ F = G^\circ F + G'^\circ F$؛ (iii) $k(G^\circ F) = (kG)^\circ F = G^\circ(kF)$.

29.11 أثبت (i) في مبرهنة 1.11: $G^\circ(F+F') = G^\circ F + G^\circ F'$.

■ لدينا، من أجل كل $v \in V$، أن
$(G^\circ(F+F'))(v) = G((F+F')(v)) = G(F(v)+F'(v)) = G(F(v)) + G(F'(v)) = (G^\circ F)(v) + (G^\circ F')(v) = (G^\circ F + G^\circ F')(v)$
بما أن $(G^\circ(F+F'))(v) = (G^\circ F + G^\circ F')(v)$ من أجل كل $v \in V$، إذن $G^\circ(F+F') = G^\circ F + G^\circ F'$.

30.11 أثبت (ii) في مبرهنة 1.11:

$((G+G')^\circ F)(v) = (G+G')(F(v)) = G(F(v)) + G'(F(v)) = (G^\circ F)(v) + (G'^\circ F)(v) = (G^\circ F + G'^\circ F)(v)$، من أجل كل $v \in V$. بما أن $((G+G')^\circ F)(v) = (G^\circ F + G^\circ F')(v)$، من أجل كل $v \in V$، إذن: $(G+G')^\circ F = G^\circ F + G'^\circ F$.

31.11 أثبت (iii) في مبرهنة 1.11: $k(G^\circ F) = (kG^\circ F) = G^\circ(kF)$.

■ لدينا، من أجل كل $v \in V$، أن $k(G^\circ F))(v) = k(G^\circ F)(v) = k(G(f(v))) = (kG)(F(v)) = (kG^\circ F)(v)$
و $(k(G^\circ F))(v) = k(G^\circ F)(v) = k(G(F(v))) = G(kF(v)) = G((kF)(v)) = (G^\circ kF)(v)$. ينتج عن ذلك، أن $k(G^\circ F) = (kG)^\circ F = G^\circ(kF)$. (نؤكد هنا على أنه لكي نبيّن تساوي تطبيقين، علينا أن نبين أنهما يقرنان نفس الصورة بكل نقطة في النطاق).

32.11 لنفترض أن $F_1, F_2, \ldots, F_n$ تطبيقات خطية من V إلى U. بيّن أن
$(a_1F_1 + a_2F_2 + \ldots + a_nF_n)(v) = a_1F_1(v) + a_2F_2(v) + \ldots + a_nF_n(v)$، من أجل أي سلّميات $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وأي $v \in V$.

■ بما أن a_1F_1، $(a_1F_1)(v) = a_1F_1(v)$، فالنتيجة صحيحة من أجل $n = 1$. إذن، نحصل بالاستقراء، على
$(a_1F_1 + a_2F_2 + \ldots + a_nF_n)(v) = (a_1F_1)(v) + (a_2F_2 + \ldots + a_nF_n)(v) = a_1F_1(v) + a_2F_2(v) + \ldots + a_nF_n(v)$

2.11 الفضاء المتجهي للتطبيقات الخطية

مبرهنة 2.11: ليكن الفضاءان المتجهيان V و U فوق حقلٍ K. إذن، يشكل تجميع كل التطبيقات الخطية بعمليتي الجمع والضرب السلمي أعلاه، فضاءً متجهياً فوق k.

ملاحظة: يرمز عادة للفضاء، في مبرهنة 2.11، بـ Hom(V,U). [حيث اشتُقت Hom، هنا من كلمة تشاكل/ Homomorphism]. إن إثبات المبرهنة يختزل إلى تبيان أن Hom(V,U) يحقق الموضوعات الثماني لفضاء متجهي [قسم 1.7]. في البرهان [المسائل 33.11-40.11] ترمز F، G، H إلى عناصر في Hom(V,U) ، و k، a، b ترمز إلى سلميات في K].

33.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[A_1]$: $(F + G) + H = F + (G + H)$.

■ لدينا، من أجل $v\in V$، أن

$((F + G) + H(v) = (F + G)(v) + H(v) = (F(v) + G(v)) + H(v) = F(v) + (G(v) + H(v)) = F(v) + (G + H)(v) = (F + (G + H))(v)$. وبذلك، $(F + G) + H = F + (G + H)$. إذن، تتحقق $[A_1]$ في Hom(V,U).

34.11 أثبت أن Hom(V,U) تحقق $[A_2]$: يوجد عنصر صفري 0 بحيث أن $F + 0 = F$.

■ ليكن 0 يرمز إلى التطبيق الخطي $0(v) = 0$ من أجل كل $v \in V$. إذن، لدينا من أجل كل $v \in V$. $(F + 0)(v) = F(v) + 0(v) = F(v) + 0 = F(v)$. بما أن $(F + 0)(v) = F(v)$ من أجل كل $v \in V$، إذن $F + 0 = F$.

35.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[A_3]$: من أجل كل $F \in Hom(V,U)$، يوجد عنصر $-F \in Hom(V,U)$ ـ بحيث أن $F + (-F) = 0$.

■ ليكن $-F$ التطبيق $(-1)F$. إذن، من أجل كل $v \in V$،

$$F +(-F))(v) = (F +(-1)F)(v) = F(v) + (-1)F(v) = F(v) - F(v) = 0 = 0(v)$$

36.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[A_4]$: $F + G = G + F$.

■ لدينا، من أجل كل $v \in V$، أن $(F + G)(v) = F(v) + G(v) = G(v) + F(v) = (G + F)(v)$. وبالتالي، $F + G = G + F$.

37.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[M_1]$: $k(F + G) = kF + kG$.

■ لدينا، من أجل كل $v\in V$، أن

$k(F + G))(v) = k[(F + G)(v)] = k[F(v) + G(v)] = kF(v) + kG(v) = (kF)(v) + (kG)(v) = (kF + kG)(v)$، وبذلك، $k(F + G) = kF + kG$.

38.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[M_2]$: $(a + b)F = aF + bF$.

■ لدينا، من أجل كل $v\in V$، أن

$((a + b)F)(v) = (a + b)[F(v)] = aF(v) + bF(v) = (aF)(v) + (bF)(v) = (aF + bF)(v)$. وبذلك $(a + b)F = aF + bF$.

39.11 أثبت أن Hom(V,U) يحقق $[M_3]$: $(ab)F = a(bF)$.

■ لدينا من أجل كل $v \in V$، أن $((ab)F)(v) = (ab)[F(v)] = a(bF(v)) = a[(bF)(v)] = (a(bF))(v)$. وبذلك $(ab)F = a(bF)$.

40.11 أثبت أن $\text{Hom}(V,U)$ يحقق $[M_4]$: $1F = F$.

■ لدينا، من أجل كل $v \in V$، أن $(1F)(v) = 1[F(v)] = F(v)$. إذن، $1F = F$.

المسـائل 41.11-46.11 تتعلق بالتطبيقات الخطية $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرّفة بواسطة $F(x,y,z) = (x + y + z, x + y)$، $G(x,y,z) = (2x + z, x + y)$، $H(x,y,z) = (2y,x)$.

41.11 إلى أي فضاء متجهي (إن وجد) تنتمي F، G، و H؟

■ تنتمي F، G، H إلى $\text{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ لأنها تطبيقات خطية من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^2$.

42.11 أوجد صيغة من أجل $F + G$.

■ $(F + G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z) = (x + y + z, x + y) + (2x + z, x + y) = (3x + y + 2z, 2x + 2y)$.

43.11 أوجد صيغة من أجل $F + H$.

■ $(F + H)(x,y,z) = F(x,y,z) + H(x,y,z) = (x + y + z, x + y) + (2y,x) = (x + 3y + z, 2x + y)$.

44.11 أوجد صيغة من أجل $G \circ F$.

■ $G \circ F$ ليس معرّفاً لأن النطاق ـ المصاحب لـ F ليس نطاقاً لـ G.

45.11 أوجد صيغة من أجل $3G + 2H$.

■ $(3G + 2H)(x,y,z) = 3G(x,y,z) + 2H(x,y,z) = 3(2x + z, x + y) + 2(2y,x) = (6x + 4y + 3z, 5x + 3y)$.

46.11 بيّن أن F، G، H مستقلة خطياً [كعناصر في الفضاء المتجهي $\text{Hom}(V,U)$].

■ نفترض أن

$$aF + bG + cH = \mathbf{0} \quad (1)$$

من أجل سلّميات $a,b,c \in K$. [$\mathbf{0}$ هنا التطبيق الصفري]. لدينا، من أجل $e_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$، أن

$$(aF + bG + cH)(e_1) = aF(1,0,0) + bG(1,0,0) + cH(1,0,0) = a(1,1) + b(2,1) + c(0,1) = (a + 2b, a + b + c)$$

و $\mathbf{0}(e_1) = (0,0)$. إذن، وبسبب (1)، يكون $(a + 2b, a + b + c) = (0,0)$، وبذلك

$$a + b + c = 0 \quad \text{و} \quad a + 2b = 0 \quad (2)$$

وبالمثل من أجل $e_2 = (0,1,0) \in \mathbb{R}^2$، لدينا

$$(aF + bG + cH)(e_2) = aF(0,1,0) + bG(0,1,0) + cH(0,1,0) = a(1,1) + b(0,1) + c(2,0) = (a + 2c, a + b) = \mathbf{0}(e_2) = (0,0)$$

إذن

$$a + b = 0 \quad \text{و} \quad a + 2c = 0 \quad (3)$$

نستخدم (2) و (3) فنحصل على

$$c = 0 \qquad b = 0 \qquad a = 0 \quad (4)$$

بما أن (1) تقتضي (4)، فإن التطبيقات F، G، H مستقلة خطياً.

مبرهنة 3.11: لنفترض أن $\dim V = m$ و $\dim U = n$، إذن $\dim \text{Hom}(V,U) = mn$.

47.11 أثبت مبرهنة 3.11.

■ لنفترض أن $\{v_1,...,v_m\}$ قاعدة لـ V و $\{u_1,...,u_n\}$ قاعدة لـ U. نعرف، من مبرهنة 1.10، أن تطبيقاً خطياً في $\text{Hom}(V,U)$ يتحدد بشكل وحيد بأن نقرن إختيارياً عناصر في U بعناصر القاعدة v_i لـ V. نعرّف

$$F_{ij} \in \mathrm{Hom}(V, U) \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

ليكون التطبيق الذي يحقق $F_{ij}(v_i) = u_j$ و $F_{ij}(v_k) = 0$ من أجل $k \neq i$. أي أن، F_{ij} يطبق v_i إلى u_j ويطبق بقية الـ v إلى 0. لاحظ أن $\{F_{ij}\}$ تحتوي تماماً mn عنصراً؛ وبالتالي، تكون المبرهنة مثبتة إذا بينا أنها قاعدة لـ Hom(V,U).

إثبات أن $\{F_{ij}\}$ تولّد Hom(V,U): ليكن $F \in \mathrm{Hom}(V,U)$، ولنفترض أن $F(v_2) = w_2, \ldots, F(v_m) = w_m$. بما أن $w_k \in U$، فهو تركيب خطي للـ u؛ مثلاً

$$w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n \qquad k = 1, \ldots, m,\ a_{ij} \in K \tag{1}$$

ننظر الآن في التطبيق الخطي $G = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_{ij}$. بما أن G تركيبة خطية في الـ F_{ij}، فإن برهان أن $\{F_{ij}\}$ تولّد Hom(V,U) يكون تاماً إذا نحن بيّنا أن $F = G$.

نحسب الآن $G(v_k)$، $k = 1,\ldots,m$. بما أن $F_{ij}(v_k) = 0$ من أجل $k \neq i$، و $F_{ki}(v_k) = u_i$، إذن

$$G(v_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}F_{kj}(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}u_j = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n$$

إذن، وبواسطة (1)، $G(v_k) = w_k$ من أجل كل k. ولكن $F(v_k) = w_k$ من أجل كل k. ينتج عن ذلك، من النظرية 1.10، أن $F = G$؛ وبالتالي، $\{F_{ij}\}$ تولّد Hom(V,U).

إثبات أن $\{F_{ij}\}$ مستقلة خطياً: لنفترض أنه، من أجل سلّميات $a_{ij} \in K$،

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_{ij} = 0$$

إذن، من أجل $v_k, k = 1,\ldots,m$

$$0 = 0(v_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}F_{kj}(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}u_j = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n$$

ولكن الـ u_i مستقلة خطياً؛ وبالتالي، يكون لدينا $a_{k1} = 0$، $a_{k2} = 0, \ldots$، $a_{kn} = 0$، من أجل $k = 1,\ldots,m$. بمعنى آخر، كل الـ $a_{ij} = 0$، وبذلك تكون $\{F_{ij}\}$ مستقلة خطياً.

إذن، $\{F_{ij}\}$ قاعدة من أجل Hom(V,U)؛ وبالتالي، $\dim \mathrm{Hom}(V,U) = mn$.

48.11 أوجد بُعْد $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$.

■ بما أن $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ و $\dim \mathbf{R}^2 = 2$. يكون لدينا [مبرهنة 3.11] $\dim(\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)) = 3.2 = 6$.

49.11 أوجد بعد $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^3,\mathbf{R}^2)$.

■ $\mathbf{C}^3$ فضاء متجهي فوق C، و $\mathbf{R}^2$ فضاءٌ متجهي فوق R؛ وبالتالي، فإن $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^3,\mathbf{R}^2)$ غير موجود.

50.11 لننظر إلى $V = \mathbf{C}^3$ على أنه فضاء متجهي فوق R. أوجد بعد $\mathrm{Hom}(V,\mathbf{R}^2)$.

■ إن $V = \mathbf{C}^2$، باعتباره فضاءً متجهياً فوق R، له بعد 6. وبالتالي [مبرهنة 3.11]، $\dim(\mathrm{Hom}(V,\mathbf{R}^2)) = 6.2 = 12$.

3.11 جبر التطبيقات الخطية

يدرس هذا القسم الحالة الخاصة للتطبيقات الخطية $T: V \to V$ والتي تسمى أيضاً «المؤثرات الخطية» أو «التحويلات الخطية» على V. وسوف نكتب A(V)، بدلاً من Hom(V,V)، من أجل فضاء كل هذه التطبيقات.

51.11 عرِّف جَبْراً وجبراً تجميعياً فوق حقل K.

■ نعرّف «جبراً» A فوق حقلٍ K بأنه فَضاء متجهي فوق K معرّف عليه عملية ضرب تحقق، من أجل كل $F,G,H \in A$، وكل $k \in K$

$$F(G+H) = FG + FH \quad \text{و} \quad (G+H)F = GF + HF \tag{1}$$

$$K(GF) = (kG)F = G(kF) \tag{2}$$

وهي قوانين التوزيع. إذا تحقق قانون التجميع أيضاً من أجل الضرب، أي

$$(FG)H = F(GH) \tag{3}$$

من أجل كل $F,G,H \in A$، فنقول أن الجبر A «تجميعي». [إذا تحقق قانون التبديل أيضاً من أجل الضرب، أي

$$FG = GF \tag{4}$$

من أجل كل $F,G \in A$، فيقال أن الجبر «تبديلي»].

52.11 بيِّن أن $A(V)$ يمكن أن ينظر إليه على أنه جبر فوق الحقل القاعدة K.

■ إن التركيب $G^\circ F$ لتطبيق خطيين $F,G \in A(V)$ معرّف وخطي، وينتمي إلى $A(V)$. نعرف، من مبرهنة 1.11، أن عملية التركيب تحقق الخواص في المسألة 51.11. وبذلك، يكون $A(V)$ جبراً تجميعياً فوق K بالنسبة لتطبيقات التركيب؛ لذلك، يسمى غالباً «جبر المؤثرات الخطية» فوق V. [سوف نكتب GF من أجل $G^\circ F$ في الفضاء $A(V)$].

53.11 نقول عن جبرٍ A بأن له «عنصراً محايداً» 1 إذا $1.a = a.1 = a$ من أجل كل $a \in A$. بيِّن أن لـ $A(V)$ عنصراً محايداً.

■ إن التطبيق المحايد $I: V \to V$ ينتمي إلى $A(V)$. كما أن لدينا $TI = IT = T$ من أجل كل $T \in A(V)$. وبذلك، يكون التطبيق المحايد I عنصراً محايداً من أجل الجبر $A(V)$.

54.11 أيٌّ من الأعداد الصحيحة التالية يمكن أن يكون بعداً لجبرٍ $A(V)$ للتطبيقات الخطية: 5، 9، 18، 25، 31، 36، 44، 64، 88، 100؟

■ لنفترض أن $\dim V = n$، إذن $\dim (A(V)) = n^2$. بذلك؛ وحدها الأعداد الصحيحة المربعة التي يمكن أن تكون بعداً لـ $A(V)$، أي 9، 25، 36، 64، 100.

55.11 ليكن T عنصراً في $A(V)$. عرِّف القوى $T^2, T^3, \ldots$ للتطبيق الخطي T.

■ بما أن التركيب هو عملية الضرب في $A(V)$، فيكون لدينا $T^2 = T \circ T$ ، $T^3 = T \circ T \circ T, \ldots$.

المسائل 56.11-61.11 تتعلق بالمؤثرين الخطيين $S,T \in A(R^2)$ المعرفين بواسطة $S(x,y) = (y,x)$ و $T(x,y) = (0,x)$.

56.11 أوجد صيغة من أجل $S + T$.

■ $(S + T)(x,y) = S(x,y) + T(x,y) = (y,x) + (0,x) = (y,2x)$.

57.11 أوجد صيغة من أجل $2S - 3T$.

■ $(2S - 3T)(x,y) = 2S(x,y) - 3T(x,y) = 2(y,x) - 3(0,x) = (2y,-x)$.

58.11 أوجد صيغة من أجل ST.

■ $(ST)(x,y) = S(T(x,y)) = S(0,x) = (x,0)$.

59.11 أوجد صيغة من أجل TS.

■ $(TS)(x,y) = T(S(x,y)) = T(y,x) = (0,y)$.

60.11 أوجد صيغة من أجل S^2.

■ $S^2(x,y) = S(S(x,y)) = S(y,x) = (x,y)$. لاحظ أن $S^2 = I$، هو التطبيق المحايد.

61.11 أوجد صيغة من أجل T^2.

■ $T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(0,x) = (0,0)$. لاحظ أن $T^2 = 0$ هو التطبيق الصفري.

المسائل 62.11-64.11 تتعلق بالمؤثرين الخطيين $S,T \in A(\mathbf{R}^2)$ المعرّفين بواسطة $S(x,y) = (0,x)$ و $T(x,y) = (x,0)$.

62.11 بيِّن أن $TS = 0$.

■ $(TS)(x,y) = T(S(x,y)) = T(0,x) = (0,0)$. بما أن TS يقرن $0 = (0,0)$ بكل $(x,y) \in \mathbf{R}^2$، فإنه يكون التطبيق الصفري: $TS = 0$.

63.11 بيِّن أن $ST \neq 0$.

■ $(ST)(x,y) = S(T(x,y)) = S(x,0) = (0,x)$. مثلاً، $(ST)(4,2) = (0,4)$. إذن، $ST \neq 0$ لأنها لا تقرن $0 = (0,0)$ بكل عنصر في $\mathbf{R}^2$.

64.11 بيِّن أن $T^2 = T$.

■ $T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,0) = (x,0) = T(x,y)$. وبالتالي، $T^2 = T$.

المسائل 65.11-70.11 تتعلق بالمؤثرين الخطيين $S,T \in A(\mathbf{R}^2)$ المعرّفين بواسطة $S(x,y) = (x + y,0)$ و $T(x,y) = (-y,x)$.

65.11 أوجد صيغة من أجل $S + T$.

■ $(S + T)(x,y) = S(x,y) + T(x,y) = (x + y,0) + (-y,x) = (x,x)$.

66.11 أوجد صيغة من أجل $5S - 3T$.

■ $(5S - 3T)(x,y) = 5S(x,y) - 3T(x,y) = 5(x + y,0) - 3(-y,x) = (5x + 5y,0) + (3y,-3x) = (5x + 8y,-3x)$.

67.11 أوجد صيغة من أجل ST.

■ $(ST)(x,y) = S(T(x,y)) = S(-y,x) = (x - y,0)$.

68.11 أوجد صيغة من أجل TS.

■ $(TS)(x,y) = T(S(x,y)) = T(x + y,0) = (0,x + y)$.

69.11 بيِّن أن $S^2 = S$.

■ $S^2(x,y) = S(S(x,y)) = S(x + y,0) = (x + y,0) = S(x,y)$. إذن، $S^2 = S$.

70.11 بيِّن أن $T^2 = -I$، حيث I المؤثر المحايد.

■ $T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(-y,x) = (-x,-y) = -(x,y) = -I(x,y)$. إذن، $T^2 = -I$.

71.11 لتكن حدودية $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ فوق K، أي أن $a_i \in K$. عرِّف المؤثر $p(T)$ حيث $T \in A(V)$.

■ يعرَّف المؤثر $P(T)$ بواسطة $p(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + ... + a_nT^n$. [من أجل سلّمي $k \in K$، يرمز غالباً للمؤثر kI بواسطة k فقط]. لدينا، بشكل خاص، انه إذا $p(T) = 0$ التطبيق الصفري، فإن T يقال عنها انها «صفر» الحدودية $p(x)$.

المسائل 72.11-77.11 تتعلق بالمؤثر الخطي T على $\mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $T(x,y) = (x + 2y,3x + 4y)$.

72.11 أوجد صيغة من أجل T^2.

■
$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x + 2y, 3x + 4y)$$
$$= [(x + 2y) + 2(3x + 4y),\ 3(x + 2y) + 4(3x + 4y)] = (7x + 10y,\ 15x + 22y)$$

73.11 أوجد صيغة من أجل T^3.

■

$$T^3(x, y) = T(T^2(x, y)) = T(7x + 10y, 15x + 22y)$$
$$= [(7x + 10y) + 2(15x + 22y), 3(7x + 10y) + 4(15x + 22y)] = (37x + 54y, 81x + 118y)$$

74.11 أوجد $f(T)$ حيث $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

■ لدينا، تعريفاً، أن $f(T) = T^2 - 3T + 4I$. إذن

$$f(T)(x, y) = (T^2 - 3T + 4I)(x, y) = T^2(x, y) - 3T(x, y) + 4I(x, y)$$
$$= (7x + 10y, 15x + 22y) + (-3x - 6y, -9x - 12y) + (4x, 4y)$$
$$= (8x + 4y, 6x + 14y)$$

75.11 هل T جذر لـ $f(x) = x^2 - 3x + 4$؟

■ لا، لأن $f(t)$ ليس التطبيق الخطي.

76.11 أوجد $g(T)$ حيث $g(x) = x^2 - 5x - 2$.

■

$$g(T)(x, y) = (T^2 - 5T - 2I)(x, y) = T^2(x, y) - 5T(x, y) - 2I(x, y)$$
$$= (7x + 10y, 15x + 22y) + (-5x - 10y, -15x - 20y) + (-2x, -2y) = (0, 0)$$

77.11 هل T جذر لـ $g(x) = x^2 - 5x - 2$؟

■ نعم، لأن $g(T) = 0$ التطبيق الصفري.

78.11 ليكن $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرّفاً بواسطة $T(x,y,z) = (0,x,y)$. أوجد $f(T)$ حيث $f(x) = x + 1$.

■ $f(T)(x,y,z) = (T + I)(x,y,z) = (0,x,y) + (x,y,z) = (x,x + y,y + z)$.

79.11 بين أن T في المسألة 78.11 جذرٌ لـ $p(x) = x^3$.

■ $T^3(x,y,z) = T^2(0,x,y) = T(0,0,x) = (0,0,0)$. بما أن $T^3 = 0$، إذن T جذر لـ $p(x) = x^3$.

المسائل 80.11-82.11 تتعلق بمؤثر خطي E في $A(V)$ يحقق $E^2 = E$ [مؤثر مثل هذا يصطلح عليه بـ «إسقاط».]

80.11 لتكن U صورة E. بيِّن أنه إذا $u \in U$، إذن $E(u) = u$؛ أي أن E هو التطبيق المحايد على U.

■ إذا كان $u \in U$ صورة E، إذن $E(v) = u$ من أجل قيمة ما $v \in V$. إذن وباستخدام $E^2 = E$، نحصل على $u = E(V) = E^2(v) = E(E(V)) = EN$.

81.11 بيّن أنه إذا $E \neq I$، فإن E يكون شاذاً؛ أي أن $E(v) = 0$ من أجل بعض $v \neq 0$.

■ إذا $E \neq I$، فيكون لدينا $E(v) = u$ من أجل بعض $v \in V$، حيث $v \neq u$. وبالتالي، $u \in U$ (حيث U صورة E)، وبذلك $E(u) = u$. إذن، $E(v - u) = E(v) - E(u) = u - u = 0$ حيث $v - u \neq 0$.

82.11 بيِّن أن $V = U \oplus W$ حيث U صورة E و W نواة E.

■ نبين أولاً أن $V = U + W$. ليكن $v \in V$. نضع $u = E(v)$ و $w = v - E(v)$. إذن، $v = E(v) + v - E(v) = u + w$. لدينا من التعريف، أن $u = E(v)$ في U (صورة E). نبيِّن الآن أن w ينتمي إلى W (نواة E):

$$E(w) = E(v - E(v)) = E(v) - E^2(v) = E(v) - E(v) = 0$$

وبذلك، $w \in W$. وبالتالي، $V = U + W$.

نبين في الخطوة التالية أن $U \cap W = \{0\}$. ليكن $v \in U \cap W$. بما أن $v \in U$، إذن $E(v) = v$. بما أن $v \in W$، إذن $E(v) = 0$. وبذلك، $v = E(v) = 0$، أي أن $U \cap W = \{0\}$.

الخاصيتان أعلاه تقتضيان $V = U \oplus W$.

المسائل 83.11-87.11 تتعلق بمؤثرين خطيين E_1 و E_2 على فضاء متجهي $V = U \oplus W$ معرفين بواسطة $E_1(v) = u$، $E_2(v) = w$، حيث $v = u + w$، $u \in U$، $w \in W$.

83.11 بيِّن أن $E_1^2 = E_1$.

■ من أجل كل $v = u + w$ في V. $E_1^2(v) = E_1(E_1(v)) = E_1(u) = E_1(u + 0) = u = E_1(v)$ إذن، $E_1^2 = E_2$.

84.11 بيِّن أن $E_2^2 = E_2$.

■ من أجل كل $v = u + w$، في V. $E_2^2(v) = E_2(E_2(v)) = E_2(w) = E_2(0 + w) + w = E_2(v)$ إذن، $E_2^2 = E_2$.

85.11 بيِّن أن $E_1E_2 = 0$.

■ من أجل كل $v = u + w$، في V . $E_2E_1(v) = E_1(w) = E_1(0 + w) = 0 = 0(v)$ إذن، $E_1E_2 = 0$.

86.11 بيِّن أن $E_2E_1 = 0$.

■ لدينا $E_2E_1(v) = E_2(u) = E_2(u + 0) = 0 = 0(v)$، من أجل كل $v = u + w$ في V. إذن $E_2E_1 = 0$.

87.11 بيِّن أن $E_1 + E_2 = 1$.

■ لدينا $(E_1 + E_2)(v) = E_1(v) + E_2(v) = u + w = v = I(v)$، من أجل كل $v = u + w$ في V. إذن، $E_1 + E_2 = I$.

المسائل 88.11-91.11 تتعلق بالفضاء المتجهي لكل الحدوديات الحقيقية (في t).

88.11 هل يكون V جبراً فوق **R**؟

■ V يكون جبراً، تحت عملية الضرب العادية للحدوديات.

89.11 هل V جبر تجميعي؟

■ بما أن عملية ضرب الحدوديات تجمعية، فإن V يكون جبراً تجميعياً.

90.11 هل V جبر تبديلي؟

■ بما أن عملية ضرب الحدوديات تبديلية، أي أن $f(t)g(t) = g(t)f(t)$، فإن V يكون تبديلياً.

91.11 هل لـ V عنصر محايد؟

■ نعم؛ الحدودية الثابتة $f(t) = 1$ عنصر محايد من أجل V.

المسائل 92.11-95.11 تتعلق بالفضاء المتجهي M لكل المصفوفة المربعة -n الحقيقية.

92.11 هل M جبر فوق **R**؟

■ يكون M جبراً، تحت عملية ضرب المصفوفات.

93.11 هل M جبر تجميعي؟

■ نعم، لأن عملية ضرب المصفوفات تجميعية.

94.11 هل M جبر تبديلي؟

■ إذا $n > 1$، لا يكون M تبديلياً، لأنه توجد مصفوفات $A, B \in M$ بحيث أن $AB \neq BA$.

95.11 هل لـ M عنصر محايد؟

■ المصفوفة المطابقة I هي عنصر محايد من أجل $AI = IA = A$، من أجل كل $A \in M$.

96.11 بيِّن كيف يمكن جعل أي فضاء متجهي V جبراً.

■ نعرّف $uv = 0$ من أجل أي $u,v \in V$. إذن، يكون V جبراً.

4.11 المؤثرات العكوسة

97.11 عرِّف مؤثراً عكوساً في $A(V)$ الذي هو تجميع كل التطبيقات الخطية من V إلى V.

■ نقول عن مؤثر خطي $T: V \to V$ بأنه «عكوس» إذا كان له معكوس، أي إذا وجد $T^{-1} \in A(V)$ بحيث أن $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

مبرهنة 4.11: يكون مؤثر خطي $T: V \to V$، على فضاء متجهي منته البعد، إذا وفقط إذا كان غير ـ شاذ.

98.11 أثبت مبرهنة 4.11.

■ يكون T عكوساً إذا وفقط إذا كان واحداً ـ لواحد وفوقياً. وبذلك، وعلى الخصوص، إذا كان T عكوساً فإن وحده $0 \in V$ الذي يمكن أن يطبق على نفسه، أي أن T غير ـ شاذ. نفترض، من جهة أخرى، أن T غير ـ شاذ، أي أن $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$. نعرف، من مسألة 102.10، أن T يكون أيضاً واحداً ـ لواحد. بالإضافة إلى ذلك، وبافتراض أن V منته البعد، يكون لدينا بواسطة مبرهنة 2.10، أن

$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, T) + \dim(\mathrm{Ker}\, T) = \dim(\mathrm{Im}\, T) + \dim(\{0\}) = \dim(\mathrm{Im}\, T) + 0 = \dim(\mathrm{Im}\, T)$. إذن، $\mathrm{Im}\, T = V$، أي أن صورة T هي V؛ وبذلك، يكون T فوقياً. وبالتالي، يكون T واحداً ـ لواحد وفوقياً في آنٍ معاً، وبذلك يكون عكوساً.

99.11 بيِّن أن شرط كون V ذا بعد منته ضروري في مبرهنة 4.11.

■ ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات فوق K، وليكن T المؤثر على V المعرّف بواسطة $T(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = a_0t + a_1t^2 + \ldots + a_nt^{n+1}$، أي أن T تزيد أس t في كل حدّ بمقدار 1. الآن، T تطبيق خطي وغير ـ شاذ. ورغم ذلك، فإن T ليس فوقياً وليس عكوساً.

المسائل 100.11-104.11 تتعلق بالمؤثر الخطي T على R^2 المعرّف بواسطة $T(x,y) = (y,2x - y)$.

100.11 بيِّن أن T مؤثر عكوس.

■ نعرف، من مبرهنة 4.11، أننا نحتاج فقط لتبيان أن T غير شاذ، أي أن $T^{-1}(0,0) = (0,0)$. نضع $T(x,y) = (0,0)$ ثم نحل من أجل x و y. يكون لدينا $T(x,y) = (y,2x - y) = (0,0)$ أو $2x - y = 0$، $y = 0$. الحل الوحيد هو $x = 0$، $y = 0$. وبذلك، يكون $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$، أي أن T غير شاذ؛ وبالتالي، يكون T عكوساً.

101.11 أوجد صيغة من أجل T^{-1}.

■ نضع $T(x,y) = (s,t)$، وبالتالي $T^{-1}(s,t) = (x,y)$. ويكون لدينا $T(x,y) = (y,2x - y) = (s,t)$ أي أن $y = s$، $2x - y = t$. نحل من أجل x و y بدلالة s و t، فنحصل على $x = 1/2\, s + 1/2\, t$، $y = s$. وبذلك، يكون T^{-1} معطى بالصيغة $T^{-1}(s,t) = (1/2\, s + 1/2\, t, s)$.

102.11 أوجد $T(6,2)$.

■ إستخدم الصيغة من أجل T للحصول على $T(6,2) = (2,12 - 2) = (2,10)$.

103.11 أوجد $T^{-1}(6,2)$.

■ استخدم الصيغة من أجل T^{-1} للحصول على $T^{-1}(6,2) = (3 + 1,6) = (4,6)$.

104.11 أوجد $T^{-1}(L)$ حيث L المستقيم $y = x$.

■ نضع $s = t$ في الصيغة من أجل T^{-1}، فنحصل على $T^{-1}(s,s) = (s,s)$. إذن، $T^{-1}(L) = L$.

المسائل 105.11-108.11 تتعلق بالمؤثر الخطِّي T على $\mathbf{R}^3$ المعرَّف بواسطة

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$$

105.11 بيِّن أن T عكوس.

■ ليكن $W = \text{Ker}\, T$. نحتاج فقط أن نبين أن T غير شاذ، أي أن $W = \{0\}$. نضع $T(x,y,z) = (0,0,0)$؛ أي أن $T(x,y,z) = (2x,4x - y,2x + 3y - z) = (0,0,0)$. وبذلك، يكون W الفضاء الحلِّي للمنظومة المتجانسة $2x = 0$، $4x - y = 0$، $2x + 3y - z = 0$، والتي لها الحل التافه $(0,0,0)$ فقط. وبذلك، $W = \{0\}$؛ إذن، T غير شاذ ويكون بذلك عكوساً.

106.11 أوجد صيغة من أجل T^{-1}.

■ نضع $T(x,y,z) = (r,s,t)$، [وبذلك $T^{-1}(r,s,t) = (x,y,z)$]. ويكون لدينا $(2x,4x - y,2x + 3y - z) = (r,s,t)$ أو $2x = r$، $4x - y = s$، $2x + 3y - z = t$. نحلّ من أجل x، y، z بدلالة r، s، t فنحصل على $x = 1/2\, r$، $y = 2r - s$، $z = 7r - 3s - t$. وبذلك، $T^{-1}(r,s,t) = (1/2\, r - s, 7r - 3s - t)$.

107.11 أوجد $T^{-1}(2,4,6)$.

■ نستخدم الصيغة من أجل T^{-1} فنحصل على $T^{-1}(2,4,6) = (1,4 - 4,14 - 12 - 6) = (1,0,-4)$.

108.11 أوجد صيغة من أجل T^{-2}.

■ نطبق T^{-1} مرتين فنحصل على

$$\begin{aligned} T^{-2}(r, s, t) &= T^{-1}(\tfrac{1}{2}r, 2r - s, 7r - 3s - t) \\ &= (\tfrac{1}{4}r, r - (2r - s), \tfrac{7}{2}r - 3(2r - s) - (7r - 3s - t)) \\ &= (\tfrac{1}{4}r, -r + s, -\tfrac{19}{2}r + 6s + t) \end{aligned}$$

المسائل 109.11-111.11 تتعلق بالمؤثر الخطي T على $\mathbf{R}^3$ المعرَّف بواسطة

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$$

109.11 بيِّن أن T عكوس.

■ نبيِّن أن T غير شاذ. نضع $T(x,y,z) = (0,0,0)$ فنحصل على المنظومة المثلثية المتجانسة $x - 3y - 2z = 0$، $y - 4z = 0$، $z = 0$. وبالتالي، يكون T غير شاذ، أي أن T عكوس.

110.11 أوجد صيغة من أجل T^{-1}.

■ نضع $T(x,y,z) = (r,s,t)$، فنحصل على $x - 3y - 2z = r$، $y - 4z = s$، $z = t$. نحل من أجل x، y، z بدلالة r، s، t فنحصل على $x = r + 3s + 14t$، $y = s + 4t$، $z = t$ وبذلك، $T^{-1}(r,s,t) = (r + 3s + 14t, s + 4t, t)$ أو $T^{-1}(x,y,z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$.

111.11 أوجد $T^{-1}(1,2,3)$.

■ نستخدم الصيغة من أجل T^{-1} فنحصل على $T^{-1}(1,2,3) = (1 + 6 + 42, 2 + 12, 3) = (49,14,3)$.

المسائل 112.11-114.11 تتعلق بالمؤثر الخطي T على $\mathbf{R}^3$ المعرَّف بواسطة $T(x,y,z) = (x + z, x - z, y)$.

112.11 بيِّن أن T مؤثر عكوس.

■ نضع $T(x,y,z) = (0,0,0)$، فنحصل على المنظومة المتجانسة $x + z = 0$، $x - z = 0$، $y = 0$، والتي حلّها الوحيد $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$. إذن، يكون T غير شاذ، وبذلك يكون عكوساً.

113.11 أوجد صيغة من أجل T^{-1}.

■ نضع $T(x,y,z) = (r,s,t)$. فنحصل على $x + z = r$، $x - z = s$، $y = t$. نحلّ من أجل x، y، z فنجد أن $x = 1/2\,r + 1/2\,s$، $y = t$، $z = 1/2\,r - 1/2\,s$. إذن، $T^{-1}(r,s,t) = (1/2\,r + 1/2\,s, t, 1/2\,r - 1/2\,s)$ أو $T^{-1}(x,y,z) = (1/2\,x + 1/2\,y, z, 1/2\,x - 1/2\,y)$.

114.11 أوجد $T^{-1}(2,4,6)$.

■ استخدم الصيغة من أجل T^{-1} لتحصل على $T^{-1}(2,4,6) = (1 + 2, 6, 1 - 2) = (3,6,-1)$.

المسائل 115.11-118.11 تتعلق بالمؤثر الخطي T على $\mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة $T(x,y) = (2x + 4y, 3x + 6y)$.

115.11 أوجد صيغة من أجل T^{-1}.

■ T مؤثر شاذ، لأن $T(2,-1) = (0,0)$ مثلاً؛ وبالتالي، المؤثر الخطي $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ غير موجود.

116.11 أوجد $T^{-1}(8,12)$.

■ $T^{-1}(8,12)$ هو قبل ـ الصورة لـ $(8,12)$ تحت T. نضع $T(x,y) = (8,12)$، فنحصل على المنظومة

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 3x + 6y &= 12 \end{aligned} \qquad \text{أو} \qquad x + 2y = 4$$

هنا، y هو المتغير الحر. نضع $y = a$، حيث a وسيط، فنحصل على الحل $x = -2a + 4$، $y = a$. وبذلك يكون $T^{-1}(8,12) = \{(-2a + 4, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

117.11 أوجد $T^{-1}(1,2)$.

■ نضع $T(x,y) = (1,2)$ فنحصل على المنظومة $2x + 4y = 1$، $3x + 6y = 2$. المنظومة ليس لها حلّ. وبذلك، يكون $T^{-1}(1,2) = \emptyset$، أي المجموعة الخالية.

118.11 هل T دالة فوقية؟

■ لا؛ لأنه ليس لـ $(1,2)$، مثلاً، قبل ـ صورة.

119.11 ليكن V ذا بعد منته، وليكن T مؤثراً خطياً على V. تذكر أن T يكون عكوساً إذا وفقط إذا كان T غير ـ شاذ وواحداً ـ لواحد. بيِّن أن T يكون عكوساً إذا وفقط إذا كان فوقياً.

■ نعرف، من مبرهنة 2.10 أن $\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$. وبالتالي، فإن القضايا التالية متكافئة: (i) T فوقي، (ii) $\operatorname{Im} T = V$، (iii) $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$، (iv) $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$، (v) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$، (vi) T غير ـ شاذ، (vii) T عكوس.

120.11 ليكن V ذا بعدٍ منته، وليكن T مؤثراً خطياً على V يحقق $TS = I$، من أجل مؤثرٍ ما S على V. [نقول عن S أنه معكوس أيمن لـ T]. بيِّن أن T عكوس.

■ ليكن $\dim V = n$. نجد، من المسألة السابقة، أن T يكون عكوساً إذا وفقط إذا كان T فوقياً؛ وبالتالي، يكون T عكوساً إذا وفقط إذا كانت $\operatorname{rank} T = n$. لدينا $n = \operatorname{rank} I = \operatorname{rank} TS \leqslant \operatorname{rank} T \leqslant n$. وبالتالي، $\operatorname{rank} T = n$، ويكون T عكوساً.

121.11 بيِّن، في المسألة 120.11، أن $S = T^{-1}$.

■ لدينا $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. إذن، $S = IS = (T^{-1}T)S = T^{-1}(TS) = T^{-1}I = T^{-1}$.

122.11 أعط مثالاً يبين أن نتيجة المسألة 120.11 قد لا تتحقق إذا كان V ذا بعد لا نهائي.

■ ليكن V فضاء الحدوديات فوق K، أي $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$. وليكن T و S التطبيقين الخطيين المعرّفين بواسطة $T(p(t)) = 0 + a_1 + a_2 t + \ldots + a_n t^{n-1}$ و $S(p(t)) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^{n+1}$. لدينا

$(TS)(p(t)) = T(S(p(t))) = T(a_0t + a_1t^2 + ... + a_nt^{n+1}) = a_0 + a_1t + ... + a_nt^n = p(t)$. وبـذلـك، $TS = I$، أي التطبيـق المحايد. من جهة أخرى، إذا $k \in K$ و $k \neq 0$، إذن $(ST)(k) = S(T(k)) = S(0) = 0 \neq k$. ينتج عن ذلك أن $ST \neq I$.

123.11 اثبت أن مصفوفة A تكون عكوسة إذا وفقط إذا كانت غير شاذة.

■ تذكر أن A تكون عكوسة إذا وفقط إذا كانت A مكافئة صفّياً للمصفوفة المتطابقة (المحايدة) I. وبذلك، فإن القضايا التالية متكافئة: (i) A عكوسة، (ii) A و I متكافئتان صفّياً. (iii) يكون للمعادلتين $AX = 0$ و $IX = 0$ نفس الفضاء الحلّي، (iv) يكون لـ $AX = 0$ الحل الصفري فقط، (v) A غير شاذة.

124.11 لنفترض أن S و T عنصران عكوسان في $A(V)$. بيِّن أن ST يكون عكوساً وأن $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

■ لدينا $(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SIS^{-1} = SS^{-1} = I$

و $(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}IT = T^{-1}T = I$. وبالتالي، يكون ST عكوساً، بمعكوس $T^{-1}S^{-1}$.

125.11 لنفترض أن $S \in A(V)$ عكوس. بيِّن أن S^{-1} عكوس، وأن $(S^{-1})^{-1} = S$.

■ لدينا $SS^{-1} = S^{-1}S = I$. وبالتالي، يكون S^{-1} عكوساً و $(S^{-1})^{-1} = S$.

126.11 عرِّف تشابه المؤثرات في $A(V)$.

■ نقول عن مؤثرين $S, T \in A(V)$ أنهما «متشابهان»، ونكتب $S \sim T$، إذا وجد مؤثر عكوس $P \in A(V)$ بحيث أن $S = P^{-1}TP$.

المسائل 127.11-129.11 تبين أن العلاقة $S \sim T$ لتشابه المؤثرات في $A(V)$ هي علاقة تكافؤ، أي أنها إنعكاسية، ومتناظرة، ومتعدية.

127.11 بيِّن أن ~ إنعكاسية، أي أن $S \sim S$ من أجل كل $S \in A(V)$.

■ المؤثر المحايد $I \in A(V)$ عكوس، ولدينا $S = I^{-1}SI$. إذن، $S \sim S$.

128.11 بيِّن أن ~ متناظرة، أي إذا $S \sim T$، فإن $T \sim S$.

■ لنفترض $S \sim T$، أي أن $S = P^{-1}TP$، حيث P عكوس. إذن، P^{-1} عكوس ولدينا $T = PSP^{-1} = (P^{-1})^{-1}SP^{-1}$. وبالتالي، $T \sim S$.

129.11 بيِّن أن ~ متعدِّية، أي إذا $F \sim G$ و $G \sim H$، فإن $F \sim H$.

■ لنفترض أن $F \sim G$ و $G \sim H$، أي $F = P^{-1}GP$ و $G = Q^{-1}HQ$، حيث P و Q عكوسان. إذن، يكون PQ عكوساً، ويكون لدينا $F = P^{-1}GP = P^{-1}(Q^{-1}HQ)P = (P^{-1}Q^{-1})H(QP) = (QP)^{-1}H(QP)$. وبالتالي، $F \sim H$.

130.11 ليكن A جبراً تجميعياً فوق حقلٍ K، وله عنصر محايد $I \in A$. عرِّف عنصراً عكوساً في A.

■ يكون عنصر $a \in A$ عكوساً إذا وجد عنصر $a^{-1} \in A$ بحيث أن $aa^{-1} = a^{-1}a = I$.

131.11 ليكن A جبر الحدوديات (في t) فوق حقلٍ K. ما هي العناصر العكوسة في A (إن وجدت)؟

■ إن الحدوديات الثابتة غير الصفرية $f(t) = k$، حيث $k \in K$، هي العناصر العكوسة في A.

132.11 ليكن A جبر المصفوفات المربعة -n فوق حقلٍ K. ما هي (إن وجدت) العناصر العكوسة في A؟

■ المصفوفات غير الشاذة في A هي العناصر العكوسة فيه.

5.11 التطبيقات الخطية ومنظومات المعادلات الخطية

133.11 بيِّن كيف تكون منظومةٌ لمعادلات خطية مرتبطة بتطبيق خطي.

■ لتكن منظومة من n معادلة خطية و n مجهولاً فوق حقلٍ K:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

تكون المنظومة مكافئة للمعادلة المصفوفية $Ax = b$ حيث $A = (a_{ij})$ هي مصفوفة المعاملات و $x = (x_i)$، $b = (b_i)$ المتجهان العموديان للمجاهيل والثوابت على الترتيب. الآن، يمكن النظر إلى المصفوفة A على أنها التطبيق الخطي $A: K^n \to K^m$. وبذلك، يمكن إعتبار حل المعادلة $Ax = b$ على أنه قبل ـ الصورة لـ $b \in K^m$ تحت التطبيق الخطي $A: K^n \to K^m$. كما يمكن النظر إلى حل المعادلة المتجانسة $Ax = 0$ بأنه نواة التطبيق الخطي $A: K^n \to K^m$.

مبرهنة 5.11: إن بُعْد الفضاء الحلّي W لمنظومة المعادلات الخطية المتجانسة $Ax = 0$ هو $n - r$ حيث n عدد المجاهيل و r رتبة مصفوفة المعاملات A.

134.11 أثبت مبرهنة 5.11.

■ ينظر هنا لـ A على أنها تطبيق خطي، وبذلك $r = \text{rank}(A) = \dim(\text{Im } A)$، و $n = \dim K^n = \dim(\text{Domain } A)$. إذن، وبواسطة مبرهنة 2.10، يكون لدينا $\dim W = \dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Domain of } A) - \dim(\text{Im } A) = n - r$.

135.11 لنفترض أن للمنظومة المتجانسة $Ax = 0$ الحل الصفري فقط. بيِّن بأنّه يكون للمنظومة غير المتجانسة $Ax = b$ حلٌ واحد على الأكثر.

■ إذا كان الحل الصفري هو الحل الوحيد لـ $Ax = 0$، فإن A يكون تطبيقاً غير شاذ. وبالتالي، يكون A واحداً ـ لواحد، وبذلك يكون لـ $Ax = b$ حل واحد على الأكثر.

136.11 لنفترض أن للمنظومة المتجانسة $Ax = 0$ حلولاً غير صفرية. بيِّن أنّه إذا كان لـ $Ax = b$ حلٌ، فإنه ليس وحيداً.

■ ليكن $W = \text{Ker } A$، ولنفترض أن v حلٌ لـ $Ax = b$. إذن، تكون قبل ـ صورة b تحت التطبيق A، $A^{-1}(b)$، هي المجموعة المصاحبة $v + W$. بما أن لـ $Ax = 0$ حلولاً غير صفرية، فإن W تحتوي على أكثر من عنصر واحد. وبالتالي، تحتوي $v + w$ على أكثر من عنصر واحد.

مبرهنة 6.11 لتكن منظومة ذات نفس العدد من المعادلات والمجاهيل، أي لتكن المنظومة التالية من المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n$$

(i) لنفترض أن المنظومة المتجانسة المقابلة ليس لها إلاّ الحل الصفري؛ إذن، يكون للمنظومة أعلاه حل وحيد من أجل أي قيم للـ b_i.

(ii) لنفترض أن للمنظومة المتجانسة المقابلة حلاً غير صفري. إذن، توجد هناك قيم للـ b_i لا يكون للمنظومة أعلاه، من أجلها أي حلول.

ملاحظة: بما أن للمعادلة أعلاه نفس العدد من المعادلات والمجاهيل، فإنه يمكن تمثيل هذه المنظومة بواسطة المعادلة المصفوفية $Ax = b$ حيث A مصفوفة مربعة n- فوق K، والتي تنظر إليها كمؤثر خطي على K^n.

137.11 أثبت (i) في مبرهنة 6.11: إذا كان لـ $Ax = 0$ الحل الصفري فقط، إذن يكون لـ $Ax = b$ حلٌ وحيد من أجل أي b.

■ هنا، A غير شاذة، لأن $Ax = 0$ ليس لها إلا الحلُ الصفري. وبذلك، تكون A تطبيقاً خطياً واحداً ـ لواحد وفوقياً، وبالتالي يكون عكوساً. ينتج عن ذلك أن لـ $Ax = b$ الحل الوحيد $x = A^{-1}b$.

138.11 اثبت (ii) في مبرهنة 6.11: إذا كان لـ $Ax = 0$ حلول غير صفرية، فإنه توجد متجهات b بحيث لا يكون لـ $Ax = b$ حلٌ.

■ هنا، A شاذة لأن لـ $Ax = 0$ حلولاً غير صفرية. وبالتالي، لا يكون التطبيق $A: K^n \to K^n$ فوقياً. إذن، يوجد $b \in K^n$ لا ينتمي إلى $\text{Im } A$، أي لا يكون من أجله لـ $Ax = b$ حلول.

الفصل 12
المصفوفات والتطبيقات الخطية

1.12 التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي

1.12 عرّف التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي.

■ ليكن T مؤثراً خطياً لفضاء متجهي V فوق حقلٍ K، ولنفترض أن $B = \{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لـ V. الآن، تكون $T(e_1),...,T(e_n)$ متجهات في V، وبذلك يكون كل منها تركيبة خطية لعناصر القاعدة $\{e_i\}$، أي أن

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ T(e_2) &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(e_n) &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

إن منقولة مصفوفة المعاملات أعلاه، والتي نرمز لها بـ $m_B(T)$ أو $[T]_B$، تسمّى «التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدة $\{e_i\}$» أو «مصفوفة T في القاعدة $\{e_i\}$»؛ أي أن

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[يمكن حذف الدليل السفلي B عندما تكون القاعدة B معروفة.]

ملاحظة: لنفترض أن $B = \{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لفضاء متجهي فوق حقلٍ K. نتذكر [من قسم 9.8] أنه يمكن كتابة أي $v \in V$، وبأسلوب وحيد، في الشكل $v = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$، وأن المتجه الإحداثي لـ v نسبة للقاعدة B يعرّف ويرمز له بواسطة:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$$

[حيث يمكن حذف الدليل السفلي B إذا كانت القاعدة معروفة]. يكون لدينا، باستخدام هذا الترميز، أن $m(T) = ([Te_1)],[T(e_2)],...,[T(e_n)])$. نؤكد هنا على أن المتجهات الإحداثية يفترض أن تكون متجهات عمودية إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك.

المبرهنة، والتي سوف تبرهن في المسألة 50.12، سوف تستخدم عبر هذا القسم.

مبرهنة 1.12: لتكن $B = \{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لـ V، وليكن T أي مؤثر على V. إذن، يكون لدينا $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$ من أجل أي متجه $v \in V$. [أي أنه إذا ضربنا المتجه الإحداثي لـ v في التمثيل المصفوفي لـ T، فإننا نحصل على المتجه الإحداثي لـ $T(v)$].

المسائل 2.12-6.12 تجد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $F(x,y) = (2x - 5y, 3x + y)$ نسبةً إلى القاعدة $\{u_1 = (2,1), u_2 = (3,2)\}$ في $\mathbf{R}^2$.

2.12 أوجد $F(u_1)$، أي صورة المتجه الأول للقاعدة.

■ $F(u_1) = F(2,1) = (4 - 5, 6 + 1) = (-1, 7)$.

3.12 اكتب $F(u_1)$ كتركيبة خطية لمتجهي القاعدة u_1، u_2.

■ $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ أو $\begin{matrix}2x+3y=-1\\x+2y=\ \ 7\end{matrix}$

ويكون الحل $x=-23$، $y=15$. إذن، $F(u_1)=-23u_1+15u_2$.

4.12 أوجد $F(u_2)$.

■ $F(u_2)=F(3,2)=(6-10,9+2)=(-4,11)$.

5.12 اكتب $F(u_2)$ كتركيبة خطية لمتجهي القاعدة u_1 و u_2.

■ $\begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ أو $\begin{matrix}2x+3y=-4\\x+2y=\ \ 7\end{matrix}$

ويكون الحل $x=-29$، $y=18$. وبذلك، $F(u_2)=-29u_1+18u_2$.

6.12 أوجد $[F]$، أي التمثيل المصفوفي لـ F في القاعدة المعطاة.

■ نكتب إحداثيات $F(u_1)$ و $F(u_2)$ كعمودين، فنحصل على

$$[F]=\begin{pmatrix}-23&-29\\15&18\end{pmatrix}$$

ملاحظة: نلاحظ أن مصفوفة المعاملات لمنظومتي المعادلات الخطية في المسالتين 3.12 و 5.12 هي نفسها في الحالتين. وبالتالي، يكون من المفيد عادة ان نجد أولاً إحداثيات متجه إختياري $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ في القاعدة المعطاة، أي أن نحلّ أولاً $(a,b)=xu_1+yu_2=x(2,1)+y(3,2)$ لنحصل على x و y بدلالة a و b. سنفعل هذا في المسائل اللأحقة.

المسائل 7.12-12.12 لإيجاد مصفوفة التطبيق الخطي $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة $G(x,y)=(2x-3y,4x+y)$ في القاعدة $\{u_1=(1,-2), u_2=(2,-5)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$.

7.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بالنسبة إلى القاعدة المعطاة.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+2y=a\\-2x-5y=b\end{matrix}$$

نحلّ من أجل x و y بدلالة a و b فنحصل على $x=5a+2b$، $y=-2a-b$. وبذلك، $(a,b)=(5a+2b)u_1+(-2a-b)u_2$ أو، بشكل مكافىء، $[(a,b)]=[5a+2b,-2a-b]^T$.

[ملاحظة: هذه الصيغة من أجل (a,b) سوف تستخدم بشكل متكرر أدناه.]

8.12 أوجد $G(u_1)$، أي صورة متجه القاعدة الأول.

■ $G(u_1)=G(1,-2)=(2+6,4-2)=(8,2)$.

9.12 اكتب $G(u_1)$ كتركيبة خطية لمتجهي القاعدة u_1 و u_2.

■ نجد من المسألة 7.12، أن $G(u_1)=(8,2)=(40+4)u_1+(-16-2)u_2=44u_1-18u_2$.

10.12 أوجد $G(u_2)$.

■ $G(u_2)=G(2,-5)=(4+15,8-5)=(19,3)$.

11.12 اكتب $G(u_2)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ نجد من المسألة 7.12، أن $G(u_2)=(19,3)=(95+6)u_1+(-38-3)u_2=101u_1-41u_2$.

12.12 أوجد التمثيل الخطي، $[G]$، لـ G في القاعدة المعطاة.

■ نكتب إحداثيات $G(u_1)$ و $G(u_2)$ كعمودين:

$$[G]=\begin{pmatrix}44 & 101\\ -18 & -41\end{pmatrix}$$

المسائل 13.12-16.12 تتعلق بالمتجه $v=(4,-3)$ والتطبيق الخطي G وكذلك القاعدة $\{u_1=(1,-2),\ u_2=(2,-5)\}$.

13.12 أوجد $[v]$، المتجه الإحداثي لـ v نسبة للقاعدة المعطاة.

■ نجد، من المسألة 7.12، أن $[v]=[(4,-3)]=[20-6,-8+3]^T=[14,-5]^T$.

14.12 أوجد $G(v)$.

■ $G(v)=G(4,-3)=(8+9,16-3)=(17,13)$.

15.12 أوجد المتجه الإحداثي، $[G(v)]$، للمتجه $G(v)$ نسبة للقاعدة المعطاة.

■ نجد، من المسألة 7.12، أن $[G(v)]=[(17,13)]=[85+26,-34-13]^T=[111,-47]^T$.

16.12 حقق مبرهنة 1.12 بأن $[G][v]=[G(v)]$.

■ $$[G][v]=\begin{pmatrix}44 & 101\\ -18 & -41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}616-505\\ -252+205\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}111\\ -47\end{pmatrix}=[G(v)]$$

المسائل 17.12-20.12 تتعلق بالفضاء المتجهي P_3 للحدوديات الحقيقية $p(t)$ التي درجتها 3 فاقل.

17.12 ليكن $D:P_3\to P_3$ المؤثر الإشتقاقي المعرّف بواسطة $D(p(t))=dp/dt$. أوجد مصفوفة D في القاعدة $\{1,t,t^2,t^3\}$ لـ P_3.

■ نوجد $D(1)$، $D(t)$، $D(t^2)$ و $D(t^3)$ ثم نكتبها كتركيبات خطية لـ 1، t، t^2، t^3:

$$\begin{aligned}D(1)&=0=0-0t+0t^2+0t^3\\ D(t)&=1=1+0t+0t^2+0t^3\\ D(t^2)&=2t=0+2t+0t^2+0t^3\\ D(t^3)&=3t^2=0+0t+3t^2+0t^3\end{aligned}$$

و

$$[D]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

[لاحظ أن المتجهات الإحداثية لـ $D(1)$، $D(t)$، $D(t^2)$، $D(t^3)$ هي الأعمدة، وليست الصفوف، في $[D]$.]

18.12 لتكن $p(t)=a+bt+ct^2+dt^3$. أوجد $D(p(t))$.

■ نأخذ المشتق، فنحصل على $D(p(t))=b+2ct+3dt^2$.

19.12 أوجد المتجهين الإحداثيين $[p(t)]$ و $[D(p(t))]$، نسبة للقاعدة $\{1,t,t^2,t^3\}$ في P_3.

■ نكتب معاملات $p(t)$ و $D(p(t))$ فنحصل على

$[p(t)]=[a,b,c,d]^T$ و $[D(p(t))]=[b,2c3d,0]^T$

20.12 تحقق من مبرهنة 1.12 صالحة هنا.

■ $$[D][p(t)]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\2c\\3d\\0\end{pmatrix}=[D(p(t))]$$

المسائل 21.12-26.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للمؤثر الخطي $S:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $S(x,y)=(2y,3x-y)$ نسبة إلى القاعدة التالية:

$$B=\{v_1=(1,3),\ v_2=(2,5)\}$$

21.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ بالنسبة للقاعدة B.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 2y &= a \\ 3x + 5y &= b \end{aligned}$$

نحلّ من أجل x و y بدلالة a و b، فنحصل على $x = 2b - 5a$ و $y = 3a - b$. إذن

$$(a,b) = (-5a + 2b)v_1 + (3a - b)v_2$$

[ملاحظة: سوف نستخدم هذه الصيغة من أجل (a,b) مراراً فيما يلي.]

22.12 أوجد $S(v_1)$.

■ $S(v_1) = S(1,3) = (6,3 - 3) = (6,0)$.

23.12 اكتب $S(v_1)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ نستخدم الصيغة في المسألة 21.12 فنحصل على $S(v_1) = (6,0) = -30v_1 + 18v_2$.

24.12 أوجد $S(v_2)$.

■ $S(v_2) = S(2,5) = (10,6 - 5) = (10,1)$.

25.12 اكتب $S(v_2)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ نجد، من المسألة 21.12، أن $S(v_2) = S(10,1) = (-50 + 2)v_1 + (30 - 1)v_2 = -48v_1 + 29v_2$.

26.12 أوجد مصفوفة S، $[S]_B$، في القاعدة B أعلاه.

■ نكتب إحداثيات $S(v_1)$ و $S(v_2)$ كعمودين، فنحصل على

$$[S]_B = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

27.12 أوجد التمثيل المصفوفي، $[S]_E$، لـ S نسبة للقاعدة المعتادة $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.

■ تذكر أنه إذا $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ فإن $(a,b) = ae_1 + be_2$. وبذلك

$$\begin{aligned} S(e_1) &= S(1,0) = (0,3) = 0e_1 + 3e_2 \\ S(e_2) &= S(0,1) = (2,-1) = 2e_1 - e_2 \end{aligned} \quad \text{و} \quad [S]_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

المسائل 28.12-32.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $T(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$ نسبة للقاعدة B أعلاه.

28.12 أوجد $T(v_1)$.

■ $T(v_1) = T(1,3) = (3 - 12, 1 + 15) = (-9,16)$.

29.12 اكتب $T(v_1)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ نجد، من مسألة 21.12، أن $T(v_1) = (-9,16) = (45 + 32)v_1 + (-27 - 16)v_2 = 77v_1 - 43v_2$.

30.12 أوجد $T(v_2)$.

■ $T(v_2) = T(2,5) = (6 - 20, 2 + 25) = (-14,27)$.

31.12 اكتب $T(v_2)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ نجد، من المسألة 21.12، أن $T(v_2) = (-14,27) = (70 + 54)v_1 + (-42 - 27)v_2 = 124v_1 - 69v_2$.

32.12 أوجد التمثيل المصفوفي، $[T]_B$، لـ T في القاعدة B.

■ نكتب إحداثيات $T(v_1)$ و $T(v_2)$ كعمودين:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

33.12 أوجد التمثيل المصفوفي، $[T]_E$، لـ T في القاعدة المعتادة E.

■ $T(e_1) = T(1,0) = (3,1) = 3e_1 + e_2$
$T(e_2) = T(0,1) = (-4,5) = -4e_1 + 5e_2$ وبذلك $[T]_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

34.12 لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، وليكن T المؤثر الخطي المؤثر الخطي على R^2 المعرّف بواسطة $T(v) = Av$ [حيث v مكتوب في شكل متجه عمودي]. أوجد التمثيل المصفوفي T بالنسبة للقاعدة B أعلاه.

■ لدينا، من المسألة 21.12، أن $(a,b) = (-5a + 2b)v_1 + (3a - b)v_2$؛ وبالتالي،

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix} = -5v_1 + 6v_2$$

$$T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \end{pmatrix} = -8v_1 + 10v_2$$

وبذلك $[T]_B = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

35.12 أوجد التمثيل المصفوفي للمؤثر الخطي T في المسألة 34.12 بالنسبة للقاعدة المعتادة E.

■
$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1e_1 + 3e_2$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2e_1 + 4e_2$$

ومنه $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ملاحظة: لاحظ أن مصفوفة T في القاعدة المعتادة هي نفسها المصفوفة الأصلية A التي عرّفت T. وهذا ليس غير عادي. في الحقيقة، سوف نبين في المسألة التالية أن هذا صحيح من أجل أي مصفوفةٍ A عند استخدام القاعدة المعتادة.

36.12 تذكر أن أي مصفوفة مربعة -n، $A = (a_{ij})$، يمكن النظر إليها على أنها المؤثر الخطي T على K^n المعرّف بواسطة $T(v) = Av$، حيث v مكتوب في شكل متجه عمودي. بيّن أن التمثيل المصفوفي لـ T نسبة للقاعدة $\{e_i\}$ لـ K^n هو نفسه المصفوفة A، أي أن $[T]_e = A$.

■
$$T(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n$$

$$T(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n$$

....

$$T(e_n) = Ae_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

[أي أن $T(e_i) = Ae_i$ هو العمود رقم i في A]. ينتج عن ذلك أن

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

37.12 إن المجموعة $\{1,t,e^t,te^t\}$ لفضاء متجهي V لدوالّ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ليكن D المؤثر الاشتقاقي على V، أي $D(f) = df/dt$. أوجد مصفوفة D في القاعدة المعطاة.

■
$$\begin{aligned} D(1) &= 0 &&= 0(1) + 0(t) + 0(e^t) + 0(te^t) \\ D(t) &= 1 &&= 1(1) + 0(t) + 0(e^t) + 0(te^t) \\ D(e^t) &= e^t &&= 0(1) + 0(t) + 1(e^t) + 0(te^t) \\ D(te^t) &= e^t + te^t &&= 0(1) + 0(t) + 1(e^t) + 1(te^t) \end{aligned}$$
وبذلك
$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38.12 إن المجموعة $\{e^{3t},te^{3t},t^2e^{3t}\}$ قاعدة لفضاء متجهي V لدوال $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ليكن D المؤثر الاشتقاقي على V، أي $D(f) = df/dt$. أوجد مصفوفة D في القاعدة المعطاة.

■
$$\begin{aligned} D(e^{3t}) &= 3e^{3t} &&= 3(e^{3t}) + 0(te^{3t}) + 0(t^2e^{3t}) \\ D(te^{3t}) &= e^{3t} + 3te^{3t} &&= 1(e^{3t}) + 3(te^{3t}) + 0(t^2e^{3t}) \\ D(t^2e^{3t}) &= 2te^{3t} + 3t^2e^{3t} &&= 0(e^{3t}) + 2(te^{3t}) + 3(t^2e^{3t}) \end{aligned}$$
وبذلك
$$[D] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

39.12 لتكن القاعدة $S = \{(1,0),(1,1)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$. ليكن $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرّفاً بواسطة $L(1,0) = (6,4)$ و $L(1,1) = (1,5)$. [تذكر أن تطبيقاً خطياً يعرَّف تماماً بتأثيره على قاعدة له]. أوجد التمثيل المصفوفي للتطبيق L نسبةً إلى القاعدة المعطاة.

■ نكتب $(6,4)$ ثم $(1,5)$ كتركيبتين خطيتين لمتجهي القاعدة، فنحصل على
$$\begin{aligned} L(1,0) &= (6,4) = 2(1,0) + 4(1,1) \\ L(1,1) &= (1,5) = -4(1,0) + 5(1,1) \end{aligned}$$
و
$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

40.12 لننظر في القاعدة المعتادة $E = \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ لـ K^n. وليكن $L: K^n \to K^n$ معرّفاً بواسطة $L(e_i) = v_i$. بيِّن أن المصفوفة A، الممثلة للتطبيق L نسبة للقاعدة المعتادة E، يمكن الحصول عليها بكتابة المتجهات ـ الصورة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ كأعمدة لها.

■ نفترض أن $v_i = (a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$، إذن $L(e_i) = v_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n$. وبذلك،
$$[L] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
كما هو متوقع.

41.12 ليكن $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرّفاً بواسطة $F(1,0) = (2,4)$ و $F(0,1) = (5,8)$. أوجد المصفوفة A الممثلة لـ F بالنسبة للقاعدة المعتادة في $\mathbb{R}^2$.

■ بما أن $(1,0)$ و $(0,1)$ يشكلان القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^2$، نكتب صورتيهما تحت F كأعمدة لنحصل على $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

42.12 ليكن L الدوران في $\mathbb{R}^2$ حول المستقيم $y = -x$. أوجد المصفوفة T بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^2$.

■ لدينا تحت الدوران L $L(1,0) = (0,1)$ و $L(0,1) = (-1,0)$. إذن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

43.12 ليكن T يرمز للانعكاس في $\mathbb{R}^2$ حول المستقيم $y = -x$. أوجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^2$.

■ لدينا تحت الانعكاس T، أن $T(1,0) = (0,-1)$، و $T(0,1) = (-1,0)$. وبذلك $[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

المسألتان 44.12-45.12 تتعلقان بالحقل العقدي C كفضاء متجهي فوق حقل حقيقي R، ومؤثر المرافقة T على C، أي المعرّف بواسطة $T(z) = \bar{z}$.

44.12 أوجد مصفوفة T نسبةً للقاعدة المعتادة $\{1,i\}$.

$$\begin{aligned} T(1) &= \bar{1} = 1 = 1(1) + 0(i) \\ T(i) &= \bar{i} = -i = 0(1) - 1(i) \end{aligned}$$
وبذلك
$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

45.12 أوجد مصفوفة T نسبةً للقاعدة $\{1+i, 1+2i\}$.

■ $T(1+i) = 1-i = 3(1+i) - 2(1+2i)$
$T(1+2i) = 1-2i = 4(1+i) - 3(1+2i)$ وبذلك $[T] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

46.12 ليكن I_V المؤثر المحايد لفضاء متجهي V، أي أن $I_V(v) = v$ من أجل أي $v \in V$. بيّن أن $[I_V]_B = I$ (حيث I المصفوفة المتطابقة]، وذلك من أجل أي قاعدة $B = \{v_i\}$ لـ V.

■ $I_V(v_i) = v_i = 0.v_1 + \ldots + 1.v_i + \ldots + 0.v_n$، من أجل $i = 1,2,\ldots,n$. إذن، $[I_V]_B = I$.

47.12 ليكن 0_V المؤثر الصفري على V، أي المعرّف بواسطة $0_V(v) = 0$، من أجل أي $v \in V$. بيّن أن $[0_V]_B = 0$ (حيث 0 المصفوفة الصفرية]، من أجل أي قاعدة $B = \{v_i\}$.

■ لدينا $0_V(v_i) = 0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$، من أجل أي متجه v_i في القاعدة. إذن، $[0_V]_B = 0$.

المسألتان 48.12-49.12 تتعلقان بالفضاء المتجهي V للمصفوفات 2×2 فوق **R**، والقاعدة المعتادة التالية E في V:

$$E = \left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

48.12 لتكن $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$، وليكن T المؤثر الخطي على V المعرّف بواسطة $T(A) = MA$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ V.

■ لدينا

$$T(E_1) = ME_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 0E_2 + 3E_3 + 0E_4$$

$$T(E_2) = ME_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 3E_4$$

$$T(E_3) = ME_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 0E_2 + 4E_3 + 0E_4$$

$$T(E_4) = ME_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0E_1 + 2E_2 + 0E_3 + 4E_4$$

وبالتالي

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

[بما أن $\dim V = 4$، فإن أي تمثيل مصفوفي لتطبيق خطي على V يجب أن يكون مصفوفة مربعة -4].

49.12 لتكن $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، وليكن $S: V \to V$ التطبيق الخطّي المعرّف بواسطة $S(A) = AM$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة للقاعدة لـ V.

■ لدينا

$$S(E_1) = E_1M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + 0E_3 + 0E_4$$

$$S(E_2) = E_2M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = cE_1 + dE_2 + 0E_3 + 0E_4$$

$$S(E_3) = E_3M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + bE_4$$

$$S(E_4) = E_4M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + cE_3 + dE_4$$

وبذلك

$$[S]_E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

50.12 أثبت مبرهنة 1.12.

▩ لنفترض أن

$$T(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$$

من أجل $i = 1,\dots,n$. إذن، تكون $[T]_e$ المصفوفة المربعة -n التي صفها j يكون

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \qquad (1)$$

نفترض الآن أن

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = \sum_{i=1}^{n} k_ie_i$$

وبكتابة متجه عمودي كمنقول لمتجه صفي،

$$[v]_e = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T \qquad (2)$$

بالاضافة إلى ذلك، وباستخدام خاصية الخطية للتطبيق T، يكون لدينا

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} k_ie_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_iT(e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_i\right)e_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n)e_j$$

وبذلك، يكون $[T(v)]_E$ المتجه العمودي الذي مدخله رقم j

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n \qquad (3)$$

من جهة أخرى، نتحصل على المدخل j لـ $[T]_e[v]_e$ بضرب الصف j لـ $[T]_e$ في $[v]_e$، اي ضرب (1) في (2). ولكن جداء (1) و (2) يكون (3)؛ بالتالي، يكون لـ $[T]_e[v]_e$ و $[T(v)]_e$ نفس المداخل. إذن، $[T]_e[v]_e = [T(v)]_e$.

2.12 المصفوفات والمؤثرات الخطية على R^3

يقتصر هذا القسم على المؤثرات الخطية على R^3. نقصد بالقاعدة المعتادة على R^3 المجموعة:

$$E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

51.12 لنفترض أن T المؤثر الخطي على R^3 المعرّف بواسطة $T(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$. بيّن أن مصفوفة T في القاعدة المعتادة $\{e_i\}$ تعطى بـ

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

أي أن صفوف $[T]_e$ يتحصل عليها من معاملات x، y، z في مركبات $T(x,y,z)$.

▩ لدينا

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (a_1, b_1, c_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$$
$$T(e_2) = T(0,1,0) = (a_2, b_2, c_2) = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$$
$$T(e_3) = T(0,0,1) = (a_3, b_3, c_3) = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$$

ينتج عن ذلك أن

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تكون هذه الخاصية صالحة من أجل أي فضاء K^n، ولكن فقط بالنسبة للقاعدة المعتادة $\{e_1 = (1,0,...,0)e_2 = (0,1,0,...,0)e_n = (0,...,0,1)\}$.

52.12 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x, y, z) = (2x - 3y + 4z, 5x - y + 2z, 4x + 7y)$
أوجد مصفوفة F بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^3$.

■ من المسألة 51.12: $[F] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

53.12 ليكن $G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $G(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ G في القاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^3$.

■ نجد، من المسألة 51.12، أن

$$[G] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المسائل 54.12-61.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للتطبيق $S: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $S(x,y,z) = (x + 2y - 3z, 2x + y + z, 5x - y + z)$. بالنسبة للقاعدة التالية في $\mathbf{R}^3$:

$$B = \{u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (1,2,3),\ u_3 = (1,3,5)\}$$

54.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة B أعلاه.

■ نكتب (a,b,c) كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3 باستخدام المجاهيل x، y، z:

$$(a,b,c) = x(1,1,0) + y(1,2,3) + z(1,3,5) = (x + y + z, x + 2y + 3z, 3y + 5z)$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y + 3z &= b \\ 3y + 5z &= c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + z &= a \\ y + 2z &= -a + b \\ 3y + 5z &= c \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + y + z &= a \\ y + 2z &= -a + b \\ z &= -3a + 3b - c \end{aligned}$$

نحلّ من أجل x، y، z بدلالة a، b، c فنحصل على $x = -a + 2b - c$، $y = 5a - 5b + 2c$، $z = -3a + 3b - c$. إذن

$$(a,b,c) = (-a + 2b - c)u_1 + (5a - 5b + 2c)u_2 + (-3a + 3b - c)u_3$$

أو، بشكل مكافىء،

$$[(a,b,c)] = [-a + 2b - c, 5a - 5b + 2c, -3a + 3b - c]^T$$

[ملاحظة: سوف نستخدم هذه الصيغة من أجل (a,b,c) بشكل متكرر في المسائل اللاّحقة.]

55.12 أوجد $S(u_1)$.

■ $S(u_1) = S(1,1,0) = (1 + 2 - 0, 2 + 1 + 0, 5 - 1 + 0) = (3,3,4)$.

56.12 اكتب $S(u_1)$ كتركيبة خطية u_1، u_2، u_3.

■ نستخدم المسألة 54.12، فنحصل على

$$S(u_1) = (3,3,4) = (-3 + 6 - 4)u_1 + (15 - 15 + 8)u_2 + (-9 + 9 - 4)u_3 = -u_1 + 8u_2 - 4u_3$$

57.12 أوجد $S(u_2)$.

■ $S(u_2) = S(1,2,3) = (1 + 4 - 9, 2 + 2 + 3, 5 - 2 + 3) = (-4,7,6)$.

58.12 اكتب $S(u_2)$ كتركيبة خطية لـ u_1، u_2، u_3.

■ $S(u_2) = (-4,7,6) = (4 + 14 - 6)u_1 + (-20 - 35 + 12)u_2 + (12 + 21 - 6)u_3 = 12u_1 - 43u_2 + 27u_3$.

59.12 أوجد $S(u_3)$.

■ $S(u_3) = S(1,3,5) = (1 + 6 - 15, 2 + 3 + 5, 5 - 3 + 5) = (-8,10,7)$.

60.12 اكتب $S(u_3)$ كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3.

■ $S(u_3) = (-8,10,7) = (8 + 20 - 7)u_1 + (-40 - 50 + 14)u_2 + (24 + 30 - 7)u_3 = 21u_1 - 76u_2 + 47u_3$.

61.12 أوجد مصفوفة S، $[S]$ في القاعدة B أعلاه.

■ نكتب إحداثيات $S(u_1)$، $S(u_2)$، و $S(u_3)$ كأعمدة، فنحصل على

$$[S] = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 21 \\ 8 & -43 & -76 \\ -4 & 27 & 47 \end{pmatrix}$$

المسائل 62.12-65.12 تتعلق بالمتجه $v = (1,1,1)$ والتطبيق الخطي $S: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ والقاعدة B أعلاه.

62.12 أوجد $[v]$.

■ نجد من مسألة 54.12، أن $[v] = [(1,1,1)] = [-1 + 2 - 1, 5 - 5 + 2, -3 + 3 - 1]^T = [0,2,-1]^T$.

63.12 أوجد $S(v)$.

■ $S(1,1,1) = (1 + 2 - 3, 2 + 1 + 1, 5 - 1 + 1) = (0,4,5)$.

64.12 أوجد $[S(v)]$.

■ نجد من مسألة 54.12، أن $[S(v)] = [(0,4,5)] = [0 + 8 - 5, 0 - 20 + 10, 0 + 12 - 5]^T = [3,-10,7]^T$.

65.12 حقق مبرهنة 1.12 بأن $[S][v] = [S(v)]$.

$$[S][v] = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 21 \\ 8 & -43 & -76 \\ -4 & 27 & 47 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 24 - 21 \\ 0 - 86 + 76 \\ 0 + 54 - 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} = [S(v)]$$

المسائل 66.12-73.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي لـ $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $T(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ بالنسبة للقاعدة $B = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,0,0).\}$

66.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة B أعلاه.

■ نكتب (a,b,c) كتركيبة خطية في w_1، w_2، w_3 باستخدام سلّميات مجهولة x، y، z:

$(a,b,c) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (x + y + z, x + y, x)$ أو $x + y + z = a, \quad x + y = b, \quad x = c$

نحلّ المنظومة في x، y، z بدلالة a، b، c فنجد $x = c$، $y = b - c$، $z = a - b$، وبذلك،

$(a,b,c) = cw_1 + (b - c)w_2 + (a - b)w_3$ وبشكل مكافيء $[(a,b,c)] = [c, b - c, a - b]^T$

[هذه الصيغة من أجل (a,b,c) سوف نستخدم لاحقاً بشكل متكرر.]

67.12 أوجد $T(w_1)$.

■ $T(w_1) = T(1,1,1) = (2+1, 1-4, 3) = (3,-3,3)$

68.12 اكتب $T(w_1)$ كتركيبة خطية لـ w_1، w_2، w_3.

■ نجد، من المسألة 66.12، أن $T(w_1) = (3, -3, 3) = 3w_1 + (-3-3)w_2 + (3+3)w_3 = 3w_1 - 6w_2 + 6w_3$.

69.12 أوجد $T(w_2)$.

■ $T(w_2) = T(1,1,0) = (2+0, 1-4, 3) = (2,-3,3)$.

70.12 اكتب $T(w_2)$ كتركيبة خطية في w_1، w_2، w_3.

■ $T(w_2) = T(2,-3,3) = 3w_1 + (-3-3)w_2 + (2+3)w_3 = 3w_1 - 6w_2 + 5w_3$.

71.12 أوجد $T(w_3)$.

■ $T(w_3) = T(1,0,0) = (0+0, 1-0, 3) = (0,1,3)$.

72.12 اكتب $T(w_3)$ كتركيبة خطية في w_1، w_2، w_3.

■ $T(w_3) = (0,1,3) = 3w_1 + (1-3)w_2 + (0-1)w_3 = 3w_1 - 2w_2 - w_3$.

73.12 أوجد مصفوفة T، $[T]$، بالنسبة للقاعدة B.

■ نكتب إحداثيات $T(w_1)$، $T(w_2)$، $T(w_3)$ كأعمدة فنحصل على

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

74.12 اكتب $T(v)$ كتركيبة خطية في w_1، w_2، w_3 حيث $v = (a,b,c)$ متجه إختياري في R^3.

■ نجد، من مسألة 66.12، أن $T(v) = T(a,b,c) = (2b+c, a-4b, 3a)$ 4 $3aw_1 + (-2a-4b)w_2 + (-a+6b+c)w_3$
أو بشكل مكافىء، $[T(v)] = [3a, -2a-4b, -a+6b+c]^T$.

75.12 حقق مبرهنة 1.12 بأن $[T][v] = [T(v)]$ حيث $v = (a,b,c)$.

■ نستخدم المسألتين 66.12 و 74.12:

$$[T][v] = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ -2a-4b \\ -a+6b+c \end{pmatrix} = [T(v)]$$

3.12 المصفوفات وعمليات التطبيقات الخطية

المبرهنة 2.12، التي سيتم إثباتها في المسائل 104.12-107.12، سوف تستخدم في مسائل هذا القسم.

مبرهنة 2.12 لتكن $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة لـ V فوق K، وليكن $\mathcal{M}$ جبر المصفوفات المربعة -n فوق K. إذن، التطبيق $m: A(V) \to \mathcal{M}$ المعرّف بواسطة $m(T) = [T]_B$ يكون تشاكلاً جبرياً من $A(V)$ فوق $\mathcal{M}$، أي، أنه من أجل $S, T \in A(V)$ وأي $k \in K$، يكون لدينا:

(i) $m(T+S) = m(T) + m(S)$، أي $[T] + [S] = [T+S]$.

(ii) $m(kT) = km(T)$، أي $[kT] = k[T]$.

(iii) $m(S^\circ T) = m(S)m(T)$ أي $[S^\circ T] = [S][T]$.

(iv) التطبيق m يكون واحداً ـ لواحد وفوقياً.

المسائل 76.12-90.12 يوضح مبرهنة 2.12 باستخدام القاعدة $B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,2)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$ والتطبيقين الخطيين S و T المعرّفين بواسطة $S(x,y) = (x + 2y, 4x)$ و $T(x,y) = (y, x + 3y)$.

76.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ بالنسبة للقاعدة B أعلاه.

■ نكتب (a,b) كتركيبة خطية في u_1، u_2 باستخدام مجهولين x و y: $(a,b) = x(1,1) + y(1,2)$ أو $x + y = a$، $x + 2y = b$. نحلّ من أجل x و y فنحصل على $x = 2a - b$، $y = -a + b$. إذن $(a,b) = (2a - b)u_1 + (-a + b)u_2$ أو بشكل مكافىء $[(a,b)] = [2a - b, -a + b]^T$

[هذه الصيغة من أجل (a,b) سوف نستخدم بشكل متكرر].

77.12 أوجد التمثيل المصفوفي، [S]، لـ S في القاعدة B.

■ $S(u_1) = S(1,1) = (3,4) = 2u_1 + u_2$
$S(u_2) = S(1,2) = (5,4) = 6u_1 - u_2$ وبذلك $[S] = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

78.12 أوجد مصفوفة T، [T]، بالنسبة للقاعدة B.

■ $T(u_1) = T(1,1) = (1,4) = -2u_1 + 3u_2$
$T(u_2) = T(1,2) = (2,7) = -3u_1 + 5u_2$ وبذلك $[T] = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

79.12 أكتب $(S + T)(u_1)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $(S + T)(u_1) = S(u_1) + T(u_1) = (2u_1 + u_2) + (-2u_1 + 3u_2) = 0u_1 + 4u_2$.

80.12 أكتب $(S + T)(u_2)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $(S + T)(u_2) = S(u_2) + T(u_2) = (6u_1 - u_2) + (-3u_1 + 5u_2) = 3u_1 + 4u_2$.

81.12 أوجد $[S + T]$.

■ نكتب إحداثيات $(S + T)(u_1)$ و $(S + T)(u_2)$ كعمودين:

$$[S + T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

82.12 حقق مبرهنة 2.12 (i): $[S] + [T] = [S + T]$.

■ $$[S] + [T] = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = [S + T]$$

83.12 أكتب $(3T)(u_2)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ أكتب $(3T)(u_1) = 3T(u_1) = 3(-2u_1 + 3u_2) = -6u_1 + 9u_2$.

84.12 أكتب $(3T)(u_2)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $(3T)(u_2) = 3T(u_2) = 3(-3u_1 + 5u_2) = -9u_1 + 15u_2$.

85.12 أوجد $[3T]$.

■ نكتب إحداثيات $(3T)(u_1)$ و $(3T)(u_2)$ كعمودين:

$$[3T] = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

86.12 نحقق أن $[3T] = 3[T]$.

■ $$3[T] = 3\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = [3T]$$

87.12 أكتب $(S^\circ T)(u_1)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $(S^\circ T)(u_1) = S(T(u_1)) = S(T(1,1)) = S(1,4) = (9,4) = (18-4)u_1 + (-9+4)u_2 = 14u_1 - 5u_2$.

88.12 أكتب $(S^\circ T)(u_2)$ كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $(S^\circ T)(u_2) = S(T(u_2)) = S(T(1,2)) = S(2,7) = (16,8) = (32-8)u_1 + (-16+8)u_2 = 24u_1 - 8u_2$.

89.12 أوجد $[S^\circ T]$.

■ أكتب إحداثيات $(S^\circ T)(u_1)$ و $(S^\circ T)(u_2)$ كعمودين:

$$[S\circ T] = \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

90.12 حقق مبرهنة 2.12 (iii): $[S][T] = [S^\circ T]$.

■ $$[S][T] = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+18 & -6+30 \\ -2-3 & -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} = [S\circ T]$$

المسائل 91.12-103.12 توضح مبرهنة 2.12 من أجل $\dim V = 2$، أي من أجل قاعدة $B = \{e_1, e_2\}$ لـ V، ومؤثرين خطيين T و S على V معرّفين بواسطة:

$$T(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2 \qquad S(e_1) = c_1e_1 + c_2e_2$$
$$T(e_2) = b_1e_1 + b_2e_2 \qquad S(e_2) = d_1e_1 + d_2e_2$$

91.12 أوجد $[T]$ و $[S]$.

■ أكتب إحداثيات $T(e_1)$، $T(e_2)$ وكذلك $S(e_1)$، $S(e_2)$ كعمودين، لتحصل على

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad [S] = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

92.12 أكتب $(T+S)(e_1)$ كتركيبة خطية في e_1 و e_2.

■ $(T+S)(e_1) = T(e_1) + S(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2 + c_1e_1 + c_2e_2 = (a_1+c_1)e_1 + (a_2+c_2)e_2$.

93.12 أكتب $(T+S)(e_2)$ كتركيبة خطية في e_1 و e_2.

■ $(T+S)(e_2) = T(e_2) + S(e_2) = b_1e_1 + b_2e_2 + d_1e_1 + d_2e_2 = (b_1+d_1)e_1 + (b_2+d_2)e_2$.

94.12 أوجد $[T+S]$.

■ نكتب إحداثيات $(T+S)(e_1)$ و $(T+S)(e_2)$ كعمودين:

$$[T+S] = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+c_2 \end{pmatrix}$$

95.12 حقق مبرهنة 2.12 (i): $[T] + [S] = [T+S]$.

■ $$[T]+[S] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{pmatrix} = [T+S]$$

96.12 أكتب $(kT)(e_1)$ كتركيبة خطية في e_1 و e_2، حيث $k \in K$.

■ $(kT)(e_1) = kT(e_1) = k(a_1e_1 + a_2e_2) = ka_1e_1 + ka_2e_2$.

97.12 أكتب $(kT)(e_2)$ كتركيبة خطية في e_1 و e_2.

■ $(kT)(e_2) = kT(e_2) = k(b_1e_1 + b_2e_2) = kb_1e_1 + kb_2e_2$.

98.12 أوجد $[kT]$.

■ أكتب إحداثيات $(kT)(e_1)$ و $(kT)(e_2)$ كعمودين:

$$[kT] = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix}$$

99.12 حقق مبرهنة 2.12 (ii): $k[T] = [kT]$.

■
$$k[T] = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix} = [kT]$$

100.12 أكتب $(S°T)(e_1)$ كتركيبة خطية لـ e_1 و e_2.

■
$$(S°T)(e_1) = S(T(e_1)) = S(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1S(e_1) + a_2S(e_2) = a_1(c_1e_1 + c_2e_2) + a_2(d_1e_1 + d_2e_2)$$
$$= (a_1c_1 + a_2d_1)e_1 + (a_1c_2 + a_2d_2)e_2$$

101.12 أكتب $(S°T)(e_2)$ كتركيبة خطية في e_1 و e_2.

■
$$(S°T)(e_2) = S(T(e_2)) = S(b_1e_1 + b_2e_2) = b_1S(e_1) + b_2S(e_2) = b_1(c_1e_1 + c_2e_2) + b_2(d_1e_1 + d_2e_2)$$
$$= (b_1c_1 + b_2d_1)e_1 + (b_1c_2 + b_2d_2)e_2$$

102.12 أوجد $[S°T]$.

■ نكتب إحداثيات $(S°T)(e_1)$ و $(S°T)(e_2)$ كعمودين:

$$[S \circ T] = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & b_1c_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + a_2d_2 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix}$$

103.12 حقق مبرهنة 2.12 (iii): $[S][T] = [S°T]$.

■
$$[S][T] = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & b_1c_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + a_2d_2 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix} = [S \circ T]$$

104.12 اثبت (i) في مبرهنة 2.12: $[T + S] = [T] + [S]$.

■ لنفترض أن

$$S(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e_j \qquad \text{و} \qquad T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$$

من أجل $i = 1,\dots,n$. ولتكن A و B المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$. إذن، $[T] = A^T$ و $[S] = B^T$. لدينا، من أجل $i = 1,\dots,n$، أن

$$(T + S)(e_i) = T(e_i) + S(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})e_j$$

لاحظ أن $A + B$ هي المصفوفة $(a_{ij} + b_{ij})$. ينتج عن ذلك أن $[T + S] = (A + B)^T = A^T + B^T = [T] + [S]$.

105.12 أثبت (ii) في مبرهنة 2.12: $[kT] = k[T]$.

■ لدينا، من أجل $i = 1,\dots,n$، أن

$$(kT)(e_i) = kT(e_i) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij})e_j$$

لاحظ أن kA هي المصفوفة (ka_{ij}). ينتج عن ذلك أن $[kT] = (kA)^T = kA^T = k[T]$.

106.12 اثبت (iii) في مبرهنة 2.12: $[S°T] = [S][T]$.

■ لدينا، من أجل $i = 1,...,n$ أن

$$(S \circ T)(e_i) = S(T(e_i)) = S\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}S(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)e_k$$

تذكر أن AB هي المصفوفة $AB = (c_{ik})$ حيث $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. ينتج عن ذلك أن، $[S°T] = (AB)^T = B^TA^T = [S][T]$.

107.12 أثبت (iv) في مبرهنة 2.12: التطبيق $m: A(V) \rightarrow \mathcal{M}$ المعرّف بواسطة $m(T) = [T]$ يكون واحداً ـ لواحدٍ وفوق $\mathcal{M}$.

■ إن التطبيق هو واحدٌ ـ لواحد لأن تطبيقاً خطياً يتحدد تماماً بواسطة قيمة على قاعدة للفضاء. والتطبيق فوقي لأن كل مصفوفة $M \in \mathcal{M}$ صورة للمؤثر الخطي

$$F(e_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_j \quad i = 1, \ldots, n$$

حيث (m_{ij}) منقولة المصفوفة M.

4.12 المصفوفات والتطبيقات الخطية

إقتصر القسم السابق من الفصل على دراسة التطبيقات الخطية من فضاء متجهي إلى نفسه. سندرس في هذا القسم الحالة العامة لتطبيقات خطية من فضاءٍ إلى آخر.

108.12 ليكن V و U فضاءين متجهين فوق نفس الحقل K. عرّف التمثيل المصفوفي لتطبيق خطي $F: V \rightarrow U$.

■ لتكن $\{e_1,...,e_m\}$ و $\{f_1,...,f_n\}$ قاعدتين إختياريتين ولكن مثبتين لـ V و U على الترتيب. إذن، المتجهات $F(e_1),...,F(e_m)$ تنتميان إلى U، ويكون كل منها تركيبة خطية في الـ f_i، أي أن

$$\begin{aligned} F(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1n}f_n \\ F(e_2) &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2n}f_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(e_m) &= a_{m1}f_1 + a_{m2}f_2 + \cdots + a_{mn}f_n \end{aligned}$$

إن منقولة مصفوفة المعاملات أعلاه، والتي نرمز لها بـ $[F]^f_e$ أو فقط بـ $[F]$، تسمى «التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين $\{e_i\}$ و $\{f_i\}$»، أو مصفوفة F في هاتين القاعدتين. أي أن

$$[F] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[لاحظ أن $[F]$ مصفوفة $n \times m$ حيث $\dim V = m$ و $\dim U = n$].

نستخدم أدناه المبرهنة 3.12 التي سوف تُبرهَن في المسألة 138.12.

مبرهنة 3.12: لدينا، من أجل أي متجه $v \in V$، $[F]^f_e [v]_e = [F(v)]_f$.

[أي أن ضرب المتجه الإحداثي لـ v في القاعدة $\{e_i\}$ في المصفوفة $[F]^f_e$ يعطينا المتجه الإحداثي لـ $F(v)$ في القاعدة $\{f_i\}$].

المسائل 109.12-113.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ المعرّف بواسطة $F(x,y,z) = (2x + 3y - z, 4x - y + 2z)$، بالنسبة للقاعدتين التاليتين لـ $\mathbf{R}^3$ و $\mathbf{R}^2$ على الترتيب:

$$B_1 = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (1,3,5)\} \quad \text{و} \quad B_2 = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,3)\}$$

109.12 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ بالنسبة لمتجهي القاعدة v_1 و v_2.

■ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ أو $\begin{aligned} x + 2y &= a \\ 2x + 3y &= b \end{aligned}$

ويكون الحل $x = -3a + 2b$، $y = 2a - b$. وبذلك

$$(a,b) = (-3a + 2b)v_1 + (2a - b)v_2 \quad \text{أو} \quad [(a,b)]_{B2} = [-3a + 2b, 2a - b]^T$$

110.12 اكتب $F(u_1)$، أي صورة المتجه الأول لقاعدة $\mathbb{R}^3$، كتركيبة خطية في المتجهين v_1 و v_2 لقاعدة $\mathbb{R}^2$.

■ $F(u_1) = F(1,1,0) = (2 + 3 + 0, 4 - 1 + 0) = (5,3) = (-15 + 6)v_1 + (10 - 3)v_2 = -9v_1 + 7v_2$.

111.12 اكتب $F(u_2)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ $F(u_2) = F(1,2,3) = (2 + 6 - 3, 4 - 2 + 6) = (5,8) = (-15 + 16)v_1 + (10 - 8)v_2 = v_1 + 2v_2$.

112.12 أكتب $F(u_3)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ $F(u_3) = F(1,3,5) = (2 + 9 - 5, 4 - 3 + 10) = (6,11) = (-18 + 22)v_1 + (12 - 11)v_2 = 4v_1 + v_2$.

113.12 أوجد التمثيل المصفوفي لـ F، $[F]$، بالنسبة للقاعدتين B_1 و B_2.

■ نكتب إحداثيات $F(u_1)$ و $F(u_2)$ في القاعدة $\langle v_1, v_2 \rangle$ كأعمدة:

$$[F] = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

المسائل 114.12-117.12 تتعلق بالمتجه $v = (2,5,-3)$ والتطبيق الخطي $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ والقاعدتين B_1 و B_2 المذكورين أعلاه.

114.12 أوجد المتجه الإحداثي لـ v، $[v]_{B_1}$، في القاعدة B_1.

■ نجد من المسألة 54.12، أن $[(a, b, c)]_{B_1} = [-a + 2b - c, 5a - 5b + 2c, -3a + 3b - c]^T$، وبالتالي

$$[v]_{B_1} = [-2 + 10 + 3, 10 - 25 - 6, -6 + 15 + 3]^T = [11, -21, 12]^T$$

115.12 أوجد $F(v)$.

■ $F(v) = F(2,5,-3) = (4 + 15 + 3, 8 - 5 - 6) = (22,-3)$.

116.12 أوجد المتجه الإحداثي لـ $F(v)$، $[F(v)]_{B_2}$، في القاعدة B_2.

■ نستخدم المسألة 109.12، فنحصل على $[F(v)]_{B_2} = [(22, -3)]_{B_2} = [-66 - 6, 44 + 3]^T = [-72, 47]^T$.

117.12 حقق مبرهنة 3.12: $[F][v]_{B_1} = [F(v)]_{B_2}$.

■
$$[F][v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -21 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 - 21 + 48 \\ 77 - 42 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 \\ 47 \end{pmatrix} = [F(v)]_{B_2}$$

المسائل 118.12-121.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، المعرّف بواسطة $F(x,y,z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$، بالنسبة للقاعدتين التاليتين لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ على الترتيب:

$$B_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\} \quad \text{و} \quad B_2 = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$$

[تذكر أن $(a,b) = (-5a + 2b)v_1 + (3a - b)v_2$، بسبب المسألة 21.12].

118.12 أكتب $F(u_1)$ كتركيبة خطية في متجهي القاعدة v_1 و v_2.

■ $F(u_1) = F(1,1,1) = (3 + 2 - 4, 1 - 5 + 3) = (1,-1) = (-5 - 2)v_1 + (3 + 1)v_2 = -7v_1 + 4v_2$.

119.12 اكتب $F(u_2)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ $F(u_2) = F(1,1,0) = (5,-4) = (-25-8)v_1 + (15 + 4)v_2 = -33v_1 + 19v_2$.

120.12 أكتب $F(u_3)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ $F(u_3) = F(1,0,0) = (3,1) = (-15+2)v_1 + (9-1)v_2 = -13v_1 + 8v_2$.

121.12 أوجد التمثيل المصفوفي لـ F، $[F]$، في القاعدتين B_1 و B_2.

■ نكتب إحداثيات $F(u_1)$، $F(u_2)$، $F(u_3)$ كأعمدة:

$$[F] = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

المسائل 122.12-124.12 يتعلق بمتجه إختياري $v = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ والتطبيق الخطي F والقاعدتين B_1 و B_2 المذكورين أعلاه.

122.12 أوجد المتجه الإحداثي لـ v، $[v]_{B1}$، في القاعدة B_1.

■ نجد، من المسألة 66.12، أن $[(a,b,c)]_{B1} = [c, b-c, a-b]^T$ وكذلك $[v]_{B1} = [x, y-z, x-y]^T$.

123.12 أوجد المتجه الإحداثي لـ $F(v)$، $[F(v)]_{B2}$، في القاعدة B_2.

■ $F(v) = (3x+2y-4z, x-5y+3z) = (-13x-20y+26z)v_1 + (8x+11y-15z)$ وبذلك $[F(v)]_{B2} = [-13x-20y+26z, 8x+11y-15z]^T$.

124.12 حقق مبرهنة 3.12: $[F][v]_{B1} = [F(v)]_{B2}$.

■
$$[F][v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13x-20y+26z \\ 8x+11y-15z \end{pmatrix} = [F(v)]_{B_2}$$

125.12 ليكن $F: K^n \to K^m$ التطبيق الخطي المعرّف بواسطة

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (a_{11}x_{11} + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

بيّن أن التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين المعتادتين لـ K^n و K^m يعطى بواسطة

$$[F] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

أي أنه يُحصل على صفوف $[F]$ من معاملات الـ x_i في مركبات $F(x_1,\ldots,x_n)$، على الترتيب.

■ لدينا

$$\begin{aligned} F(1,0,\ldots,0) &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ F(0,1,\ldots,0) &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ &\cdots \\ F(0,0,\ldots,1) &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

و

$$[F] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

126.12 ليكن $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x,y) = (3x-y, 2x+4y, 5x-6y)$. أوجد التمثيل المصفوفي $[F]$ لـ F بالنسبة للقاعدتين المعتادتين لـ $\mathbf{R}^n$.

■ نحتاج فقط، إستناداً للمسألة 125.12، أن ننظر في معاملات المجاهيل في $F(x,y,\ldots)$. وبذلك

$$[F] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

127.12 ليكن $G: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $G(x,y,s,t) = (3x-4y+2s-5t, 5x+7y-s-2t)$. أوجد $[G]$ بالنسبة للقاعدة المعتادة في $\mathbf{R}^n$.

■ نجد، من المسألة 125.12، أن $[G] = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

128.12 ليكن $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ معرّفاً بواسطة $H(x,y,z)=(2x+3y-8z,x+y+z,4x-5z,6y)$. أوجد $[H]$ بالنسبة للقاعدتين المعتادتين في $\mathbb{R}^n$.

■ نجد، من المسألة 125.12، أن

$$[H]=\begin{pmatrix}2&3&-8\\1&1&1\\4&0&-5\\0&6&0\end{pmatrix}$$

129.12 لتكن $A=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}$. تذكر أن A تحدّد تطبيقاً خطياً $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ معرفاً بواسطة $F(v)=Av$ حيث يُكتب v كمتجه عمودي. بيّن أن التمثيل المصفوفي لـ F نسبةً للقاعدتين المعتادتين لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ يكون المصفوفة نفسها: أي أن $[F]=A$.

■ لدينا

$$F(1,0,0)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2e_1+1e_2$$

$$F(0,1,0)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}=5e_1-4e_2$$

$$F(0,0,1)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=-3e_1+7e_2$$

والتي نحصل منها على $[F]=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}=A$

المسائل 133.12-130.12 تتعلق بإيجاد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ المعرّف في المسألة 129.12، بالنسبة للقاعدتين $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ و $B_2=\{v_1,v_2\}$ في المسائل 121.12-118.12.

130.12 أكتب $F(u_1)$ كتركيبة خطية لـ v_1 و v_2.

■ نجد، من المسألة 21.12، أن $(a,b)=(-5a+2b)v_1+(3a-b)v_2$؛ وبالتالي

$$F(u_1)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=(-20+8)v_1+(12-4)v_2=-12v_1+8v_2$$

131.12 أكتب $F(u_2)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■
$$F(u_2)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}=(-35-6)v_1+(21+3)v_2=-41v_1+24v_2$$

132.12 أكتب $F(u_3)$ كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■
$$F(u_3)=\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(-10+2)v_1+(6-1)v_2=-8v_1+5v_2$$

133.12 أوجد $[F]$ بالنسبة للقاعدتين B_1 و B_2.

■ نكتب إحداثيات $F(u_1)$، $F(u_2)$، $F(u_3)$ كأعمدة:

$$[F]=\begin{pmatrix}-12&-41&-8\\8&24&5\end{pmatrix}$$

المسائل 137.12-134.12 تتعلق بالتطبيق الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة $T(x,y)=(2x-3y,\ x+4y)$

والقاعدتين التاليتين في R^2: $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ و $B = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$. [يمكن النظر إلى T على أنه تطبيق خطي من فضاء لآخر، لكل منهما قاعدته الخاصة به.]

134.12 أوجد التمثيل المصفوفي لـ T، $[T]_E^B$، بالنسبة للقاعدتين E و B.

■ نجد، من المسألة 21.12 أن $(a,b) = (-5a+2b)v_1 + (3a-b)v_2$؛ وبالتالي

$$T(e_1) = T(1,0) = (2,1) \;\; = -8v_1 + 5v_2 \qquad T(e_2) = T(0,1) = (-3,4) = 23v_1 - 13v_2$$

وبذلك

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$$

135.12 أوجد التمثيل المصفوفي لـ T، $[T]_B^E$، بالنسبة للقاعدتين B و E.

■

$$T(v_1) = T(1,3) = (-7,13) \;\; = -7e_1 + 13e_2 \qquad T(v_2) = T(2,5) = (-11,22) = -11e_1 + 22e_2$$

وبذلك

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 13 & 22 \end{pmatrix}$$

136.12 أوجد $[T]_E^E$.

■

$$T(e_1) = T(1,0) = (2,1) \;\; = \;\; 2e_1 + e_2 \qquad T(e_2) = T(0,1) = (-3,4) = -3e_1 + 4e_2$$

وبذلك

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

137.12 أوجد $[T]_B^B$.

■

$$T(v_1) = T(1,3) = (-7,13) \;\; = 61v_1 - 34v_2 \qquad T(v_2) = T(2,5) = (-11,22) = 99v_1 - 55v_2$$

وبذلك

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 61 & 99 \\ -34 & -55 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: $[T]_E^E$ و $[T]_B^B$ هما التمثيلان المصفوفيان لـ T كمؤثر خطي، وفق ما تمت مناقشته في قسم 1.12.

138.12 اثبت مبرهنة 3.12: ليكن $F: V \to U$ خطياً. إذن، $[F][v]_e = [F(v)]_f$.

■ لنفترض أن $\{e_1, \ldots, e_m\}$ قاعدة لـ V، وأن $\{f_1, \ldots, f_n\}$ قاعدة لـ U، ولنفترض أن

$$F(e_i) = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \cdots + a_{in}f_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j$$

من أجل $i = 1, \ldots, m$، إذن، $[F]$ هي المصفوفة $n \times m$ التي صفها رقم j هو:

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \qquad (1)$$

لنفترض الآن أن $v = k_1e_1 + \cdots + k_me_m = \sum_{i=1}^{m} k_ie_i$. بكتابة متجه عمودي كمقلوب لمتجه صفي، نجد

$$[v]_e = [k_1, k_2, \ldots, k_m]^T \qquad (2)$$

بالإضافة إلى ذلك، وباستخدام خطية F، يكون لدينا

$$F(v) = F\left(\sum_{i=1}^{m} k_ie_i\right) = \sum_{i=1}^{m} k_iF(e_i) = \sum_{i=1}^{m} k_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}k_i\right)f_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{mj}k_m)f_j$$

إذن، يكون $[F(v)]_f$ المتجه العمودي الذي مدخله رقم j

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{mj}k_m \qquad (3)$$

من جهة أخرى، نتحصل على المدخل j لـ $[F][v]_e$ بضرب (1) في (2). ولكن جداء (1) و (2) هو (3). إذن، يكون لـ $[F][v]_e$ و $[F(v)]_f$ نفس المداخل. وبذلك، $[F][v]_e = [F(v)]_f$. [ملاحظة: لاحظ التشابه بين إثباتي مبرهنة 3.12 و 1.12 في المسألة 50.11].

مبرهنة 4.12: ليكن $F: V \to U$ خطياً. إذن، توجد قاعدة في V وقاعدة في U بحيث يكون للتمثيل الصفي A لـ F الشكل $A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ حيث I المصفوفة المتطابقة المربعة -r، وحيث r رتبة F.

139.12 أثبت مبرهنة 4.12.

■ لنفترض أن $\dim V = m$ و $\dim U = n$. ولتكن W نواة F و U′ صورة F. لقد أُعطينا أن $\text{rank } F = r$؛ وبالتالي، فإن بعد نواة F يكون m-r. لتكن $\{w_1,...,w_{m-r}\}$ قاعدة لنواة F ووسعها إلى قاعدة لـ V: $\{v_1,...,v_r,w_1,...,w_{m-r}\}$.
نضع $u_1 = F(v_1), u_2 = F(v_2),...,u_r = F(v_r)$. نلاحظ أن $\{u_1,...,u_r\}$ قاعدة لـ U′ (صورة F). وسِّع هذه إلى قاعدة $\{u_1,...,u_r,u_{r+1},...,u_n\}$ لـ U. لاحظ أن

$$\begin{array}{lll}
F(v_1) & = u_1 & = 1u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n \\
F(v_2) & = u_2 & = 0u_1 + 1u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
F(v_r) & = u_r & = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 1u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n \\
F(w_1) & = 0 & = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
F(w_{m-r}) & = 0 & = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n
\end{array}$$

وبذلك يكون لمصفوفة F، في القاعدتين المذكورتين، الشكل المطلوب.

140.12 لنفترض أن $\dim V = m$ و $\dim U = n$. تذكر أن الفضاء $\text{Hom}(V,U)$، لكل التطبيقات الخطية من V إلى U، هو فضاء متجهي بعده mn. صف الارتباط بين $\text{Hom}(V,U)$ والفضاء المتجهي $\mathcal{M}$ لكل المصفوفات $n \times m$ فوق الحقل القاعدة K.

■ التقابل بين $\text{Hom}(V,U)$ و $\mathcal{M}$ تعطيه المبرهنة 5.12.

مبرهنة 5.12: لتكن $\{e_i\}$ قاعدة لـ V، و $\{f_i\}$ قاعدة لـ U. إذن، التطبيق $m: \text{Hom}(V, U) \to \mathcal{M}$، المعرَّف بواسطة $m(F) = [F]^f_e$، هو تشاكل تقابلي لفضاء متجهي. أي أنه يكون لدينا، من أجل أي $F,G \in \text{Hom}(V,U)$ وأي $k \in K$

(i) $m(F + G) = m(F) + m(G)$ أي $[F + G) = [F] + [G]$.

(ii) $m(kF) = km(F)$ أي $[kF] = k[F]$.

(iii) التطبيق m واحد ـ لواحد وفوق $\mathcal{M}$.

[إن إثبات هذه المبرهنة هو جوهرياً نفس الإثبات للأجزاء (i)، (iv) للمبرهنة 2.12، والتي ظهرت في المسائل 104.12، 105.12، و 107.12؛ لذلك حذف.]

الفصل 13
تغيير القاعدة، التشابه

1.13 مصفوفة تغيير ـ قاعدة (مصفوفة إنتقال)

1.13 عرّف مصفوفة تغيير القاعدة من أجل فضاء متجهي V.

■ لتكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ قاعدة لـ V و $\{f_1,\dots,f_n\}$ قاعدة أخرى، ولنفترض أن

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

إذن، المصفوفة المنقولة P لمصفوفة المعاملات أعلاه تسمى «مصفوفة تغيير ـ القاعدة» أو «مصفوفة الانتقال» من القاعدة «القديمة» $\{e_i\}$ إلى القاعدة «الجديدة» $\{f_i\}$. بتعبير آخر، تكون أعمدة P على الترتيب إحداثيات المتجهات $f_1,f_2,\dots,f_n$ بالنسبة للقاعدة «القديمة» $\{e_i\}$.

سوف نستخدم المبرهنتين 1.13 و 2.13 اللتين يظهر برهانهما في المسألتين 43.13 و 44.13.

مبرهنة 1.13: لتكن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من قاعدة $\{e_i\}$ إلى قاعدة $\{f_i\}$ ، و Q مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة $\{f_i\}$ إلى القاعدة $\{e_i\}$. إذن، تكون P عكوسة ويكون لدينا $Q = P^{-1}$.

مبرهنة 2.13: لتكن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من قاعدةٍ $\{e_i\}$ إلى قاعدةٍ $\{f_i\}$ في فضاء متجهي V. إذن، يكون لدينا، من أجل كل متجه $v \in V$: (i) $P[v]_f = [v]_e$ و (ii) $P^{-1}[v]_e = [v]_f$.

ملاحظة: رغم أن P تسمى مصفوفة الانتقال من القاعدة القديمة $\{e_i\}$ إلى القاعدة الجديدة $\{f_i\}$ ، إلاّ أن أثرها هو تحويل إحداثيات متجه في القاعدة الجديدة $\{f_i\}$ رجوعاً إلى الإحداثيات في القاعدة القديمة $\{e_i\}$.

المسائل 2.13-12.13 تتعلق بالقاعدتين التاليتين في $\mathbf{R}^2$: $S_1 = \{u_1 = (1,-2), u_2 = (3,-4)\}$ و $S_2 = \{v_1 = (1,3), v_2 = (3,8)\}$. وتتعلق المسائل 2.13-5.13، على الخصوص، بإيجاد مصفوفة تغيير ـ القاعدة P من S_1 إلى S_2، والمسائل 6.13-9.13 بإيجاد مصفوفة تغيير ـ القاعدة Q من S_2 إلى S_1.

2.13 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ بالنسبة للقاعدة $S_1 = \{u_1,u_2\}$.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 3y &= a \\ -2x - 4y &= b \end{aligned} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + 3y &= a \\ 2y &= 2a + b \end{aligned}$$

نحل من أجل x و y بدلالة a و b فنحصل على $x = -2a - 3/2\, b$، $y = a + 1/2\, b$. وبذلك،

$$(a,b) = (-2a - \tfrac{3}{2}b)u_1 + (a + \tfrac{1}{2}b)u_2 \quad \text{أو} \quad [(a,b)]_{S_1} = [-2a - \tfrac{3}{2}b,\ a + \tfrac{1}{2}b]^T$$

3.13 اكتب المتجه الأول في القاعدة S_2، v_1، كتركيبة خطية في متجهَي القاعدة u_1 و u_2 لـ S_1.

■ نستخدم المسألة 2.13 فنحصل على $v_1 = (1,3) = (-2-9/2)u_1 + (1+3/2)u_2 = (-13/2)u_1 + (5/2)u_2$.

4.13 اكتب v_2 كتركيبة خطية في u_1 و u_2.

■ $v_2 = (3,8) = (-6-12)u_1 + (3+4)u_2 = -18u_1 + 7u_2$.

5.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من S_1 إلى S_2.

■ نكتب إحداثيات v_1 و v_2 في القاعدة S_1 كعمودين:

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{13}{2} & -18\\ \frac{5}{2} & 7\end{pmatrix}$$

6.13 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b)\in \mathbb{R}^2$ بالنسبة للقاعدة $S_2=\{v_1,v_2\}$.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+3y=a\\3x+8y=b\end{matrix}$$

نحل من أجل x و y فنحصل على $x=-8a+3b$، $y=3a-b$. وبذلك

$(a,b)=(-8a+3b)v_1+(3a-b)v_2$ أو $[(a,b)]S_2=[-8a+3b,3a-b]^T$

7.13 اكتب المتجه الأول للقاعدة S_1، u_1، كتركيبة خطية لمتجهَي القاعدة v_1 و v_2 لـ S_2.

■ نستخدم المسألة 6.13 فنحصل على $u_1=(1,-2)=(-8-6)v_1+(3+2)v_2=-14v_1+5v_2$.

8.13 أكتب u_2 كتركيبة خطية في v_1 و v_2.

■ $u_2=(3,-4)=(-24-12)v_1+(9+4)v_2=-36v_1+13v_2$.

9.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة Q من S_2 رجوعاً إلى S_1.

■ نكتب إحداثيات u_1 و u_2 في القاعدة S_2 كعمودين:

$$Q=\begin{pmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{pmatrix}$$

10.13 تحقق من أن $Q=P^{-1}$ [مبرهنة 1.13].

■
$$QP=\begin{pmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{2} & -18\\ \frac{5}{2} & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

11.13 بيِّن أن $P[v]_{S_2}=[v]_{S_1}$، من أجل أي متجه $v=(a,b)$ [المسألة 2.13 (i)].

■ نستخدم المسائل 2.13، 5.13 و 6.13،

$$P[v]_{S_2}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{2} & -18\\ \frac{5}{2} & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8a+3b\\ 3a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a-\frac{3}{2}b\\ a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}=[v]_{S_1}$$

12.13 بيِّن أن $P^{-1}[v]_{S'}=[v]_{S'}$ من أجل أي متجه $v=(a,b)$ [مبرهنة 2.13 (ii)].

■
$$P^{-1}[v]_{S_1}=Q[v]_{S_1}=\begin{pmatrix}-14 & -36\\ 5 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2a+\frac{3}{2}b\\ a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8a+3b\\ 3a-b\end{pmatrix}=[v]_{S_2}$$

المسائل 13.13-25.13 تتعلق بالقاعدتين التاليتين في $\mathbb{R}^3$:

$S=\{u_1=(1,2,0),\ u_2=(1,3,2),\ u_3=(0,1,3)\}$ و $S'=\{v_1=(1,2,1),\ v_2=(0,1,2),\ v_3=(1,4,6)\}$

وعلى الخصوص، تتعلق المسائل 17.13-27.13 بإيجاد مصفوفة تغيير القاعدة P من S إلى S'، والمسائل 18.13-22.13 بإيجاد مصفوفة تغيير القاعدة Q من B' إلى S.

13.13 أوجد إحداثيات متجه إختياري $(a,b,c)\in \mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة $S=\{u_1,u_2,u_3\}$.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}x+y=a\\2x+3y+z=b\\2y+3z=c\end{matrix}$$

نحل من أجل x، y، z فنحصل على $x = 7a - 3b + c$، $y = -6a + 3b - c$، $z = 4a - 2b + c$. وبذلك

$$(a,b,c) = (7a - 3b + c)u_1 + (-6a + 3b - c)u_2 + (4a - 2b + c)u_3$$

أو

$$[(a,b,c)]_s = [7a - 3b + c,\ -6a + 3b - c\ \ 4a - 2b + c]^T$$

14.13 أكتب متجه القاعدة الأولى v_1 لـ S' كتركيبة خطية في متجهات القاعدة S: u_1، u_2، u_3.

■ نستخدم المسألة 13.13 فنحصل على $v_1 = (1,2,1) = (7 - 6 + 1)u_1 + (-6 + 6 - 1)u_2 + (4 - 4 + 1)u_3 = 2u_1 - u_2 + u_3$.

15.13 أكتب v_2 كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3.

■ $v_2 = (0,1,2) = (0 - 3 + 2)u_1 + (0 + 3 - 2)u_2 + (0\quad 2 + 2)u_3 = -u_1 + u_2 + 0u_3$.

16.13 أكتب v_3 كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3.

■ $v_3 = (1,4,6) = (7 - 12 + 6)u_1 + (-6 + 12 - 6)u_2 + (4 - 8 + 6)u_3 = u_1 + 0u_2 + 2u_3$.

17.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من القاعدة S إلى القاعدة S'.

■ نكتب إحداثيات v_1، v_2، v_3 بالنسبة للقاعدة S كأعمدة:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

18.13 أوجد إحداثيات متجه إختياري $v = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة $S' = \{v_1,v_2,v_3\}$.

■ لدينا

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x + \quad\quad z &= a \\ 2x + y + 4z &= b \\ x + 2y + 6z &= c \end{aligned}$$

نحلّ من أجل x، y، z فنحصل على $x = -2a + 2b - c$، $y = -8a + 5b - 2c$، $z = 3a - 2b + c$. وبذلك

$$v = (a, b, c) = (-2a + 2b - c)v_1 + (8a + 5b - 2c)v_2 + (3a - 2b + c)v_3 + c)v_3$$

أو

$$[v]_{S'} = [(a, b, c)]_{S'} = [-2a + 2b - c, -8a + 5b - 2c, 3a - 2b + c]^T$$

19.13 اكتب المتجه الأول u_1 للقاعدة S كتركيبة خطية في متجهات القاعدة S': v_1، v_2، v_3.

■ نستخدم المسألة 18.13 فنحصل على

$u_1 = (1,2,0) = (-2+4+0)v_1 + (-8+10+0)v_2 + (3-4+0)v_3 = 2v_1 + 2v_2 - v_3$.

20.13 أكتب u_2 كتركيبة خطية في v_1، v_2، v_3.

■ $u_2 = (1,3,2) = (-2+6-2)v_1 + (-8+15-4)v_2 + (3-6+2)v_3 = 2v_1 + 3v_2 - v_3$.

21.13 أكتب u_3 كتركيبة خطية في v_1، v_2، v_3.

■ $u_3 = (0,1,3) = (0+2-3)v_1 + (0 + 5 - 6)v_2 + (0-2+3)v_3 = -v_1 - v_2 + v_3$.

22.13 أوجد مصفوفة تغيير ـ القاعدة Q من القاعدة S' رجوعاً إلى القاعدة S.

■ نكتب إحداثيات u_1، u_2، u_3 بالنسبة للقاعدة S' كأعمدة:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

23.13 تحقق أن $Q = P^{-1}$ [مبرهنة 1.13].

■
$$QP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

24.13 بيّن أن $P[v]_{S'} = [v]_S$، من أجل أي متجه $v = (a,b,c)$ [مبرهنة 2.13 (i)].

■
$$P[v]_{S'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a+2b-c \\ -8a+5b-2c \\ 3a-2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a+3b+c \\ -6a+3b-c \\ 4a-2b+c \end{pmatrix} = [v]_S$$

25.13 بيّن أن $P^{-1}[v]_S = [v]_{S'}$، من أجل أي متجه $v = (a,b,c)$ [مبرهنة 2.13 (ii)].

■
$$P^{-1}[v]_S = Q[v]_S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7a-3b+c \\ -6a+3b-c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+2b-c \\ -8a+5b-2c \\ 3a-2b+c \end{pmatrix} = [v]_{S'}.$$

26.13 لنفرض أن $v_1 = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$، $v_2 = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$، ...، $v_n = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ تشكل قاعدة S لـ K^n. بيّن أن مصفوفة تغيير القاعدة من القاعدة المعتادة $E = \{e_i\}$ لـ K^n إلى القاعدة S تكون المصفوفة P التي أعمدتها المتجهات $v_1,v_2,\ldots,v_n$ على الترتيب.

■ لدينا

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n \\ v_2 &= (b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= (c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n \end{aligned}$$

بكتابة الإحداثيات كأعمدة، نحصل على

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & b_n & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

كما هو مطلوب.

27.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من القاعدة المعتادة $E = \{e_1,e_2,e_3\}$ لـ R^3 إلى القاعدة $S = \{w_1 = (1,1,1),\ w_2 = (1,1,0),\ w_3 = (1,0,0)\}$.

■ نستخدم المسألة 26.13، فنكتب متجهات القاعدة w_1، w_2، w_3 كأعمدة:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة Q من القاعدة S أعلاه رجوعاً إلى القاعدة المعتادة E في R^3.

■ تذكر [المسألة 66.12] أن $(a,b,c) = cw_1 + (b-c)w_2 + (a-b)w_3$. وبذلك

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0) = 0w_1 + 0w_2 + 1w_3 \\ e_2 &= (0,1,0) = 0w_1 + 1w_2 - 1w_3 \\ e_3 &= (0,0,1) = 1w_1 - 1w_2 + 0w_3 \end{aligned}$$

و

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

29.13 تحقق من أن $Q = P^{-1}$ من أجل المصفوفتين P و Q [مبرهنة 1.13].

■
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

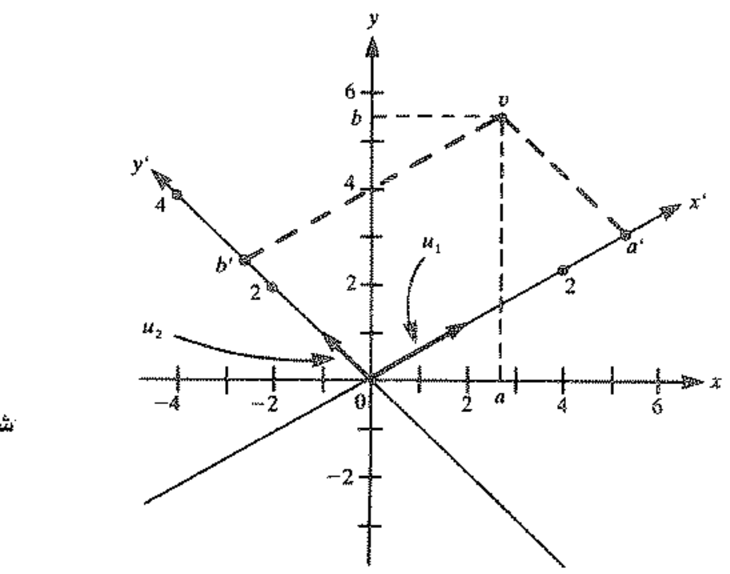
30.13 بيِّن أن $P^{-1}[v]_E = [v]_S$ من أجل أي متجه $v = (a,b,c)$ في $\mathbf{R}^3$.

■ لدينا $[v]_E = [a,b,c]^T$ و $[v]_S = [c,b-c,a-b]^T$. إذن

$$P^{-1}[v]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix} = [v]_S$$

31.13 ليكن $v = (a,b)$ عنصراً في $\mathbf{R}^2$. إذن $v = ae_1 + be_2$ حيث $E = \{e_1,e_2\}$ القاعدة المعتادة في $\mathbf{R}^2$. لنفترض قاعدة أخرى، ولتكن $S = \{u_1 = (2,1), u_2 = (-1,1)\}$. أعط تفسيراً هندسياً أننا إخترنا للمتجه الإحداثي $[v]_S = [a',b']$.

■ تحدد القاعدة S منظومة إحداثية جديدة من أجل المستوى $\mathbf{R}^2$ المحورين جديدين x' و y'، كما موضح بالشكل 13-1. أي أن المتجهين u_1 و u_2 يدلّان، على الترتيب، على الاتجاهين الموجبين للمحورين الجديدين x' و y'؛ ويحدد طولا u_1 و u_2، على الترتيب، وحدتَي الطول على المحورين الجديدين x' و y'. في هذه المنظومة الجديدة للإحداثيات، يكون a' تقاطع المحور x'- ومستقيم عبر v موازٍ لـ y'، وتكون b' تقاطع المحور y'- مع مستقيم عبر v موازٍ لـ x'.



شكل 13-1

32.13 أوجد، في المسألة السابقة، مصفوفة تغيير القاعدة P من القاعدة E إلى القاعدة S، وأوجد مصفوفة تغيير القاعدة Q من القاعدة S رجوعاً للقاعدة E.

■ بما أن E القاعدة المعتادة، نكتب u_1 و u_2 كعمودين لنحصل على P، أي

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أيضاً، نستخدم الصيغة من أجل معكوس مصفوفة 2×2، فنجد أن

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

33.13 في المسألة 31.13، عبِّر عن a' و b' بدلالة a و b.

■ نجد، من مبرهنة 2.13، أن

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = [v]_S = P^{-1}[v]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$$

أي أن $a' = a/3 + b/3$ و $b' = -a/3 + 2b/3$.

34.13 لتكن القاعدتان $S=\{1,i\}$ و $S'=\{1+i,1+2i\}$ للحقل العقدي C فوق الحقل الحقيقي ℝ. أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من القاعدة S إلى القاعدة S′.

■ لدينا

$$\begin{aligned}1+i&=1(1)+1(i)\\1+2i&=1(1)+2(i)\end{aligned} \quad \text{وبذلك} \quad P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

35.13 أوجد، في المسألة 34.13، مصفوفة تحويل القاعدة Q من القاعدة S′ إلى القاعدة S.

■ نستخدم الصيغة من أجل معكوس مصفوفة 2×2 [المسألة 87.4]:

$$Q=P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

36.13 لتكن القاعدتان $E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ و $S=\{v_1=(1,3),v_2=(2,5)\}$ لـ $\mathbb{R}^2$. أوجد مصفوفة الانتقال P من القاعدة E إلى القاعدة S.

■ بما أن E القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^2$، نكتب المتجهين v_1 و v_2 كعمودين:

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$$

37.13 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة Q من القاعدة S أعلاه رجوعاً إلى القاعدة المعتادة E لـ $\mathbb{R}^2$.

■ تذكر [مسألة 21.12] أن $(a,b)=(-5a+2b)v_1+(3a-b)v_2$. إذن

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0)=-5v_1+3v_2\\e_2&=(0,1)=\ \ 2v_1-\ v_2\end{aligned} \quad \text{و} \quad Q=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

38.13 تحقق أن $Q=P^{-1}$ من المصفوفتين P و Q أعلاه [مبرهنة 1.13].

■
$$QP=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

39.13 بيِّن أن $P^{-1}[v]_E=[v]_S$ من أجل أي متجه $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

■ لدينا $[v]_E=[a,b]^T$ و $[v]_S=[-5a+2b,3a-b]^T$. وبالتالي

$$P^{-1}[v]_E=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5a+2b\\3a-b\end{pmatrix}$$

40.13 لنفترض أننا أدرنا محوري x و y في المستوى $\mathbb{R}^2$ بزاوية 45° في عكس اتجاه عقارب الساعة، بحيث أصبح محور x′ الجديد على طول المستقيم $y=x$، ومحور y′- الجديد على طول المستقيم $y=-x$. أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P.

■ هنا، $u_1=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ هو متجه الوحدة على محور x′ الجديد. و $u_2=(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ هو متجه الوحدة على محور y′ الجديد. [لاحظ أن متجهَي القاعدة المعتادة هما، على الترتيب، متجهَي الوحدة على محوري x و y الأصليين]. وبذلك

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

41.13 أوجد الإحداثيات الجديدة لنقطة $A(5,6)$ في $\mathbb{R}^2$ تحت الدوران في المسألة 40.13.

■ لضرب إحداثيات النقطة في P^{-1}:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

42.13 أوضح مبرهنة 2.13 في حالة $\dim V=3$. لنفترض، تحديداً، أن P هي مصفوفة تغيير - القاعدة من القاعدة $\{e_1,e_2,e_3\}$ لـ V إلى قاعدة $\{f_1,f_2,f_3\}$؛ ليكن

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{وبالتالي} \quad \begin{aligned} f_1 &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ f_2 &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ f_3 &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}$$

لنفترض، أيضاً، أن $v \in V$ وليكن $v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$. بيّن أن $P[v]_f = [v]_e$ و $P^{-1}[v]_e = [v]_f$.

▩ نعوض من أجل f_i لـ في $v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$، نحصل على

$$\begin{aligned} v &= k_1(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + k_2(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + k_3(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \\ &= (a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3)e_1 + (a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3)e_2 + (a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3)e_3 \end{aligned}$$

وبذلك، $[v]_f = [k_1, k_2, k_3]^T$ و $[v]_e = [a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3, a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3, a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3]^T$، إذن

$$P[v]_f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \\ a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 \end{pmatrix} = [v]_e$$

أيضاً، بضرب المعادلة السابقة في P^{-1}، يكون لدينا $P^{-1}[v]_e = P^{-1}P[v]_f = I[v]_f = [v]_f$.

43.13 أثبت مبرهنة 1.13: لتكن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من قاعدة $\{e_i\}$ إلى قاعدةٍ $\{f_i\}$، ولتكن Q مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة $\{f_i\}$ رجوعاً إلى القاعدة $\{e_i\}$. إذن، تكون P عكوسة ويكون لدينا $Q = P^{-1}$.

▩ لنفترض أن

$$f_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \tag{1}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$، وكذلك

$$e_j = b_{j1}f_1 + b_{j2}f_2 + \cdots + b_{jn}f_n = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}f_k \tag{2}$$

من أجل $j = 1,2,\ldots,n$. لتكن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{jk})$. إذن، $P = A^T$ و $Q = B^T$. نعوض بـ (2) في (1) فنحصل على

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}f_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)f_k$$

بما أن $\{f_i\}$ قاعدةٌ، إذن $\sum a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$، حيث δ_{ik} دالة دلتا كرونكر، أي أن $\delta_{ik} = 1$ إذا $i = k$، ولكن $\delta_{ik}=0$ إذا $i \neq k$. لنفترض $AB = (c_{ik})$. إذن، $c_{ik}=\delta_{ik}$. ينتج عن ذلك أن $AB=I$، وبذلك $QP = B^TA^T = (AB)^T = I^T = I$. إذن، $Q=P^{-1}$.

44.13 أثبت مبرهنة 2.13: لتكن مصفوفة قاعدة ـ التغيير من قاعدةٍ $\{e_i\}$ إلى قاعدةٍ $\{f_i\}$ في فضاء متجهي V. إذن، يكون لدينا من أجل أي $v \in V$، (i) $P[v]_f = [v]_e$ و (ii) $P^{-1}[v]_e = [v]_f$.

▩ لنفترض أن $f_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$. لأجل $i = 1,\ldots,n$، لأن P المصفوفة المربعة n وصفها j هو

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \tag{1}$$

إذن، وبكتابة متجه عمودي كمنقول لمتجه صفي: $v = k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_nf_n = \sum_{i=1}^{n} k_if_i$

$$[v]_f = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T \tag{2}$$

نعوض من أجل f_i في المعادلة من أجل v،

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_if_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_i\right)e_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n)e_j$$

ينتج عن ذلك أن $[v]_e$ هو المتجه العمودي الذي مدخله j:

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n \quad (3)$$

من جهة أخرى، نتحصل على المدخل j في $P[v]_f$ بضرب الصف j لـ P في $[v]_f$، أي ضرب (1) و (2). ولكن جداء (1) و (2) هو (3)؛ وبالتالي، يكون لـ $P[v]_f$ و $[v]_e$ نفس المداخل، وبذلك $P[v]_f = [v]_e$.

بالإضافة إلى ذلك، ضرب ما جاء أعلاه في P^{-1} يعطينا $P^{-1}[v]_e = P^{-1}P[v]_f = [v]_f$.

2.13 تغيير القاعدة والعمليات الخطية

ناقشنا في القسم السابق تأثير تغيير القاعدة على المتجهات الإحداثية. نناقش هنا، في هذا القسم، تأثير تغيير القاعدة على التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي؛ وسوف نستخدم على الخصوص، المبرهنتين التاليتين اللتين سيتم إثباتهما في المسالتين 60.13 و 61.13.

مبرهنة 3.13: لتكن P مصفوفة تغيير القاعدة من القاعدة S_1 إلى القاعدة S_2 في فضاء متجهي V. إذن $[T]_{S2} = P^{-1}[T]_{S1}P$. من أجل أي مؤثر خطي T على V.

مبرهنة 4.13: لتكن A مصفوفة مربعة -n فوق K (والتي يمكن إعتبارها مؤثراً خطياً على K^n) ولتكن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ قاعدة لـ K^n. إذن، التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة المعطاة يكون المصفوفة $B = P^{-1}AP$، حيث P المصفوفة التي أعمدتها $u_1,u_2,\ldots,u_n$ على الترتيب.

45.13 ليكن $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المؤثر الخطي المعرّف بواسطة $T(x,y) = (3x - 5y, 2x + 7y)$. أوجد التمثيل المصفوفي $[T]_E$ لـ T بالنسبة للقاعدة المعتادة E في $\mathbb{R}^2$.

■ بما أن E القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^2$، نكتب معاملات x و y كصفين، فنحصل على $[T]_E = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

46.13 أوجد التمثيل المصفوفي $[T]_S$ للتطبيق الخطي T أعلاه بالنسبة للقاعدة $S = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$.

■ **طريقة 1**: نستخدم تعريف $[T]_s$ للتطبيق الخطي T اعلاه بالنسبة للقاعدة $(a,b) = (-5a+2b)v_1 + (3a-b)v_2$ [أنظر المسالة 37.13]، على

$$T(v_1) = T(1,3) = (3-15, 2+23) = (-12, 25) = (60+46)v_1 + (-36-23)v_2 = 106v_1 - 59v_2$$
$$T(v_2) = T(2,5) = (6-25, 4+35) = (-19, 39) = (95+78)v_1 + (-57-39)v_2 = 173v_1 - 96v_2$$

نكتب إحداثيات $T(v_1)$ و $T(v_2)$ كأعمدة فنحصل على $[T]_S = \begin{pmatrix} 106 & 173 \\ -59 & -96 \end{pmatrix}$

طريقة 2: نستخدم المبرهنة 3.13. نجد من المسالتين 36.13 و 38.13، أن مصفوفة تغيير - القاعدة من القاعدة E إلى القاعدة S تكون $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$، ويكون لدينا $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. إذن

$$[T]_S = P^{-1}[T]_E P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 & 173 \\ -59 & -96 \end{pmatrix}$$

47.13 ليكن $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرّفاً بواسطة $L(x,y) = (2y, 3x - y)$. أوجد التمثيل المصفوفي $[L]_S$ للتطبيق L نسبةً إلى القاعدة S أعلاه.

■ لدينا $[L]_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ حيث E القاعدة المعتادة في $\mathbb{R}^2$. إذن

$$[L]_S = P^{-1}[L]_E P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

48.13 ليكن $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x,y,z) = (x+3y+2z, x-4z, y+3z)$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدة المعتادة E في $\mathbb{R}^3$.

■ بما أن E القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^3$، نكتب معاملات x، y، z كصفوف، فنحصل على

$$[F]_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

49.13 أوجد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي F أعلاه بالنسبة للقاعدة التالية لـ $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,0,0)\}$$

■ نجد، من المسألتين 27.13 و 29.13، أن مصفوفة تغيير القاعدة من القاعدة E إلى القاعدة S تكون

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

لذلك، وبسبب المبرهنة 3.13، يكون لدينا

$$[F]_S = P^{-1}[F]_E P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

50.13 ليكن $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرّفاً بواسطة $G(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ G بالنسبة للقاعدة S أعلاه.

■ من المبرهنة 3.13:

$$[G]_S = P^{-1}[G]_E P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

51.13 ليكن $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المؤثر الخطي المعرّف بواسطة المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أوجد التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة المعتادة E في $\mathbb{R}^3$.

■ نسترجع المصفوفة A، بالنسبة للقاعدة المعتادة E؛ أي أن

$$[A]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

52.13 أوجد التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي A أعلاه بالنسبة للقاعدة S في المسألة 49.13.

■ نجد، من مبرهنة 3.13، أن

$$[A]_S = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

53.13 ليكن $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرّفاً بواسطة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. لتكن B التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة $\{(1,4),(3,10)\}$. أوجد B.

■ نكتب متجهَي القاعدة كعمودين، فنحصل على $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$. نستخدم الصيغة من أجل معكوس مصفوفة مربعة-2 [المسألة 87.4]، فنحصل على $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. إذن

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 & 329 \\ -53 & -128 \end{pmatrix}$$

54.13 لتكن $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ولتكن B التمثيل المصفوفي الخطي $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ بالنسبة إلى القاعدة $\{(1,4),(2,9)\}$. أوجد B.

■ نجد، من المبرهنة 4.13، أن

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 & 487 \\ -98 & -217 \end{pmatrix}$$

55.13 لتكن $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ أوجد P^{-1}.

■ نستخدم خوارزمية الحذف لجاوس الموصوفة في المسألة 92.4:

$$(P, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

وبالتالي،

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

56.13 لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ولتكن B التمثيل المصفوفي الخطي $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بالنسبة للقاعدة $\{(1,1,2),(2,3,5),(1,4,6)\}$. أوجد B.

■ نجد، من مبرهنة 3.13 والمسألة 55.13، أن

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & -6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -1 & 59 \\ 7 & -6 & -43 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

57.13 أوجد معكوس $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ يكون معكوس P في الشكل $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. نضع $PP^{-1} = I$ (حيث I المصفوفة المتطابقة):

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & y+z+1 \\ 0 & 1 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

نساوي بين المداخل المتقابلة لنحصل على المنظومة $x + 1 = 0$، $y + z + 1 = 0$، $z = 1 = 0$. وحلها $x = -1$، $y = 0$، $z = -1$. إذن

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

58.13 لتكن $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

ولتكن B التمثيل المصفوفي للتطبيق الخطي $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ بالنسبة للقاعدة $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. أوجد B.

■ إن المصفوفة P أعلاه هي مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة المعتادة في $\mathbb{R}^3$ إلى القاعدة المعطاة. إذن

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-5&-9&-12\\7&15&24\end{pmatrix}$$

59.13 ليكن $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ المؤثر المرافق حيث C الحقل العقدي منظوراً إليه كفضاء متجهي فوق الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدة $S=\{1+2i,3+4i\}$ في C.

■ لتكن القاعدة المعتادة $E=\{1,i\}$ لـ C. بما أن $T(1)=1$ و $T(i)=-i$، فإن $T(i)=-i$، $[T]_E=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
أيضاً، مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة E إلى القاعدة S تكون $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$. لدينا، بالإضافة إلى ذلك،
$P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ وبذلك

$$[T]_S=P^{-1}[T]_EP=\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-12\\2&5\end{pmatrix}$$

60.13 أثبت مبرهنة 3.13: لتكن P مصفوفة تغيير القاعدة من قاعدة $\{e_i\}$ إلى قاعدة $\{f_i\}$ في فضاء متجهي V. إذن، $[T]_f=P^{-1}[T]_eP$، من أجل أي مؤثر خطي T على V.

■ لدينا، من أجل أي متجه $v\in V$، أن $P^{-1}[T]_eP[v]_f=P^{-1}[T]_e[v]_e=P^{-1}[T(v)]_e=[T(v)]_f$. ولكن $[T]_f[v]_f=[T(v)]_f$؛ وبالتالي $P^{-1}[T]_eP[v]_f=[T]_f[v]_f$. بما أن التطبيق $v\mapsto[v]_f$ فوق K^n، إذن $P^{-1}[T]_ePX=[T]_fX$، من أجل كل $X\in K^n$. ينتج عن ذلك أن $P^{-1}[T]_eP=[T]_f$.

61.13 أثبت مبرهنة 4.13: لتكن A مصفوفة مربعة n- فوق K ولتكن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ قاعدة لـ K^n. إذن، التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة المعطاة يكون المصفوفة $B=P^{-1}AP$، حيث P المصفوفة التي أعمدتها $u_1,\ldots,u_n$، على الترتيب.

■ إن التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ K^n يكون المصفوفة A نفسها. أيضاً، تكون P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة المعتادة إلى القاعدة المعطاة. إذن، وبواسطة مبرهنة 3.13، تكون $B=P^{-1}AP$ التمثيل المصفوفي لـ A بالنسبة للقاعدة المعطاة.

3.13 التشابه وتحويلات التشابه

62.13 عرّف تشابه المصفوفات وتحويلات التشابه.

■ لتكن A و B مصفوفتين مربعتين، يوجد لهما مصفوفة عكوسة بحيث أن $B=P^{-1}AP$. إذن، نقول عن B أنها «مشابهة» لـ A، أو أنه يمكن الحصول على B من A بواسطة «تحويل تشابه».
المسائل 63.13-65.13 تبين أن تشابه المصفوفات علاقة تكافؤ.

63.13 بيّن أن A مشابهة لـ A، من أجل أي مصفوفة (مربعة) A.

■ المصفوفة المتطابقة I عكوسة، ولدينا $I=I^{-1}$. بما أن $A=I^{-1}AI$، إذن A مشابهة لـ A.

64.13 بيّن أنه إذا كانت A مشابهة لـ B، فإن B، مشابهة لـ A.

■ بما أن A مشابهة لـ B، إذن توجد مصفوفة عكوسة P بحيث أن $A=P^{-1}BP$؛ إذن $B=PAP^{-1}=(P^{-1})AP^{-1}$ و P^{-1} عكوسة. إذن B مشابهة لـ A.

65.13 بيّن أنه إذا كانت A مشابهة لـ B و B مشابهة لـ C فإن A مشابهة لـ C.

▩ بما أنّ A مشابهة لـ B فإنه توجد مصفوفة عكوسة P بحيث $A = P^{-1}BP$، وبما أن B مشابهة لـ C، فإنه توجد مصفوفة عكوسة Q بحيث أن $B = Q^{-1}CQ$. وبالتالي، $A = P^{-1}BP = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (QP)^{-1}C(QP)$، وتكون QP عكوسة. إذن، A مشابهة لـ C.

ملاحظة: بما أن تشابه المصفوفات علاقة تشابه، فإن كل المصفوفات المربعة -n مجزأة إلى أصناف تكافؤ لمصفوفات مشابهة.

مبرهنة 5.13: لنفترض أن A هي التمثيل المصفوفي لمؤثر خطي T. إذن، تكون B أيضاً تمثيلاً مصفوفياً لـ T إذا وفقط إذا كانت B مشابهة لـ A. [وبذلك، تشكل كل التمثيلات المصفوفية لـ T صنف تكافؤ لمصفوفات متشابهة].

66.13 أثبت مبرهنة 5.13.

▩ لنفترض أن A التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدة $\{e_i\}$. ولنفترض أن B مشابهة لـ A، أي أن $B = P^{-1}AP$ حيث $P = (P_{ij})$. بما أن P عكوسة، فإن المتجهات $f_i = p_{1i}e_1 + p_{2i}e_2 + ... + p_{ni}e_n$ (وعددها n)، $i = 1,...,n$ تكون مستقلة خطية وتشكل لذلك قاعدة أخرى لـ V. أيضاً، تكون P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة $\{e_i\}$ إلى القاعدة $\{f_i\}$. وبذلك، تكون $B = P^{-1}AP$ التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدة $\{f_i\}$.

وبالعكس، لنفترض أن B التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة لقاعدةٍ $\{f_i\}$. لتكن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من $\{e_i\}$ إلى القاعدة $\{f_i\}$. نجد، من مبرهنة 3.13، أن $B = P^{-1}AP$ وبذلك تكون B مشابهة لـ A.

ملاحظة: لنفترض أن f دالة على مصفوفات مربعة، تقرن نفس القيمة بالمصفوفات المتشابهة، أي $f(A) = f(B)$، كلما كانت A مشابهة لـ B. إذن، f تعرّف دالة، يرمز لها أيضاً بـ f، على المؤثرات الخطية T وذلك بالاسلوب الطبيعي التالي: $f(T) = f([T]_e)$، حيث $\{e_i\}$ أي قاعدة. وتكون الدالة معرّفة جيداً بسبب مبرهنة 5.13.

ملاحظة: تذكر أن الفضاء المتجهي M_n لكل المصفوفات المربعة -n فوق حقل K، والفضاء المتجهي $A(V)$ لكل المؤثرات الخطية على فضاء متجهي V فوق K، هما جبران فوق K. يُعرَّفُ مفهوم التشابه أيضاً من أجل جبر تجريدي $\mathscr{A}$ فوق حقل K، أي أن العنصرين $A,B \in \mathscr{A}$ يكونان متشابهين إذا كان يوجد عنصر عكوس $P \in \mathscr{A}$ بحيث أن $B = P^{-1}AP$. وتنطبق هنا مبرهنة 6.13 التي سوف تبرهن في المسائل 67.13-70.13.

مبرهنة 6.13: ليكن $\mathscr{A}$ جبراً فوق حقلٍ K، وليكن P عنصراً عكوساً في $\mathscr{A}$. إذن، التطبيق $T_P: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ المعرّف بواسطة $T_p(A) = P^{-1}AP$ يكون تشاكلاً جبرياً. أي، يكون لدينا، من أجل كل $A,B \in \mathscr{A}$ وأي $k \in K$:

(i) $T_p(A + B) = T_p(A) + T_p(B)$. (iii) $T_p(AB) = T_p(A)T_p(B)$.

(ii) $T_p(kA) = kT_p(A)$ (iv) T_p واحد ـ لواحد وفوقي.

[التطبيق T_p يسمى «تحويل تشابه»].

67.13 أثبت (i) في مبرهنة 6.13: $T_p(A + B) = T_p(A) + T_p(B)$.

▩ $T_p(A + B) = P^{-1}(A + B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = T_p(A) + T_p(B)$.

68.13 أثبت (ii) في مبرهنة 6.13: $T_p(kA) = kT_p(A)$.

▩ $T_p(kA) = P^{-1}(kA)P = k(P^{-1}AP) = kT_p(A)$.

69.13 أثبت (iii) في مبرهنة 6.13: $T_p(AB) = T_p(A)T_p(B)$.

▩ $T_p(AB) = P^{-1}(AB)P = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = T_p(A)T_p(B)$.

70.13 أثبت (iv) في مبرهنة 6.13: T_p واحد ـ لواحد وفوق $\mathscr{A}$.

■ لنفترض أن $T_p(A) = T_p(B)$. إذن، $P^{-1}AP = P^{-1}BP$. نضرب في P من جهة اليسار، وفي P^{-1} من جهة اليمين، فنحصل على $A = B$. وبالتالي، يكون T_p واحد ـ لـواحد. لنفترض الآن أن $B \in \mathscr{A}$، ولتكن $A = PBP^{-1}$. إذن، $T_p(A) = P^{-1}(PBP^{-1}P) = B$. وبذلك، يكون T_p فوق $\mathscr{A}$.

المسائل 71.13-73.13 تقدم خواصاً إضافية للتشابه في جبر $\mathscr{A}$.

71.13 لنفترض أن B مشابه لـ A، أي $B = P^{-1}AP$. بيِّن أن B^{-1} مشابه لـ A^{-1}.

■ لدينا $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$، وبذلك يكون B^{-1} مشابهاً لـ A^{-1}.

72.13 لنفترض أن B مشابه لـ A، أي $B = P^{-1}AP$. بيِّن أن $B^n = P^{-1}A^nP$ وبذلك يكون B^n مشابهاً لـ A^n.

■ يكون البرهان بالاستقراء على n. تتحقق النتيجة من أجل $n = 1$ (فرضاً). لنفترض أنّ $n > 1$ وأن النتيجة تحقق من أجل $n - 1$. إذن $B^n = BB^{n-1} = (P^{-1}AP)(P^{-1}A^{n-1}P) = P^{-1}A^nP$.

73.13 لنفترض أن D عنصر قطري في $\mathscr{A}$ أي أن $D = kI$، من أجل بعض $k \in K$. بين أن D هو العنصر الوحيد المشابه لنفسه.

■ لنفترض أن B مشابه لـ D، أي $B = P^{-1}DP$. إذن، $B = P^{-1}DP = P^{-1}(kI)P = k(P^{-1}IP) = kI = D$.

4.13 أثر ومحددة مؤثر خطي

إن «أثر» مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$، ونكتبه $tr(A)$، هو مجموع عناصرها القطرية، أي $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. سوف نستخدم هنا مبرهنة 7.13 التي يظهر برهانها في المسألة 89.13.

مبرهنة 7.13: لنفترض أن B مشابهة لـ A. إذن، $tr(A) = tr(B)$.

74.13 عرّف اثر مؤثر خطي T، والذي نكتبه $tr(T)$. لماذا يكون التعريف معرّفاً جيداً؟

■ لدينا (تعريفاً) أن $tr(T) = tr([T])$، حيث $[T]$ أي تمثيل مصفوفي لـ T. نجد، من مبرهنة 7.13، أن كل المصفوفات المتشابهة لها نفس الأثر، وبذلك سوف يكون لكل التمثيلات المصفوفية لـ T نفس الأثر.

75.13 عرّف محددة مؤثر خطي T، والتي نكتبها $det(A)$. لماذا يكون التعريف معرّفاً جيداً؟

■ لدينا (تعريفاً) أن $det(T) = det([T])$، حيث $[T]$ أي تمثيل مصفوفي لـ T. بما أن المصفوفات المتشابهة لها نفس المحددة، فإن أي تمثيل مصفوفي لـ T سوف يعطينا نفس القيمة المحددية.

المسائل 76.13-79.13 تتعلق بالمؤثر الخطي على $\mathbb{R}^2$ المعرف بواسطة $F(x,y) = (3x - 7y, 4x + 8y)$.

76.13 أوجد أثر F.

■ يجب أولاً أن نجد تمثيلاً مصفوفياً لـ F. باختيار القاعدة المعتادة، يكون لدينا $[F] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$. وبالتالي، $tr(F) = tr([F]) = 3 + 8 = 11$.

77.13 هل يمكننا أن نحصل على قيمة أخرى من أجل $tr(F)$ باختيار قاعدة أخرى؟

■ لا، فإن كل التمثيلات المصفوفية لـ F متشابهة وبالتالي يكون لها جميعاً نفس الأثر 11.

78.13 أوجد محددة F.

■ لدينا، نسبةً للقاعدة المعتادة، أن $[F] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$. وبالتالي، $det(F) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 28 = 52$

79.13 هل يمكننا الحصول على قيمة أخرى من أجل $det(F)$ باختيار قاعدة أخرى؟

■ لا، فإن كل التمثيلات المصفوفية لـ F متشابهة، وبذلك تكون لها نفس القيمة المحددية 52.

80.13 أوجد $\det(T)$ من أجل المؤثر الخطي على $\mathbb{R}^3$ المعرّف بواسطة $T(x,y,z) = (2x - z, x + 2y - 4z, 3x - 3y + z)$.

■ أوجد التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة مثلاً للقاعدة المعتادة، وذلك بكتابة معاملات x، y، z كصفوف، فنحصل على

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي،

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 3 + 6 - 24 - 0 = -11$$

81.13 أوجد أثر المؤثر الخطي T أعلاه.

■

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 + 1 = 5$$

82.13 أوجد أثر المؤثر التالي على $\mathbb{R}^3$:

$$T(x,y,z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

■ يجب أن نجد أولاً تمثيلاً مصفوفياً لـ T. باختيار القاعدة المعتادة $\{e_i\}$، تحصل على

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

وبذلك، $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}([T]) = a_1 + b_2 + c_3$.

83.13 أوجد محددة المؤثر الخطي T أعلاه.

■

$$\det(T) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

84.13 لنعتبر الحقل العقدي C فضاءً متجهياً فوق الحقل الحقيقي $\mathbb{R}$. وليكن T المؤثر المرافق على C، أي أن $T(z) = \bar{z}$. أوجد $\det(T)$.

■ بما أن $T(1) = 1$ و $T(i) = -i$، فيكون لدينا $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للقاعدة المعتادة $\{1, i\}$ لـ C فوق $\mathbb{R}$. إذن،

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

85.13 أوجد أثر المؤثر المرافق T على C المذكور أعلاه.

■

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

86.13 لنفترض أن T المؤثر على الفضاء المتجهي V للمصفوفات المربعة -2 فوق K، والمعرّف بواسطة $T(A) = MA$ حيث $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. أوجد $\det(T)$.

■ نوجد تمثيلاً مصفوفياً لـ T في قاعدةٍ ما لـ V، ولتكن

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

إذن

$$T(E_1)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=aE_1+0E_2+cE_3+0E_4$$

$$T(E_2)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=0E_1+aE_2+0E_3+cE_4$$

$$T(E_3)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=bE_1+0E_2+dE_3+0E_4$$

$$T(E_4)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=0E_1+bE_2+0E_3+dE_4$$

وبذلك

$$[T]_E=\begin{pmatrix}a&0&c&0\\0&a&0&c\\b&0&d&0\\0&b&0&d\end{pmatrix}$$ و $$\det(T)=\begin{vmatrix}a&0&c&0\\0&a&0&c\\b&0&d&0\\0&b&0&d\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&0&c\\0&d&0\\b&0&d\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}0&a&c\\b&0&0\\0&b&d\end{vmatrix}=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$$

87.13 أوجد أثر المؤثر الخطي T أعلاه.

■
$$\mathrm{tr}(T)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}a&0&c&0\\0&a&0&c\\b&0&d&0\\0&b&0&d\end{pmatrix}=2a+2d$$

88.13 بيِّن أن $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$، من أجل أي مصفوفتين مربعتين -n A و B.

■ لتكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$. إذن، $AB=(c_{ik})$ حيث $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$. وبذلك

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$$

من جهة أخرى، $BA=(d_{jk})$ حيث $d_{jk}=\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ik}$. إذن

$$\mathrm{tr}(BA)=\sum_{j=1}^{n}d_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\mathrm{tr}(AB)$$

89.13 أثبت مبرهنة 7.13: إذا كانت مصفوفة B مشابهة لمصفوفة A، فإن $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(A)$.

■ إذا كانت A مشابهة لـ B، إذن توجد مصفوفة عكوسة P بحيث أن $A=P^{-1}BP$. نستخدم المسألة 88.13 فنحصل على $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(P^{-1}BP)=\mathrm{tr}(BPP^{-1})=\mathrm{tr}(B)$.

5.13 تغيير القاعدة والتطبيقات الخطية

يناقش هذا القسم تأثير تغيير قاعدة على التمثيل المصفوفي لتطبيق خطي من فضاء متجهي إلى آخر. سوف نستخدم فيما يلي مبرهنة 8.13.

مبرهنة 8.13: لنفترض أن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من قاعدةٍ $\{e_i\}$ إلى قاعدةٍ $\{e'_i\}$ لفضاء متجهي V، ولنفترض أن Q مصفوفة تغيير ـ القاعدة من قاعدة $\{f_i\}$ إلى قاعدةٍ $\{f'_i\}$ لفضاء متجهي U. ولتكن A تمثيلاً مصفوفياً لتطبيق خطي $F: V\to U$ بالنسبة للقاعدتين $\{e_i\}$ و $\{f_i\}$. إذن

(i) إن التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين $\{e'_i\}$ و $\{f'_i\}$ هو المصفوفة $Q^{-1}AP$؛ أي أن $[F]_{e'}^{f'}=Q^{-1}[F]_e^fP$.

(ii) إن التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين $\{e'_i\}$ و $\{f_i\}$، أي عندما يتم تغيير القاعدة في V فقط، يكون AP؛ أي أن $[F]_{e'}^{f}=[F]_e^fP$.

(iii) إن التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين $\{e_i\}$ و $\{f'_j\}$، أي عندما يتم تغيير القاعدة في U فقط، يكون $Q^{-1}A$؛ أي أن $[F]_e^{f'} = Q^{-1}[F]_e^f$.

سوف نرمز، خلال هذا الفصل بـ E_2، E_3، E_4 على الترتيب للقواعد المعتادة من أجل $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$، $\mathbb{R}^4$؛ وبـ S_2، S_3، S_4 للقواعد التالية من أجل $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$، $\mathbb{R}^4$ على الترتيب:

$$S_2 = \{(1,3),(2,5)\} \qquad S_3 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \qquad S_4 = \{(1,2,3,4),(1,2,4,7),(0,1,1,1),(0,1,1,2)\}$$

90.13 لتكن P_2، P_3، و P_4 مصفوفات تغيير القاعدة على الترتيب، من E_2 إلى S_2، ومن E_3 إلى S_3، ومن E_4 إلى S_4. أوجد P_2، P_3، P_4.

■ نحتاج فقط، تأسيساً على المسألة 26.13، إلى أن نكتب متجهات القاعدة الجديدة كأعمدة لأن E_2، E_3، E_4 هي القواعد المعتادة:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: سوف نستخدم هذه المصفوفات في المسائل اللاحقة.

المسائل 91.13-94.13 تتعلق بالتطبيق الخطي $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرّف بواسطة

$$F(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

91.13 لتكن A التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين المعتادتين E_3 و E_2. أوجد A.

■ بما أن E_2 و E_3 القاعدتين المعتادتين، فإننا نكتب x، y، z كصفوف لنحصل على $A = [F]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

92.13 لنفترض أن تغييراً للقاعدة من E_3 إلى S_3 يتم في $\mathbb{R}^3$ فقط. أوجد التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين S_3 و E_3.

■ لدينا، من مبرهنة 8.13 (ii)، أن

$$[F]_{S_3}^{E_2} = AP_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

93.13 لنفترض أن تغييراً للقاعدة من E_2 إلى S_2 يتم فقط في $\mathbb{R}^2$. أوجد التمثيل المصفوفي لـ F بالنسبة للقاعدتين E_2 و S_2.

■ إن معكوس $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ هو $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. إذن، وبسبب مبرهنة 8.13 (iii)، يكون لدينا

$$[F]_{E_3}^{S_2} = P_2^{-1}A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 13 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

94.13 أوجد التمثيل المصفوفي B لـ F في القاعدتين S_3 و S_2.

■ نجد، من مبرهنة 8.13 (i)، أن

$$B = [F]_{S_3}^{S_2} = P_2^{-1}AP_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -13 & -4 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

95.13 ليكن $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً بواسطة $L(v) = Av$ حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. أوجد التمثيل المصفوفي للتطبيق L، بالنسبة للقاعدتين المعتادتين E_4 و E_2.

■ بما أن E_4 و E_2 القاعدتان المعتادتان، فإن التمثيل المصفوفي للتطبيق L يكون المصفوفة A نفسها، أي أن

$$[L]_{E_4}^{E_2} = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

96.13 أوجد التمثيل المصفوفي B للتطبيق الخطي L أعلاه بالنسبة للقاعدتين S_4 و S_2.

■ نجد، من مبرهنة 8.13 (iii)، أن

$$B=[L]_{S_4}^{S_2}=P_2^{-1}AP_4=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&1&1\\3&4&1&1\\4&7&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-50&-77&-16&-26\\38&58&12&19\end{pmatrix}$$

97.13 ليكن $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x,y,z,t)=(2x+3y-z+2t,x-5y+6t,2y+z+t)$. أوجد المصفوفة A التي تمثل F باستخدام القاعدتين المعتادين E_4 و E_3.

■ نكتب إحداثيات x، y، z، t كاعمدة، فنحصل على $A=\begin{pmatrix}2&3&-1&2\\1&-5&0&6\\0&2&1&1\end{pmatrix}$

98.13 أوجد المصفوفة B التي تمثل التطبيق الخطي F أعلاه بالنسبة للقاعدتين S_4 و S_3.

■ إن معكوس P_3، وهي مصفوفة تغيير ـ القاعدة من E_3 إلى S_3، تكون $P_3^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ [المسألة 28.13]. وبالتالي

$$B=P_3^{-1}AP_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1&2\\1&-5&0&6\\0&2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&1&1\\3&4&1&1\\4&7&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&15&4&5\\4&18&-3&2\\-2&-15&3&-1\end{pmatrix}$$

99.13 ليكن $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ معرّفاً بواسطة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\0&2\end{pmatrix}$. أوجد المصفوفة B التي تمثل A بالنسبة للقاعدتين S_2 و S_3.

■
$$B=P_3^{-1}AP_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\7&12\\-2&-3\end{pmatrix}$$

100.13 اثبت مبرهنة 8.13 (i): $[F]_{e'}^{f'}=Q^{-1}[F]_e^fP$.

■ لدينا، من أجل أي $v\in V$، أن

$$Q^{-1}[F]_e^fP[v]_{e'}=(Q^{-1}[F]_e^f)(P[v]_{e'})=(Q^{-1}[F]_e^f)[v]_e=Q^{-1}([F]_e^f[v]_e)=Q^{-1}[F(v)]_f=[F(v)]_{f'}$$

ولكن $[F]_{e'}^{f'}[v]_{e'}=[F(v)]_{f'}$ وبالتالي $Q^{-1}[F]_e^fP[v]_{e'}=[F]_{e'}^{f'}[v]_{e'}$

بما أن التطبيق $v\mapsto[v]_{e'}$ فوق K^m، إذن $Q^{-1}[F]_e^fPX=[F]_{e'}^{f'}X$. من أجل كل $X\in K^m$، وبذلك $[F]_{e'}^{f'}=Q^{-1}[F]_e^fP$.

101.13 اثبت مبرهنة 8.13 (ii): $[F]_e^{f'}=Q^{-1}[F]_e^f$.

■ لتكن $e'=e$، إذن $P=I$ (حيث I المصفوفة المتطابقة). لذلك، وباستخدام ما سبق، يكون لدينا $[F]_e^{f'}=[F]_{e'}^{f'}=Q^{-1}[F]_e^fI=Q^{-1}[F]_e^f$.

102.13 اثبت مبرهنة 8.13 (iii). $[F]_{e'}^f=[F]_e^fP$.

■ لنفترض أن $f'=f$ إذن $Q=I$ و $Q^{-1}=I$. لذلك، وبسبب ما جاء أعلاه، يكون لدينا $[F]_{e'}^f=[F]_{e'}^{f'}=I[F]_e^fP=[F]_e^fP$.

103.13 عرّف تكافؤ المصفوفات.

■ لنفترض أن A و B مصفوفتان $m\times n$ توجد من أجلهما مصفوفة مربعة -n غير شاذة P ومصفوفة مربعة -m غير شاذة Q بحيث أن $B=QAP$. نقول عندئذ أن B مكافئة لـ A.

104.13 لنفترض أن A و B تمثيلان مصفوفيان لتطبيق خطي $L:V\to U$. بيّن أن B مكافئة لـ A.

■ يوجد، بواسطة مبرهنة 8.13، مصفوفتان لتحويل ـ القاعدة P و Q بحيث أن $B=Q^{-1}AP$. بما أن Q^{-1} و P غير شاذتين، فإن B تكون مكافئة لـ A.

المسائل 105.13-107.13 تبيّن أن تكافؤ المصفوفات هي علاقة تكافؤ. [وبذلك، فإن كل التمثيلات المصفوفية لتطبيق خطي $L: V \to U$ تنتمي إلى صنف التكافؤ نفسه من المصفوفات المتكافئة].

105.13 بيّن أن A مكافئة لـ A، من أجل أي مصفوفة A $(m \times n)$.

▩ المصفوفتان المتطابقتان I_m و I_n غير ـ شاذتين. بما أن $A = I_m A I_n$، فإن A تكافىء A.

106.13 بيّن أنه إذا كانت A مكافئة لـ B، فإن B تكون مكافئة لـ A.

▩ بما أن A مكافئة لـ B، فتوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث أن $A = QBP$. إذن $B = Q^{-1}AP^{-1}$ وتكون Q^{-1} و P^{-1} غير شاذتين. إذن، B تكافىء A.

107.13 بيّن أنه إذا كانت A مكافئة لـ B، و B مكافئة لـ C، فإن A تكافىء C.

▩ لدينا $A = QBP$ و $B = Q'CP'$، حيث P، Q، P′، Q′ مصفوفات غير شاذة. إذن $A = QBP = QQ'CP'P$ حيث QQ' و $P'P$ غير شاذتين. وبالتالي، تكون A مكافئة لـ C.

الفصل 14
فضاءات الجداء الداخلي، التعامد

إن تعريف فضاءٍ متجهي V يتضمن حقلاً إختيارياً K. سوف نقتصر، في هذا الفصل، على كون K إما الحقل الحقيقي **R** أو الحقل العقدي **C**. وسوف نفترض أولاً وتحديداً، إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك، بأن $K = \mathbf{R}$، ونقول في هذه الحالة أن V فضاء متجهي حقيقي؛ وسوف نعمم، في الأقسام الأخيرة، نتائجنا إلى الحالة $K = \mathbf{C}$، ونطلق على V عندئذ إسم «فضاء متجهي عقدي».

تذكر أن مفهومي «الطول» و «التعامد» لم يظهرا في دراستنا للفضاءات المتجهية الاختيارية [رغم ظهورهما في فصل 1 بشأن الفضاءين $\mathbf{R}^n$، $\mathbf{C}^n$]. سوف نضيف، في هذا الفصل، بُنْيَة أخرى على فضاء متجهي V لنتحصل على «فضاء جداء داخلي»، وسوف نعرّف في هذا الإطار هذين المفهومين (الطول والتعامد).

1.14 فضاءات الجداء الداخلي

1.14 عرّف الجداء الداخلي وفضاء الجداء الداخلي.

■ ليكن V فضاءً متجهياً حقيقياً. لنفترض أنه يقرن بكل زوج متجهات $u, v \in V$ عدداً حقيقياً، نرمز له بـ $\langle u,v\rangle$. تسمى هذه الدالة جداءً داخلياً (حقيقياً) على V، إذا حققت الموضوعات التالية [حيث $u_1,u_2,u,v \in V$ و $a,b,k,k \in \mathbf{R}$]:

$[RIP_1]$ (خاصية الخطية) $\langle au_1 + bu_2,v\rangle = a\langle u_1,v\rangle + b\langle u_2,v\rangle$ أو، بشكل مكافىء

(أ) $\langle u_1 + u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ و (ب) $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$

$[RIP_2]$ (خاصية التناظر) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.

$[RIP_3]$ (خاصية موجبة التعريف) إذا $u \neq 0$، إذن $\langle u,u\rangle > 0$.

ويطلق على الفضاء المتجهي V، معرّفاً عليه الجداء الداخلي، إسم «فضاء جداء داخلي». [يطلق أحياناً على فضاء جداء داخلي حقيقي إسم «فضاء إقليدي»].

2.14 بيّن أن $\langle 0,v\rangle = 0 = \langle v,0\rangle$ من أجل كل $v \in V$. [وكذلك، على الخصوص، $\langle 0,0\rangle = 0$].

■ $\langle 0,v\rangle = \langle 0v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$. أيضاً $\langle v,0\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$.

تقول $[RIP_1]$ أن جداءً داخلياً يكون خطياً بالنسبة لموضعه الأول. المسألتان 3.14-4.14 تبينان أن جداءً داخلياً حقيقياً يكون خطياً أيضاً بالنسبة لموضعه الثاني.

3.14 بيّن أن $\langle u,v_1 + v_2\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$.

■ لدينا، من $[RIP_1]$ و $[RIP_2]$، أن $\langle u,v_1 + v_2\rangle = \langle v_1 + v_2,u\rangle = \langle v_1,u\rangle + \langle v_2,u\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$.

4.14 بيّن أن $\langle u,kv\rangle = k\langle u,v\rangle$.

■ $\langle u,kv\rangle = \langle kv,u\rangle = k\langle v,u\rangle = k\langle u,v\rangle$

[ملاحظة: نؤكد هنا أن هذه النتيجة مختلفة قليلاً من أجل فضاءات الجداء الداخلي العقدي كما سوف نرى في المسألة 219.14].

5.14 عرّف «النظيم» و «الطول» لمتجهٍ u في فضاء جداء داخلي V.

■ نعرف، من $[RIP_3]$، أن $\langle u,u\rangle$ غير سالب وبالتالي يكون جذره التربيعي الموجب موجوداً. نستخدم الترميز $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$. هذا العدد الحقيقي غير ـ السالب يسمى «نظيم» أو «طول» u. [سوف تستخدم العلاقة $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$ بشكل متكرر].

6.14 فُكَّ $\langle 5u_1 + 8u_2, 6v_1 - 7v_2 \rangle$.

■ نستخدم الخطية في الموضعين معاً فنحصل على
$\langle 5u_1 + 8u_2, 6v_1 - 7v_2 \rangle = \langle 5u_1, 6v_1 \rangle + \langle 5u_1, -7v_2 \rangle + \langle 8u_2, 6v_1 \rangle + \langle 8u_2, -7v_2 \rangle = 30\langle u_1, v_1 \rangle - 35\langle u_1, v_2 \rangle + 48\langle u_2, v_1 \rangle - 56\langle u_2, v \rangle$. [ملاحظة: لاحظ التشابه بين هذا المفكوك ومفكوك $(5a + 8b)(6c - 7d)$ في الجبر العادي].

7.14 فك $\langle 3u + 5v, 4u - 6v \rangle$.

■
$$\begin{aligned}\langle 3u + 5v, 4u - 6v \rangle &= 12\langle u, u \rangle - 18\langle u, v \rangle + 20\langle v, u \rangle - 30\langle v, v \rangle = 12\langle u, u \rangle - 18\langle u, v \rangle + 20\langle u, v \rangle - 30\langle v, v \rangle \\ &= 12\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle - 30\langle v, v \rangle = 12\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle - 30\|v\|^2\end{aligned}$$

8.14 فك $\|2u - 3v\|^2$.

■ $\|2u - 3v\|^2 = \langle 2u - 3v, 2u - 3v \rangle = 4\langle u,u \rangle - 6\langle u,v \rangle - 6\langle v,u \rangle + 9\langle v,v \rangle = 4\|u\|^2 - 12\langle u,v \rangle + 9\|v\|^2$.

9.14 فك $\langle 3u_1 + 2u_2, 5v_1 - 6v_2 + 4v_3 \rangle = 15\langle u_1,v_1 \rangle - 18\langle u_1,v_2 \rangle + 12\langle u_1,v_3 \rangle + 10\langle u_2,v_1 \rangle - 12\langle u_2,v_2 \rangle + 8\langle u_2,v_3 \rangle$.

10.14 عرّف الجداء الداخلي المعتاد أو النمطي (المعياري) على $\mathbf{R}^n$.

■ ليكن $u = (a_i)$ و $v = (b_i)$ متجهين في $\mathbf{R}^n$. إذن، نعرّف الجداء الداخلي على $\mathbf{R}^n$ بأنه الجداء النقطي في $\mathbf{R}^n$ المعرّف بواسطة $u.v = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. رغم وجود طرق عديدة لتعريف جداء داخلي على $\mathbf{R}^n$ [أنظر المسألة 18.14]، غير أننا سوف نفترض هذا الجداء الداخلي على $\mathbf{R}^n$، إلاّ إذا ذكر او فهم غير ذلك، وسوف نرمز له بـ u، v بدلاً من $\langle u,v \rangle$.

ملاحظة: إذا افترضنا أن u و v متجهان عموديان، فإن الجداء الداخلي أعلاه يمكن تعريفه بواسطة $\langle u,v \rangle = u^Tv$، حيث يرمز u^Tv إلى جداء المتجه الصفي u^T، والمتجه العمودي v وفق تعريف الضرب المصفوفي، أي أن

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

المسائل 17.14-11.14 تتعلق بالمتجهات التالية في $\mathbf{R}^3$: $u = (1,2,4)$، $v = (2,-3,5)$، $w = (4,2,-3)$.

11.14 أوجد $u.v$.

■ نضرب المركبات المتقابلة ثم نجمع، فنحصل على $u.v = 2 - 6 + 20 = 16$.

12.14 أوجد $u.w$.

■ $u.w = 4 + 4 - 12 = -4$.

13.14 أوجد $v.w$.

■ $v.w = 8 - 6 - 15 = -13$.

14.14 أوجد $(u + v).w$.

■ نوجد أولاً $u + v = (3,-1,9)$ ثم $(u.v).w = 12 - 2 - 27 = -17$. نستخدم $[RIP_1]$، بشكل بديل، فنحصل على $(u + v).w = u.w + v.w = -4-13 = -17$.

15.14 أوجد $\|u\|$.

■ نحسب أولاً $\|u\|^2$ بتربيع مركبات u ثم جمعها: $\|u\|^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 1 + 4 + 16 = 21$. إذن، $\|u\| = \sqrt{21}$.

16.14 أوجد $\|v\|$.

■ $\|v\|^2 = 4 + 9 + 25 = 38$؛ وبذلك، $\|v\| = \sqrt{38}$.

17.14 أوجد $\|u + v\|$.

■ نحسب أولاً $u + v = (3,-1,9)$. وبالتالي، $\|u + v\|^2 = 9 + 1 + 81 = 91$. إذن، $\|u + v\| = \sqrt{91}$.

18.14 تحقق من أن ما يلي جداء داخلي في $\mathbf{R}^2$. $\langle u,v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$، حيث $u = (x_1,x_2)$، $v = (y_1,y_2)$.

■ نتأكد من تحقق الموضوعات الثلاث لجداء داخلي. بوضع $w = (z_1,z_2)$، نجد أن. $au + bw = a(x_1,x_2) + b(z_1,z_2) = (ax_1 + bz_1,ax_2 + bz_2)$.

وبذلك

$$\begin{aligned}\langle au + bw, v\rangle &= \langle(ax_1 + bz_1, ax_2 + bz_2), (y_1, y_2)\rangle \\ &= (ax_1 + bz_1)y_1 - (ax_1 + bz_1)y_2 - (ax_2 + bz_2)y_1 + 3(ax_2 + bz_2)y_2 \\ &= a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2) + b(z_1y_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + 3z_2y_2) \\ &= a\langle u, v\rangle + b\langle w, v\rangle\end{aligned}$$

ينتج عن ذلك أن $[RIP_1]$ متحققة. أيضاً، $\langle v,u\rangle = y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 3y_2x_2 = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 = \langle u,v\rangle$، وبذلك تتحقق الموضوعة $[RIP_2]$. أخيراً، يكون لدينا $\langle u,u\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$. عندما $x \neq 0$. وبالتالي، تتحقق $[RIP_3]$.

19.14 بيِّن أن $\langle u,v\rangle = x_1y_1x_2y_2$ ليس جداء داخلياً على $\mathbf{R}^2$، حيث $u = (x_1,x_2)$، $v = (y_1,y_2)$.

■ ليكن $k = 2$، $u = (1,3)$، $v = (1,1)$. إذن، $ku = (2,6)$ ويكون لدينا $\langle u,v\rangle = 1.3.1.1 = 3$ و $\langle ku,v\rangle = 2.6.1.1 = 12$. وبذلك، $k\langle u,v\rangle = 2.3 = 6$ لا يساوي $\langle ku,v\rangle$؛ وهذا يخالف الموضوعة $[RIP_1]$.

20.14 بيِّن أن $\langle u,v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ ليس جداءً داخلياً على $\mathbf{R}^3$، حيث $u = (x_1,x_2,x_3)$ و $v = (y_1,y_2,y_3)$.

■ ليكن $u = (3,4,5)$. إذن، $\langle u,u\rangle = 3.3 + 4.4 - 5.5 = 9 + 16 - 25 = 0$؛ وهذا يخالف الموضوعة $[RIP_3]$.

المسائل 21.14-28.14 تتعلق بالمتجهات التالية في $\mathbf{R}^2$: $u = (1,5)$، $v = (3,4)$، $w = (7,-2)$.

21.14 أوجد $\langle u,v\rangle$ بالنسبة للجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^2$.

■ $\langle u,v\rangle = 3 + 20 = 23$.

22.14 أوجد $\langle u,v\rangle$ بالنسبة للجداء الداخلي في $\mathbf{R}^2$ المعرّف في المسألة 18.14.

■ $\langle u,v\rangle = 1.3 - 1.4 - 5.3 + 3.5.4 = 3 - 4 - 15 + 60 = 44$.

23.14 أوجد $\langle u,w\rangle$ بالنسبة للجداء الداخلي المعتاد في $\mathbf{R}^2$.

■ $\langle u,w\rangle = 7 - 10 = -3$.

24.13 أوجد $\langle u,w\rangle$ باستخدام الجداء الداخلي في $\mathbf{R}^2$ كما في المسألة 18.14.

■ $\langle u,w\rangle = 1.7 - 1.(-2) - 5.7 + 3.5.(-2) = 7 + 2 - 35 - 30 = -56$.

25.14 أوجد $\|v\|$ مستخدماً الجداء الداخلي المعتاد في $\mathbf{R}^2$.

■ $\|v\|^2 = \langle v,v\rangle = \langle(3,4),(3,4)\rangle = 9 + 16 = 25$؛ وبالتالي $\|v\| = 5$.

26.14 أوجد $\|v\|$ مستخدماً الجداء الداخلي المعرّف في المسألة 18.14.

■ $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle(3, 4), (3, 4)\rangle = 9 - 12 - 12 + 48 = 33$؛ وبالتالي، $\|v\| = \sqrt{33}$.

27.14 أوجد $\|w\|$ مستخدماً الجداء الداخلي المعتاد في $\mathbb{R}^2$.

■ $\|w\|^2 = \langle w,w\rangle = 49 + 4 = 53$ ؛ وبالتالي، $\|w\| = \sqrt{53}$.

28.14 أوجد $\|w\|$ باستخدام الجداء الداخلي في $\mathbb{R}^2$ كما في المسألة 18.14.

■ $\|w\|^2 = \langle w,w\rangle = 49 + 14 + 14 + 12 = 89$ ؛ إذن، $\|w\| = \sqrt{89}$.

29.14 عرّف متجه وحدة.

■ إذا $\|u\| = 1$ ، أو بشكل مكافىء إذا $\langle u,u\rangle = 1$ ، فإننا نقول أن u هو متجه وحدة وبأنه مُنَاظَمٌ.

30.14 بيّن أن $\|v\| > 0$ ، من أجل أي متجه $v \neq 0$.

■ نعرف، من $[RIP_3]$، أن $\langle v,v\rangle$ موجب. وبالتالي، يكون $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ موجباً أيضاً.

31.14 بيّن أنه إذا $v \neq 0$، إذن يكون $\hat{v} = \frac{1}{\|v\|}v$ متجه الوحدة الوحيد الذي يكون مضاعفاً موجباً لـ v. [وتعرف طريقة الحصول على $\hat{v}$ ، من v، باسم «مناظمة» v].

■ لنفترض أن $\hat{v} = kv$ ، حيث $k > 0$ و $\|\hat{v}\| = 1$. إذن، $1 = \|v\|^2 = \langle kv, kv\rangle = k^2\langle v, v\rangle = k^2\|v\|^2$. بما أن k موجب، نحصل على $k = 1/\|v\|$.

32.14 ناظم $u = (2,1,-1)$ في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbb{R}^3$.

■ لاحظ أن $\langle u,u\rangle$ مجموع مربعات مداخل u: أي أن $\langle u,u\rangle = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$. وبالتالي، وبقسمة u على $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{6}$ ، نحصل على متجه الوحدة المطلوب: $\hat{u} = u/\|u\| = (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\ -1/\sqrt{6})$.

33.14 ناظم $v = (1/2,2/3,-1/4)$ في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbb{R}^3$.

■ نضرب v أولاً في 12 للتخلص من الكسور، فنحصل على $12v = (6,8,-3)$، ويكون لدينا $\langle 12v,12v\rangle = 6^2 + 8^2 + (-3)^2 = 109$. إذن، متجه الوحدة المطلوب يكون $\hat{v} = 12v/\|12v\| = (6/\sqrt{109}, 8/\sqrt{109}, -3/\sqrt{109})$.

34.14 ناظم $v = (3,4)$ في $\mathbb{R}^2$: (أ) باستخدام الجداء الداخلي المعتاد في $\mathbb{R}^2$، (ب) باستخدام الجداء الداخلي في $\mathbb{R}^2$ المعرّف في المسألة 18.14.

■ (أ) نجد، من المسألة 25.14، أن $\|v\| = 5$ ؛ وبالتالي، $\hat{v} = v/\|v\| = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(ب) نجد، من المسألة 26.14، أن $\|v\| = \sqrt{33}$. وبذلك، $\hat{v} = v/\|v\| = (3/\sqrt{33}, 4/\sqrt{33})$.

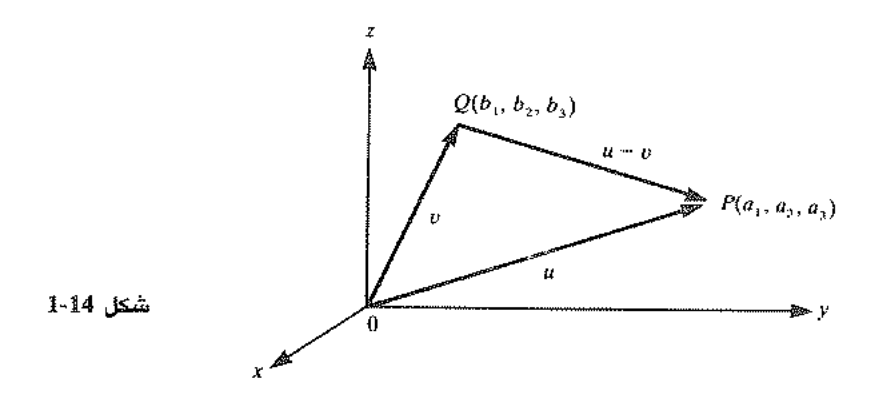
35.14 عرف المسافة بين متجهين u و v، والتي نرمز لها بـ $d(u,v)$، في فضاء جداء داخلي V.

■ تعرّف المسافة $d(u,v)$ بدلالة النظيم كما يلي: $d(u,v) = \|u - v\|$.

36.14 بيّن أن تعريف المسافة أعلاه، في فضاء جداء داخلي V، يتوافق مع المفهوم المعتاد للمسافة (الإقليدية) في $\mathbb{R}^3$.

■ لتكن $P(a_1,a_2,a_3)$ و$Q = (b_1,b_2,b_3)$ نقطتين في $\mathbb{R}^3$ (حيث u و v هي، على الترتيب المتجهان من نقطة الأصل إلى P و Q) كما موضح في الشكل 14-1. إذن، تكون المسافة d بين u و v كما يلي: $d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$ وهي تتوافق مع $d(u, v) = \|u - v\| = \|(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\| = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$.

المسائل 37.14-39.14 تتعلق بالمتجهات التالية في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^4$: $u = (5,5,8,8)$، $v = (1,2,3,4)$، $w = (4,-3,2,-1)$.



شكل 1-14

37.14 أوجد $d(u,v)$.

■ نحسب أولاً $u - v = (5-1, 5-2, 8-3, 8-4) = (4,3,5,4)$. ثم نوجد $\|u - v\|^2 = 4^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 = 16 + 9 + 25 + 16 = 66$. إذن، $d(u, v) = \sqrt{66}$.

38.14 أوجد $d(u,w)$.

■ $u - w = (1,8,6,9)$ و $\|u - w\|^2 = 1 + 64 + 36 + 81 = 182$. وبذلك $d(u, w) = \sqrt{182}$.

39.14 أوجد $d(v,w)$.

■ $v - w = (-3,5,1,5)$ و $\|v - w\|^2 = 9 + 25 + 1 + 25 = 60$. إذن، $d(v, w) = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

40.14 أوجد $d(u,v)$ حيث $u = (5,4)$، $v = (2,-6)$ في الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^2$.

■ $u - v = (3,10)$ و $\|u - v\|^2 = 9 + 100 = 109$. وبالتالي، $d(u, v) = \sqrt{109}$.

41.14 أوجد $d(u,v)$ من أجل u، v في المسألة 40.14 وذلك باستخدام الجداء الداخلي في $\mathbf{R}^2$ المعرّف في المسألة 18.14.

■ لدينا $u - v = (3,10)$. وبالتالي،

$\|u - v\|^2 = \langle(3, 10), (3, 10)\rangle = 3\cdot3 - 3\cdot10 - 10\cdot3 + 3\cdot10\cdot10 = 9 - 30 - 30 + 300 = 249$ إذن $d(u, v) = \sqrt{249}$

ملاحظة: تبين الأمثلة أعلاه أن المسافة بين متجهين تعتمد على الطريقة التي يعرّف بها الجداء الداخلي.

42.14 ليكن V فضاء متجهياً لدوال حقيقية مستمرة على الفترة $a \leqslant t \leqslant b$. بيّن أن ما يلي جداء داخلي على V:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

■ لتكن f، g، h دوالاً في V. إذن، باستخدام نتائج من الحسبان،

$$\langle f + g, h\rangle = \int_a^b (f(t) + g(t))h(t)\, dt = \int_a^b f(t)h(t)\, dt + \int_a^b g(t)h(t)\, dt = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

و

$$\langle kf, g\rangle = \int_a^b (kf(t))g(t)\, dt = k\int_a^b f(t)g(t)\, dt = k\langle f, g\rangle$$

وهكذا نتحقق $[RIP_1]$. لدينا لذلك $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt = \int_a^b g(t)f(t)\, dt = \langle g, f\rangle$ ، أي أن $[RIP_2]$ متحققة. أخيراً، إذا $f \neq 0$، إذن $\langle f, f\rangle = \int_a^b (f(t))^2\, dt > 0$. وهذا يعني تحقق $[RIP_3]$. ينتج، عن ذلك، أن هذا الجداء هو جداء داخلي على V.

المسائل 43.14-49.14 تتعلق بالفضاء المتجهي للحدوديات؛ بجداء داخلي معرّف بواسطة $\int_0^1 f(t)g(t)\, dt$ والحدوديتين $f(t) = t + 2$، $g(t) = 3t - 2$ و $h(t) = t^2 - 2t - 3$.

43.14 أوجد $\langle f,g \rangle$.

■ $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (t+2)(3t-2)\, dt = \int_0^1 (3t^2+4t-4)\, dt = [t^3+2t^2-4t]_0^1 = -1$$

44.14 أوجد $\langle f,h \rangle$.

■ $$\langle f, h \rangle = \int_0^1 (t+2)(t^2-2t-3)\, dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{7t^2}{2} - 6t\right]_0^1 = -\frac{37}{4}$$

45.14 أوجد $\|f\|$.

■ $$\langle f, f \rangle = \int_0^1 (t+2)(t+2)\, dt = \tfrac{19}{3}$$ و $$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\tfrac{19}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{57}$$

46.14 أوجد $\|g\|$.

■ $$\langle g, g \rangle = \int_0^1 (3t-2)(3t-2) = 1$$ وبالتالي $$\|g\| = \sqrt{1} = 1$$

47.14 نَاظِمْ f.

■ بما أن $\|f\| = \frac{1}{3}\sqrt{57}$

$$\hat{f} = \frac{1}{\|f\|} f = \frac{3}{\sqrt{57}}(t+2)$$

48.14 نَاظِمْ g.

■ لاحظ أن g متجه وحدة أصلاً، لأن $\|g\| = 1$ ؛ وبالتالي، $\hat{g} = g = 3t-2$.

49.14 أوجد $d(f,g)$.

■ لدينا $f(t) - g(t) = -2t + 4$. إذن

$$\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g \rangle = \int_0^1 (-2t+4)(-2t+4)\, dt = \int_0^1 (4t^2-16t+16) = [\tfrac{4}{3}t^3 - 8t^2 + 16t]_0^1 = \tfrac{28}{3}$$

وبالتالي، $d(f, g) = \sqrt{\tfrac{28}{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{21}$

المسائل 65.14-50.14 تتعلق بالفضاء المتجهي للمصفوفات $m \times n$ فوق $\mathbb{R}$ والجداء الداخلي $\langle\, ,\rangle$ المعرّف على V بواسطة $\langle A,B \rangle = tr(B^TA)$، حيث تدل tr على الأثر (أي مجموع العناصر القطرية)، وتبين المسائل 52.14-50.14، على الخصوص، أن $\langle\, ,\rangle$ يحقق الموضوعات الثلاث للجداءات الداخلية.

50.14 بيِّن أن $\langle\, ,\rangle$ يحقق $[RIP_1]$.

■ نحصل، باستخدام خواص دالة الأثر، على

$$\langle A_1 + A_2, B \rangle = tr[B^T(A_1 + A_2)] = tr[B^TA_1 + B^TA_2] = tr(B^TA_1) + tr(B^TA_2) = \langle A_1,B \rangle + \langle A_2,B \rangle$$

و $$\langle kA,B \rangle = tr[B^T(kA)] = tr[k(B^TA)] = k\, tr(B^TA) = k\langle A,B \rangle$$

51.14 بيِّن أن $\langle\, ,\rangle$ تحقق $[RIP_2]$.

■ نستخدم حقيقة أن $tr(M) = tr(M^T)$، فيكون لدينا

$\langle A,B \rangle = tr(B^TA) = tr[(B^TA)^T] = tr[A^TB^{TT}] = tr(A^TB) = \langle B,A \rangle$.

52.14 لتكن $A = (a_{ij})$. بيِّن أن $\langle A, A \rangle = tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$. (أي مجموع مربعات كل عناصر A. وبذلك، يحقق $\langle\, ,\rangle$ $[RIP_3]$.

■ لتكن $A^T = (b_{ij})$، وبذلك $b_{ii} = a_{ji}$؛ ولتكن $A^TA = (c_{ij})$. إذن

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$$

وبالتالي

$$\mathrm{tr}(A^TA) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

53.14 لتكن $A = [C_1, C_2, \ldots, C_n]$ و $B = [D_1, D_2, \ldots, D_n]$، هنا الـ C_i والـ D_i هي على الترتيب أعمدة المصفوفتين A و B. بيِّن أن $\langle A,B \rangle = D_1^TC_1 + D_2^TC_2 + \ldots + D_n^TC_n$.

■ لتكن $B^TA = (c_{ij})$. إذن، $c_{ii} = D_i^TC_i$. إذن، $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(B^TA) = D_1^TC_1 + \ldots + D_n^TC_n$.

المسائل 54.14-65.14 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

54.14 أوجد $\langle A,B \rangle$.

■ $$\langle A,B \rangle = (1,4)\binom{9}{6} + (2,5)\binom{8}{5} + (3,6)\binom{7}{4} = (9+24) + (16+25) + (21+24) = 119$$

55.14 أوجد $\langle A,B \rangle$.

■ $\langle A,C \rangle = (27+6)+(-40+0)+914-16) = -9$.

56.14 أوجد $\langle B,C \rangle$.

■ $\langle B,C \rangle = (3+4) + (-10+0) + (6-24) = -21$.

57.14 أوجد $\langle A,B+C \rangle$.

■ نحسب أولاً $B + C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. ثم نوجد $\langle A,B+C \rangle = (36+30) + (-24+25) + (35+8) = 110$. أو، بشكل بديل، $\langle A,B+C \rangle = \langle A,B \rangle + \langle A,C \rangle = 119 + (-9) = 110$.

58.14 أوجد $\langle 2A+3B, 4C \rangle$.

■ $\langle 2A+3B, 4C \rangle = 8\langle A,C \rangle + 12\langle B,C \rangle = 8(-9) + 12(-21) = -324$.

59.14 أوجد $\|A\|$.

■ نحسب أولاً $\langle A,A \rangle = \|A\|^2$، $\langle A,A \rangle = 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 = 271$. وبالتالي، $\|A\| = \sqrt{271}$.

60.14 أوجد $\|B\|$.

■ $\langle B,B \rangle = \|B\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$. وبذلك، $\|B\| = \sqrt{91}$.

61.1 ناظم B.

■ $$\hat{B} = \frac{1}{\|B\|}B = \frac{1}{\sqrt{91}}B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{91} & 2/\sqrt{91} & 3/\sqrt{91} \\ 4/\sqrt{91} & 5/\sqrt{91} & 6/\sqrt{91} \end{pmatrix}$$

62.14 أوجد $\|C\|$.

■ $\langle C,C \rangle = \|C\|^2 = 9 + 25 + 4 + 1 + 16 = 55$. وبالتالي، $\|C\| = \sqrt{55}$.

63.14 نَاظِمْ C.

■ نقسم كل مدخل في C على ‖C‖، فنحصل على

$$\hat{C} = \frac{1}{\|C\|} C = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{55} & -5/\sqrt{55} & 2/\sqrt{55} \\ 1/\sqrt{55} & 0 & -4/\sqrt{55} \end{pmatrix}$$

64.14 أوجد d(A,B).

■ نحسب أولاً $A - B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$، ثم $\|A - B\|^2 = 64 + 36 + 16 + 4 + 0 + 4 = 124$. إذن، $d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$.

65.14 أوجد d(A,C).

■ $A - C = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$، وبذلك $\|A - C\|^2 = 36 + 169 + 25 + 25 + 64 = 344$. وبالتالي $d(A, C) = \sqrt{344} = 2\sqrt{86}$.

2.14 خواص الجداءات الداخلية والنظيمات

(جمع نظيم/وقد فضلنا هذا الجمع على غيره، مثل نظم أو أنظمة، منعاً للالتباس ـ المعرب).

66.14 بيّن أن جداءً داخلياً ⟨ , ⟩ يحقق موضوعة اللاّ تفسخ التالية:

[ND] يكون $\langle u,v \rangle = 0$، من أجل كل $v \in V$، إذا وفقط إذا $u = 0$.

■ إذا $u = 0$، إذن $\langle u,v \rangle = \langle 0,v \rangle = \langle 0v,v \rangle = 0\langle v,v \rangle = 0$. من جهة أخرى، إذا $u \neq 0$، إذا يكون لدينا، من أجل $v = u$، أن $\langle u,v \rangle = \langle u,u \rangle \neq 0$.

67.14 بيّن أن $\langle a_1u_1 + \ldots + a_ru_r, v \rangle = a_1\langle u_1,v \rangle + a_2\langle u_2,v \rangle + \ldots + a_r\langle u_r,v \rangle$.

■ يكون البرهان بالاستقراء على r. نعرف، من $[RIP_1]$، أن النتيجة صحيحة من أجل $r = 1$. لنفترض أن $r > 1$. إذن، $\langle a_1u_1 + \ldots + a_ru_r, v \rangle = \langle a_1u_1 + \ldots + a_{r-1}u_{r-1}, v \rangle + \langle a_ru_r, v \rangle = a_1\langle u_1,v \rangle + a_2\langle u_2,v \rangle + \ldots + a_{r-1}\langle u_{r-1},v \rangle + a_r\langle u_r,v \rangle$.

68.14 بيّن أن $\left\langle \sum_{i=1}^{r} a_iu_i, \sum_{j=1}^{s} b_jv_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_ib_j\langle u_i, v_j \rangle$.

■ لدينا، من المسألة 7.14 و $[RIP_2]$، أن

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r} a_iu_i, \sum_{j=1}^{s} b_jv_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i\left\langle u_i, \sum_{j=1}^{s} b_jv_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i\left\langle \sum_{j=1}^{s} b_jv_j, u_i \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_ib_j\langle v_j, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_ib_j\langle u_i, v_j \rangle$$

69.14 بيّن أن $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$.

■ $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$

70.14 بيّن أن $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$.

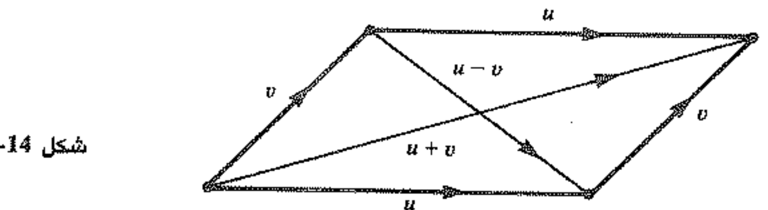
■ $\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle = \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle = \|u\|^2$.

71.14 بيّن أن $\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

■ $\langle u + v, u - v \rangle = \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle - \langle v,v \rangle = \|u\|^2 - \langle u,v \rangle + \langle u,v \rangle - \|v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

72.14 حقق قانون متوازي الأضلاع: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$. [أنظر شكل 14-2].

■ نجمع المعادلتين في مسألتي 69.14 و 70.14، فنحصل على $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$.



شكل 14-2

73.14 حقق الشكل القطبي التالي من أجل $\langle u,v \rangle$ [وهو ما يبيِّن أن الجداء الداخلي يمكن الحصول عليه من دالة النظيم]:
$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2, \|u-v\|^2)$.

■ نطرح المعادلة في المسألة 70.14 من المعادلة في المسألة 69.14، فنحصل على $\|u+v\|^2-\|u-v\|^2=4\langle u,v \rangle$. القسمة على 4 تعطينا النتيجة.

المسائل 74.14-80.14 تتعلق بجداءين داخليين f و g على نفس الفضاء المتجهي V. [نستخدم هنا الترميز التّالي $f(u,v)$ و $g(u,v)$ للرمز للجداءين الداخليين لـ u و v تحت f و g، على الترتيب].

74.14 بيِّن أنّه إذا كان لـ f و g دالتي نظيم متساويتين، أي $\|v\|_f=\|v\|_g$ من أجل كل $v\in V$، فإن $f=g$.

■ نستخدم الشكل القطبي للجداء الداخلي، في المسألة 73.14، فنحصل على $f(u,v)=\frac{1}{4}(\|u+v\|_f^2-\|u-v\|_f^2)=\frac{1}{4}(\|u+v\|_g^2-\|u-v\|_g^2)=g(u,v)$.

المسائل 75.14-77.14 لتبيان أن المجموع $f+g$، المعرّف بواسطة $(f+g)(u,v)=f(u,v)+g(u,v)$، هو أيضاً جداء داخلي على V.

75.14 بيِّن أن $f+g$ يحقق الموضوعة $[RIP_1]$.

■
$$\begin{aligned}(f+g)(au_1+bu_2,v) &= f(au_1+bu_2,v)+g(au_1+bu_2,v)\\ &= af(u_1,v)+bf(u_2,v)+ag(u_1,v)+bg(u_2,v)\\ &= a[f(u_1,v)+g(u_1,v)]+b[f(u_2,v)+g(u_2,v)]\\ &= a[(f+g)(u_1,v)]+b[(f+g)(u_2,v)]\end{aligned}$$

وبذلك، يحقق $f+g$ الموضوعة $[RIP_1]$.

76.14 بيِّن أن $f+g$ يحقق الموضوعة $[RIP_2]$.

■ $(f+g)(u,v)=f(u,v)+g(u,v)=f(v,u)+g(v,u)=(f+g)(v,u)$. إذن $f+g$ يحقق الموضوعة $[RIP_2]$.

77.14 بيِّن أن $f+g$ يحقق الموضوعة $[RIP_3]$.

■ لنفترض أن $u\neq 0$. إذن، يكون $f(u,u)$ و $g(u,u)$ كلاهما موجبا. وبالتالي، يكون $(f+g)(u,u)=f(u,u)+g(u,u)$ موجبا؛ أي أن $[RIP_3]$ متحققة.

المسائل 78.14-80.14 لتبيان أن المضاعف السلّمي kf، المعرّف بواسطة $(kf)(u,v)=kg(u,v)$، هو أيضاً جداء داخلي على V عندما $k>0$.

78.14 بيِّن أن kf يحقق $[RIP_1]$.

■
$$\begin{aligned}(kf)(au_1+bu_2,v) &= k[f(au_1+bu_2,v)]=k[af(u_1,v)+bf(u_2,v)]=a[kf(u_1,v)]+b[kf(u_2,v)]\\ &= a(kf)(u_1,v)+b(kf)(u_2,v)\end{aligned}$$

إذن، يحقق kf الموضوعة المذكورة.

79.14 بيِّن أن kf يحقق $[RIP_2]$.

■ $(kf)(u,v) = kf(u,v) = kf(v,u) = (kf)(u,v)$. وهذا يعني تحقق الموضوعة الثانية.

80.14 بيِّن أن kf يحقق $[RIP_3]$.

■ إذا $u \neq 0$، إذن $f(u,u)$ موجب. ولكن k موجب. إذن، يكون $(kf)(u,u) = kf(u,u)$ موجباً أيضاً؛ وهذا يعني تحقق $[RIP_3]$.

3.14 متباينة كوشي ـ تشفارتز وتطبيقاتها

نستخدم في هذا القسم المبرهنة المهمة التالية، والتي سوف نبرهنها في المسألة 92.14.

مبرهنة 1.14: (متباينة كوشي ـ تشفارتز): لدينا، من أجل أي متجهين $u,v \in V$، أن $\langle u,v\rangle^2 \leqslant \|u^2\|\|v\|^2$. (أو، وهو بشكل مكافىء، $|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$).

81.14 لتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و $y_1,y_2,\ldots,y_n$ أعداداً حقيقية. بيِّن أن $(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$.

■ ليكن $u = (x_i)$ و $v = (y_i)$ المتجهين المقابلين لهذه الأعداد في $\mathbf{R}^n$. نحصل، باستخدام متباينة كوشي ـ تشفارتز على $\langle u,v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2.\|v\|^2$؛ وهذا يعطي المتباينة المطلوبة.

82.14 لتكن f و g أي دالتين حقيقيتين مستمرتين على فترة مغلقة $D = [a,b]$. بيِّن أن

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt$$

■ ليكن V الفضاء المتجهي للدوال الحقيقية المستمرة على D. نعرف، من المسألة 42.14، أن $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ جداء داخلي على V. إذن، وبسبب متباينة كوشي ـ تشفارتز، يكون لدينا $\langle f,g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2.\|g\|^2$. وهو النتيجة المطلوبة.

83.14 عرِّف فضاء الجداء الداخلي V المعروف باسم فضاء ـ L_2 (أو فضاء هلبرت).

■ V هو الفضاء المتجهي للمتتاليات اللانهائية (من الأعداد الحقيقية)، $(a_1,a_2,\ldots)$، والتي تحقق $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots < \infty$، أي أن مجموع مربعاتها يتقارب. ونعرّف الجمع والضرب السلّمي وفق المركبات:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$
$$k(a_1, a_2, \ldots) = (ka_1, ka_2, \ldots)$$

كما يعرّف جداءً داخلي في V بواسطة $\langle (a_1,a_2,\ldots),(b_1,b_2,\ldots)\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots$.

84.14 بيِّن أن الجداء الداخلي في الفضاء ـ l_2 أعلاه معرّف جيداً؛ أي، أثبت أن المجموع $\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$ يتقارب مطلقاً.

■ لدينا، من متباينة كوشي ـ تشفارتز،

$$|a_1b_1| + \cdots + |a_nb_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}$$

والتي تتحقق من أجل كل n. وبذلك، تكون المتتالية (الرتيبة) للمجاميع $S_n = |a_1b_1| + \ldots + |a_nb_n|$ محدودة، وبالتالي متقاربة. إذن، المجموع اللانهائي يتقارب مطلقاً.

85.14 عرِّف الزوايا في فضاء جداء داخلي (حقيقي) V.

■ نعرّف الزاوية θ، بين متجهين $u,v \in V$، بأنها الزاوية θ الوحيدة بحيث أن $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ و $\cos\theta = \langle u,v\rangle/\|u\|\|v\|$.

86.14 لماذا تكون الزاوية θ أعلاه موجودة دائماً؟

■ نَعرف، من متباينة كوشي - تشفارتز، أن $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ وبذلك يمكن دائماً الحصول على زاوية θ. وبسبب القيد $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$، تكون الزاوية θ وحيدة.

87.14 أوجد cos θ من أجل الزاوية θ بين $u = (1,-3,2)$، $v = (2,1,5)$ في $\mathbf{R}^3$.

■ نحسب $\langle u,v\rangle = 2 - 3 + 10 = 9$، $\|u\|^2 = 1 + 9 + 4 = 14$، $\|v\|^2 = 4 + 1 + 25 = 30$. وبذلك

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{9}{\sqrt{105}}$$

88.14 أوجد cos θ من أجل الزاوية θ بين $u = (5,1)$ و $v = (-2,3)$ في الفضاء الإقليدي الثنائي $\mathbf{R}^2$. في أي ربع تقع θ ؟

■ نحسب $\langle u,v\rangle = -10 + 3 = -7$، $\|u\|^2 = 25 + 1 = 26$، $\|v\|^2 = 4 + 9 = 13$. وبذلك

$$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = -\frac{7}{13\sqrt{2}}$$

بما أن cos θ سالب، فإن θ تقع في الربع الثاني.

89.14 أوجد cos θ من أجل الزاوية θ بين $u = (5,1)$ و $v = (-2,3)$ في $\mathbf{R}^2$، حيث يُعرَّف الجداء الداخلي كما في المسألة 18.14. [قارن بالمسألة 88.14].

■ نحسب $\langle u,v\rangle = -10-15+2+9 = -14$، $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = 25 - 5 - 5 + 3 = 18$، $\|v\|^2 = \langle v,v\rangle = 4 + 6 + 6 + 27 = 43$. إذن

$$\cos\theta = \frac{-14}{\sqrt{18}\sqrt{43}} = -\frac{14}{3\sqrt{86}}$$

90.14 أوجد cos θ من أجل الزاوية θ بين $f(t) = 2t - 1$ و $g(t) = t^2$، في الفضاء المتجهي V للحدوديات بالجداء الداخلي $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

■ نحسب

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 (2t^3 - t^2)\,dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 (4t^2 - 4t + 1)\,dt = \tfrac{1}{3}$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \int_0^1 t^4\,dt = \tfrac{1}{5}$$

إذن

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{6}}{(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

91.14 أوجد cos θ من أجل الزاوية θ بين $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ في الفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 الحقيقية، حيث يعرَّف الجداء الداخلي بواسطة $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(B^TA)$. [أنظر المسائل 50.14-53.14].

■ نحسب $\langle A,B\rangle = (0+6)+(-1-3)=2$، $\|A\|^2 = 4 + 1 + 9 + 1 = 15$، $\|B\|^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$. إذن

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{210}}$$

92.14 أثبت مبرهنة 1.14 (كوشي ـ تشفارتز): $\langle u,v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2.\|v\|^2$.

▩ لدينا، من أجل أي عدد حقيقي، أن $\langle tu+v,tu+v\rangle = t^2\langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = t^2\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$. لتكن $a = \|u\|^2$، $b = 2\langle u,v\rangle$، و $c = \|v\|^2$. بما أن $\|tu + v\|^2 \geqslant 0$ ، يكون لدينا $at^2 + bt + c \geqslant 0$، من أجل كل قيمة لـ t. يعني هذا أن الحدودية التربيعية لا يمكن أن يكون لها جذران حقيقيان. يقتضي هذا أن $b^2 - 4ac \leqslant 0$ أو $b^2 \leqslant 4ac$. إذن، $4\langle u,v\rangle^2 \leqslant 4\|u\|^2\|v\|^2$. القسمة على 4 تعطينا النتيجة المطلوبة.

ملاحظة: نجد متباينة كوشي ـ تشفارتز من أجل فضاءات الجداء الداخلي العقدية، في المسألة 233.14.

المسائل 93.14-95.14 تبين أن النظيم المؤسس على جداء داخلي يحقق الموضوعات الثلاث لنظيم. [أنظر القسم 10.14].

93.14 أثبت $[N_1]$: $\|v\| \geqslant 0$ ؛ $\|v\| = 0$ إذا وفقط إذا $v = 0$.

▩ إذا $v \neq 0$، إذن $\langle v,v\rangle > 0$. وبالتالي، $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} > 0$. إذا $v = 0$، إذن $\langle 0,0\rangle = 0$ ، وبذلك $\|0\| = \sqrt{0} = 0$.

94.14 أثبت $[N_2]$: $\|kv\| = |k|\,\|v\|$.

▩ لدينا $\|kv\|^2 = \langle kv,kv\rangle = k^2\langle v,v\rangle = k^2\|v\|^2$. نأخذ الجذر التربيعي للطرفين، فنحصل على $[N_2]$.

95.14 أثبت $[N_3]$: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

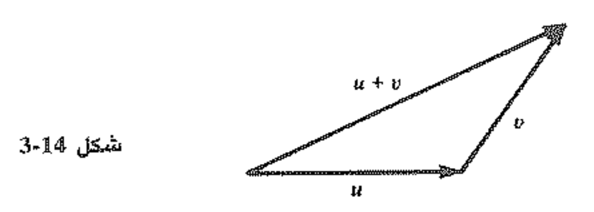
▩ نستخدم متباينة كوشي ـ تشفارتز فنحصل على

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v,u + v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

نأخذ الجذر التربيعي للطرفين، فنحصل على $[N_3]$.

96.14 الموضوعة $[N_3]$ تسمى غالباً «متباينة المثلث». لماذا؟

▩ إذا نحن نظرنا إلى $u + v$ كضلع في المثلث المكون من u و v [كما هو موضح في الشكل 14-3]، فإن $[N_3]$ تذكر بأن طول ضلعٍ في مثلث أقل من مجموع طولي الضلعين الآخرين.



شكل 14-3

4.14 التعامد، المتممة المتعامدة

97.14 عرِّف التعامد في فضاء جداء داخلي V.

▩ نقول أن المتجهين $u,v \in V$ متعامدان؛ أو ـ بشكل مكافىء ـ أن u متعامد مع v، ونكتب $u \perp v$، إذا $\langle u,v\rangle = 0$.

98.14 بيِّن أن علاقة التعامد متناظرة، أي أنه إذا $u \perp v$، إذن $v \perp u$.

▩ إذا $u \perp v$، إذن $\langle u,v\rangle = 0$. وبالتالي، $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle = 0$، إذن، $v \perp u$.

99.14 بيِّن أن $0 \in V$ متعامد مع كل $v \in V$.

▩ لدينا $\langle 0,v\rangle = \langle 0v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$ ؛ وبالتالي، يكون 0 متعامداً مع كل $v \in V$.

100.14 بيِّن أنّه إذا كان u متعامداً مع كل $v \in V$، فإن $u = 0$.

■ إذا $\langle u,v\rangle = 0$ ، من أجل كل $v \in V$، إذن $\langle u,u\rangle = 0$ ، وبالتالي $u = 0$.

ملاحظة: لاحظ أن المسألتين 99.14 و 100.14 هما إعادة صياغة كون جداء داخلي يحقق موضوعة اللاّأتفسخ [ND] المذكورة في المسألة 66.14.

101.14 لنفترض أن u و v غير – صفريين في V. بيِّن أن u و v متعامدان إذا وفقط إذا كانا «عموديين»؛ أي أن $\theta = \pi/2$ (أو $\theta = 90°$) حيث θ الزاوية بين u و v.

■ لدينا أن u و v متعامدان إذا وفقط إذا $\langle u,v\rangle = 0$ ، إذا وفقط إذا $\cos\theta = 0$، إذا وفقط إذا $\theta = \pi/2$.

102.14 بيِّن أنه إذا كان u متعامداً مع v، فإن كل مضاعف سلّمي لـ u يكون أيضاً متعامداً مع v.

■ إذا $\langle u,v\rangle = 0$ ، إذن $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle = k.0 = 0$ ، كما هو مطلوب.

103.14 أوجد متجه وحدة متعامداً مع $v_1 = (1,1,2)$ و $v_2 = (0,1,3)$ في $\mathbf{R}^3$.

■ ليكن $w = (x,y,z)$. نريد $0 = \langle w,v_1\rangle = x + y + 2z$ و $0 = \langle w,v_2\rangle = y + 3z$. وبذلك، نتحصل على المنظومة المتجانسة $x + y + 2z = 0$، $y + 3z = 0$. نضع $z = 1$، فنجد أن $y = -3$ و $x = 1$؛ إذن، $w = (1,-3,1)$. نناظم w فنحصل على متجه الوحدة w′ المطلوب والمتعامد مع v_1 و v_2: $w' = w/\|w\| = (1/\sqrt{11}, -3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11})$.

104.11 إستخدم الجداءات التقاطعية (القسم 12.1) لإيجاد متجه وحدة متعامداً مع $u = (1,2,3)$ و $v = (3,-1,4)$.

■ نوجد $w = u \times v$ من الصفيفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ، فنحصل على $w = (11,5,-7)$. نناظم w، فنحصل على متجه الوحدة المطلوب: $\hat{w} = w/\|w\| = (11/\sqrt{195}, 5/\sqrt{195}, -7/\sqrt{195})$.

ملاحظة: نؤكد على أن الجداءات التقاطعية لا توجد إلاّ في $\mathbf{R}^3$، وبالتالي يمكن استخدامها من أجل مسائل التعامد في $\mathbf{R}^3$ فقط.

105.14 لنفترض أن W مجموعة جزئية في V. عرِّف المتممة المتعامدة لـ W، والتي نرمز لها بـ $W^\perp$ (اقرأ W متعامد).

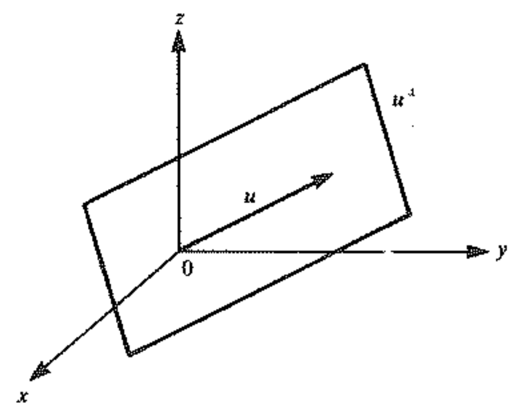
■ تتكون $W^\perp$ من تلك المتجهات في V المتعامدة مع كل $w \in W$، أي أن $W^\perp = \{v \in V: \langle v,w\rangle = 0,$ من أجل أي $w \in W\}$.

106.14 بيِّن أن $W^\perp$ فضاء جزئي في V.

■ من الواضح أن $0 \in W^\perp$. لنفترض أن $u,v \in W^\perp$. إذن، من أجل أي $a,b \in K$ أي $w \in W$، يكون لدينا $\langle au + bv,w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle = a.0 + b.0 = 0$. وبذلك، $au + bv \in W^\perp$؛ وبالتالي، يكون W فضاءً جزئياً في V.

107.14 ليكن u متجهاً غير – صفري في $\mathbf{R}^3$. اعط وصفاً هندسياً لـ $u^\perp$.

■ إن الفضاء الجزئي $u^\perp$ هو المستوى في $\mathbf{R}^3$ الذي يمر بنقطة الأصل 0، ويكون عمودياً على المتجه u، كما هو موضح بالشكل 14-4.



شكل 14-4

108.14 ليكن $u = (1,3,-4)$. أوجد قاعدة من أجل $u^{\perp}$.

■ لاحظ أن $u^{\perp}$ تتكون من كل المتجهات (x,y,z) التي تحقق $\langle(x,y,z),(1,3,-4)\rangle = 0$ أو $x + 3y - 4z = 0$. المتغيران الحرّان هما y و z. نضع $y = -1$، $z = 0$ فنحصل على الحل $w_1 = (3,-1,0)$؛ ونضع $y = 0$، $z = 1$ فنحصل على الحل $w_2 = (4,0,1)$. المتجهان w_1 و w_2 يشكلان قاعدة للفضاء الحلّي للمعادلة، وبالتالي قاعدة من أجل $u^{\perp}$.

109.14 لنفترض أن W يتكون من المتجهين $u = (1,2,3,-1,2)$ و $v = (2,4,7,-,-1)$ في R^5. أوجد قاعدة للمتممة المتعامدة $W^{\perp}$ لـ W.

■ نبحث عن كل المتجهات $w = (x,y,z,s,t)$ التي تحقق

$$\begin{aligned}\langle w, u\rangle &= x + 2y + 3z - s + 2t = 0\\ \langle w, v\rangle &= 2x + 4y + 7z + 2s - t = 0\end{aligned}$$

نحذف x من المعادلة الثانية، نجد المنظومة المكافئة

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z - s + 2t &= 0\\ z + 4s - 5t &= 0\end{aligned}$$

المتغيرات الحرّة هي y، s، t. نضع $y = -1$، $s = 0$، $t = 0$ فنحصل على الحل $w_1 = (2,-1,0,0,0)$؛ ونضع $y = 0$، $s = 1$، $t = 0$ فنحصل على الحل $w_2 = (13,0,-4,1,0)$. ونضع $y = 0$، $s = 0$، $t = 1$ فنحصل على الحل $w_3 = (-17,0,5,0,1)$. تشكل المتجهات $\{w_1,w_2,w_3\}$ قاعدة للفضاء الحلّي للمعادلة، وبالتالي قاعدة من أجل $W^{\perp}$.

110.14 ليكن $u = (0,1,-2,5)$ في R^4. أوجد قاعدة للمتممة المتعامدة $u^{\perp}$ لـ u.

■ نبحث عن كل المتجهات (x,y,z,t) في R^4 بحيث

$$\langle (x,\ y,\ z,\ t), (0,\ 1,\ -2,\ 5)\rangle = 0 \qquad \text{أو} \qquad 0x + y - 2z + 5t = 0$$

المتغيرات الحرة هي x,z,t. نضع $x=1$، $y=0$، $t = 0$ فنحصل على الحل $w_1 = (1,0,0,0)$. نضع $x=0$، $z=1$، $t=0$ فنحصل على الحل $w_2 = (0,2,1,0)$. نضع $x=0$، $z=0$، $t=1$ فنحصل على الحل $w_3 = (0,-5,0,1)$. المتجهات w_1، w_2، w_3 شكل قاعدة للفضاء الحلّي للمعادلة، وبالتالي قاعدة من أجل $u^{\perp}$.

111.14 لتكن منظومة المعادلات الخطّية المتجانسة فوق R:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0\end{aligned}$$

أو في شكل مصفوفي، $AX = 0$. تذكر أنّه يمكن النظر إلى الفضاء الحليّ W على أنّه نواة التطبيق الخطّي A. أعط تفسيراً آخر لـ W مستخدماً مفهوم التعامد.

■ كل متجه - حلّ $v = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ يكون متعامداً مع كل صف في A. وبذلك، يكون W المتممة المتعامدة للفضاء الصفي لـ A.

112.14 بيِّن أن $0^{\perp} = V$.

■ كل $v \in V$ متعامد مع 0؛ وبالتالي، $0^{\perp} V$.

113.14 بيِّن أن $V^{\perp} = 0$.

■ بما أن $\langle 0,v\rangle = 0$، من أجل كل $v \in V$، فإن $0 \in V^{\perp}$. إذا $u \neq 0$، إذن، $\langle u,u\rangle \neq 0$؛ وبالتالي، $u \notin V^{\perp}$. يعني هذا أن $V^{\perp} = 0$.

114.14 لنفترض أن $W_1 \subseteq W_2$. بيّن أن $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

■ ليكن $w \in W_2^\perp$. إذن $\langle w,v\rangle = 0$، من أجل كل $v \in W_2$. بما أن $W_1 \subseteq W_2$؛ إذن $\langle w,v\rangle = 0$ من أجل كل $v \in W_1$. وبذلك، $w \in W_1^\perp$؛ وهذا يقود إلى $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

115.14 بيّن أن $W^\perp = \text{span}(W)^\perp$.

■ بما أن $W \subseteq \text{span}(W)$، يكون لدينا $\text{span}(W)^\perp \subseteq W^\perp$. لنفترض أن $u \in W^\perp$، وأن $v \in \text{span}(W)$. إذن، توجد $w_1, w_2, \ldots, w_k$ في W بحيث أن $v = a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k$. إذن، وباستخدام $u \in W^\perp$، يكون لدينا $\langle u,v\rangle = \langle u, a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k\rangle = a_1\langle u,w_1\rangle + a_2\langle u,w_2\rangle + \ldots + a_k\langle u,w_k\rangle = a_1.0 + a_2.0 + \ldots + a_k.0 = 0$. أي أن $u \in \text{span}(W)^\perp$. ينتج عن ذلك أن $W^\perp \subseteq \text{span}(W)^\perp$. الاحتواءان يقودان إلى $W^\perp = \text{span}(W)^\perp$.

116.14 بيّن أن $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

■ ليكن $w \in W$. إذن، $\langle w,v\rangle = 0$ من أجل كل $v \in W^\perp$؛ وبالتالي، $w \in W^{\perp\perp}$. ينتج عن ذلك أن $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

117.14 لنفترض أن W فضاء جزئي في فضاء منته ـ البعد V. بيّن أن $W = W^{\perp\perp}$.

■ نعرف، من مبرهنة 11.14، أن $V = W \oplus W^\perp$، وأن $V = W^\perp \oplus W^{\perp\perp}$. وبالتالي، $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$، وكذلك $\dim W^{\perp\perp} = \dim V - \dim W^\perp$. يقود هذا إلى $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$. ولكن $W \subset W^{\perp\perp}$ بسبب ما سبق، إذن، $W = W^{\perp\perp}$ كما مطلوب.

5.14 المجموعات والقواعد المتعامدة

سوف نستخدم في هذا القسم التعريفات التالية:

تعريفات: لتكن مجموعة متجهات $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ في فضاء داخلي V. نقول عن S أنها «متعامدة» إذا كانت كل متجهاتها غير ـ صفرية، وكانت هذه المتجهات متعامدة ثنائياً، أي إذا $\langle u_i,u_i\rangle \neq 0$ ولكن $\langle u_i,u_j\rangle = 0$ من أجل $i \neq j$. ونقول عنها أنها «ناظمية ـ التعامد» إذا كانت S متعامدة وإذا كان طول كل واحدٍ من متجهاتها يساوي الوحدة، أو، بتعبير آخر، إذا

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا} \quad i = j \\ 0 & \text{إذا} \quad i \neq j \end{cases}$$

أمّا «المُنَاظَمَةُ» فتشير إلى أسلوب قسمة كل متجه، في مجموعة متعامدة S، على طوله، بحيث نتحول S إلى مجموعة ناظمية التعامد. إن قاعدة متعامدة (ناظمية ـ التعامد) هي قاعدة S تكون أيضاً متعامدة (ناظمية ـ التعامد).

118.14 بيّن أن مجموعة المتجهات S التالية في $\mathbf{R}^4$ تكون متعامدة: $S = \{u = (1,2,-3,4),\ v = (3,4,1,-2),\ w = (3,-2,1,1)\}$.

■
$$\langle u, v\rangle = 3 + 8 - 3 - 8 = 0$$
$$\langle u, w\rangle = 3 - 4 - 3 + 4 = 0$$
$$\langle v, w\rangle = 9 - 8 + 1 - 2 = 0$$

كل زوج متجهات متعامدان، وبالتالي، تكون S متعامدة.

119.14 نَاظِمْ المجموعة المتعامدة S، في المسألة 118.14، لتحصل على مجموعة ناظمية ـ التعامد.

■ نقسم كل متجه في S على طوله. نوجد أولاً $\|u\|^2 = 1+4+9+16 = 30$، $\|v\|^2 = 9+16+1+4 = 30$، $\|w\|^2 = 9+4+1+1 = 15$. إذن $\hat{u} = (1/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30}, -3/\sqrt{30}, 4/\sqrt{30})$، $\hat{v} = (3/\sqrt{30}, 4/\sqrt{30}, 1/\sqrt{30}\ -2/\sqrt{30})$، $\hat{w} = (3/\sqrt{15}, -2/\sqrt{30}, 1/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15})$ تشكل مجموعة المتجهات ناظمية ـ التعامد المطلوبة.

120.14 لتكن القاعدة المعتادة في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbf{R}^3$: $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$. هل E ناظمية التعامد؟

■ لدينا $\langle e_1,e_2\rangle = 0$ ، $\langle e_1,e_3\rangle = 0$ ، و $\langle e_2,e_3\rangle = 0$. وبذلك، تكون E متعامدة. كما أن $\langle e_1,e_1\rangle = 1$ ، $\langle e_2,e_2\rangle = 1$ ، و $\langle e_3,e_3\rangle = 1$. إذن، تكون E قاعدة ناظمية التعامد لـ $\mathbf{R}^3$.

ملاحظة: النتيجة السابقة صحيحة عموماً؛ أي أن القاعدة المعتادة في $\mathbf{R}^n$ تكون ناظمية التعامد من أجل كل n.

121.14 ليكن V الفضاء المتجهي للدوال الحقيقية المستمرة على الفترة $-\pi \leq t \leq \pi$ ، بجداء داخلي معرف بواسطة $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt$. مجموعة الدوال S التالية تلعب دوراً أساسياً في نظرية متسلسلات فورييه: $S = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots\}$. هل S متعامدة؟ هل S ناظمية التعامد؟

■ S متعامدة، لأن $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt = 0$. من أجل أي دالتين $f,g \in S$. من جهة أخرى، S ليست ناظمية التعامد، لأن لدينا مثلاً $\langle \cos t, \cos t\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$.

122.14 بيّن أن مجموعة متجهات متعامدة S تكون مستقلة خطياً.

■ لنفترض أن $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$، وأن

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r = 0 \qquad (1)$$

نأخذ الجداء الداخلي لـ (1) مع u_1، فنحصل على

$$0 = \langle 0, u_1\rangle = \langle a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r, u_1\rangle = a_1\langle u_1, u_1\rangle + a_2\langle u_2, u_1\rangle + \cdots + a_r\langle u_r, u_1\rangle$$
$$= a_1\langle u_1, u_1\rangle + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_r \cdot 0 = a_1\langle u_1, u_1\rangle$$

بما أن S متعامدة، إذن $\langle u_1, u_1\rangle = 0$ ؛ وبالتالي $a_1 = 0$. نأخذ، بالمثل، الجداء الداخلي لـ (1) مع u_i من أجل $i = 2,\ldots,r$،

$$0 = \langle 0, u_i\rangle = \langle a_1u_1 + \cdots + a_ru_r, u_i\rangle = a_1\langle u_1, u_i\rangle + \cdots + a_i\langle u_i, u_i\rangle + \cdots + a_r\langle u_r, u_i\rangle = a_i\langle u_i, u_i\rangle$$

ولكن $\langle u_i,u_i\rangle \neq 0$ ، إذن $a_i = 0$. وبذلك، تكون S مستقلة خطياً.

المسائل 123.14-127.14 تتعلق بمجموعة المتجهات S التالية في $\mathbf{R}^3$:

$$S = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (2,1,-4), u_3 = (3,-2,1)\}$$

123.14 بيّن أن S متعامدة.

■ $u_1.u_2 = 2 + 2 - 4 = 0$ ، $u_1.u_3 = 3 - 4 + 1 = 0$ ، $u_2.u_3 = 6 - 2 - 4 = 0$. وبذلك، تكون S متعامدة.

124.14 هل S قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$؟

■ بما أن S متعامدة، فهي مستقلة خطياً، ونحن نعرف أن أي ثلاثة متجهات مستقلة خطياً تشكل قاعدة من أجل $\mathbf{R}^3$.

125.14 أكتب $v = (4,1,18)$ كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3.

■ نضع v في شكل تركيبة خطية باستخدام المجاهيل x، y، z، كما يلي:

$$(4,1,18) = x(1,2,1) + y(2,1,-4) + z(3,-2,1) \qquad (1)$$

طريقة 1: نفك (1) فنحصل على المنظومة

$$x + 2y + 3z = 4 \qquad 2x + y - 2z = 1 \qquad x - 4y + z = 18$$

نحلّ المنظومة فنحصل على $x = 4$، $y = -3$، $z = 2$. وبذلك $v = 4u_1 - 3u_2 + 2u_3$.

طريقة 2: [تستخدم هذه الطريقة حقيقة أن متجهات القاعدة متعامدة، ويكون الحساب أبسط كثيراً]. نأخذ الجداء الداخلي لـ (1) مع u_1 فنحصل على $(4,1,18).(1,2,1) = x(1,2,1).(1,2,1)$ أو $24 = 6x$ أو $x = 4$. [الحدّان الأخيران يتلاشيان لأن u_1 متعامد مع u_2 و u_3]. نأخذ الجداء الداخلي لـ (1) مع u_2 فنحصل على $(4,1,18).(2,1,-4) = y(2,1,-4).2,1,-4)$ أو $-63 = 21y$ أو $y = -3$؛ ثم نأخذ الجدَاء الداخلي لـ (1) مع u_3 فنحصل على $(3,-2,1)$. $(4,1,18).(3,-2,1) = z(3,-2,1)$ أو $28 = 14z$ أو $z = 2$. وبذلك، $v = 4u_1 - 3u_2 + 2u_3$.

126.14 أكتب $w = (3,4,5)$ كتركيبة خطية في u_1، u_2، u_3.

■ نكوّن أولاً المعادلة

$$(3,4,5) = x(1,2,1) + y(2,1,-4) + z(3,-2,1) \quad (1)$$

ثم نأخذ الجداء الداخلي لـ (1) مع u_1، فنحصل على $(3,4,5).(1,2,1) = x(1,2,1).(1,2,1)$ أو $16 = 6x$ أو $x = 8/3$. ونأخذ الجداء الداخلي لـ (1) بالنسبة لـ u_2 فنحصل على $(3,4,5).(2,1,-4) = y(2,1,-4).(2,1,-4)$ أو $-10 = 21y$ أو $y = -10/21$. ونأخذ الجداء الداخلي لـ (1) مع u_3 فنحصل على $(3,4,5).(3,-2,1) = z(3,-2,1).(3,-2,1)$ أو $6 = 14z$ أو $z = 3/7$. وبذلك $w = 8/3\, u_1 - 10/21\, u_2 + 3/7\, u_3$.

127.14 نَاظِمْ S لنحصل على قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ $\mathbf{R}^3$.

■ $\|u_1\|^2 = 1+4+1 = 6$ $\quad\|u_2\|^2 = 4+1+16 = 21$ $\quad\|u_3\|^2 = 9+4+1 = 14$

وبذلك، تشكل $\hat{u}_1 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ ، $\hat{u}_2 = (2/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21})$ ، $\hat{u}_3 = (3/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14})$ القاعدة ناظمة ـ التعامد المنشودة.

مبرهنة 2.14: لنفترض أن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ قاعدة متعامدة لـ V. إذن، يكون لدينا من أجل كل $v \in V$

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 + \cdots + \frac{\langle v, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle} u_n$$

128.14 أثبت مبرهنة 2.14.

■ لنفترض أن $v = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$. نأخذ الجداء الداخلي للطرفين مع u_1 فنحصل على $\langle v,u_1\rangle = \langle k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n, u_1\rangle = k_1\langle u_1,u_1\rangle + k_2\langle u_2,u_1\rangle + \ldots + k_n\langle u_n,u_1\rangle = k_1\langle u_1,u_1\rangle + k_2.$ $0 + \ldots + k_n.0 = k_1\langle u_1,u_1\rangle$. وبذلك، $k_1 = \langle v,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle$. بالمثل، ومن أجل $i = 2,\ldots,n$، نجد أن $\langle v,u_i\rangle = \langle k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n,u_i\rangle = k_1\langle u_1,u_i\rangle + k_2\langle u_2,u_i\rangle + \ldots + k_n\langle u_n,u_i\rangle = k_1.0 + \ldots + k_i\langle u_i,u_i\rangle + \ldots + k_n.0 = k_i\langle u_i,u_i\rangle$. إذن، $k_i = \langle v,u_i\rangle/\langle u_i,u_i\rangle$. نعوض من أجل k_i في المعادلة $u = k_1u_1 + \ldots + k_nu_n$، فنحصل على النتيجة المنشودة.

ملاحظة: يعرف السلّمي أعلاه

$$k_i = \frac{\langle v, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} = \frac{\langle v, u_i\rangle}{\|u_i\|^2}$$

بمركبة v على طول u_i أو معامل فورييه لـ v بالنسبة لـ u_i.

المسائل 129.14-132.14 تتعلق بمجموعة المتجهات التالية S في $\mathbf{R}^4$: $S = \{u_1 = (1,1,0,-1),\ u_2 = (1,2,1,3),\ u_3 = (1,1,-9,2),\ u_4 = (16,-13,1,3)\}$.

129.14 بيِّن أن S متعامدة.

■ $u_1 \cdot u_2 = 1+2+0-3 = 0$ $\quad u_1 \cdot u_3 = 1+1+0-2 = 0$ $\quad u_1 \cdot u_4 = 16-13+0-3 = 0$

$u_2 \cdot u_3 = 1+2-9+6 = 0$ $\quad u_2 \cdot u_4 = 16-26+1+9 = 0$ $\quad u_3 \cdot u_4 = 16-13-9+6 = 0$

وبذلك، تكون S متعامدة.

130.14 هل S قاعدة لـ R^4؟

■ نعم، فبما أن S متعامدة فهي مستقلة خطياً، وأي أربعة متجهات مستقلة خطياً تشكل قاعدة من أجل R^4.

131.14 أوجد إحداثيات متجه إختياري $v = (a,b,c,d)$ في R^4 بالنسبة للقاعدة S.

■ فبما أن S متعامدة، فإننا نحتاج فقط لإيجاد معاملات فورييه لـ v بالنسبة لمتجهات القاعدة، كما في مبرهنة 2.14. وبذلك، فإن

$$k_1 = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{a+b-d}{3}$$

$$k_2 = \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{a+2b+c+3d}{15}$$

$$k_3 = \frac{\langle v, u_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} = \frac{a+b-9c+2d}{87}$$

$$k_4 = \frac{\langle v, u_4 \rangle}{\langle u_4, u_4 \rangle} = \frac{16a-13b+c+3d}{435}$$

هي إحداثيات v بالنسبة للقاعدة S.

132.14 ناظم S للحصول على قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ R^4.

■ لدينا $\|u_1\|^2 = 3$، $\|u_2\|^2 = 15$، $\|u_3\|^2 = 87$، و $\|u_4\|^2 = 435$. وبذلك، تكون $\hat{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3})$، $\hat{u}_2 = (1/\sqrt{15}, 2/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15}, 3/\sqrt{15})$، $\hat{u}_3 = (1/\sqrt{87}, 1/\sqrt{87}, -9/\sqrt{87}, 2/\sqrt{87})$، $\hat{u}_4 = (16/\sqrt{435}, -13/\sqrt{435}, 1/\sqrt{435}, 3/\sqrt{435})$ القاعدة ناظمية ـ التعامد المطلوبة.

133.14 ليكن $u = (1,1,1,1)$ متجهاً في R^4. أوجد قاعدة متعامدة لـ $u^\perp$.

■ لاحظ أن $u^\perp$ هو الفضاء الحلّي للمعادلة الخطية

$$x+y+z+t=0 \qquad (1)$$

نوجد حلاً غير صفري v_1 لـ (1). ليكن $v_1 = (0,0,1,-1)$. نريد أن يكون متجه القاعدة الثاني v_2 حلاً لـ (1) ومتعامداً مع v_1، أي أن يكون حلاً للمنظومة

$$x+y+z+t=0 \qquad z-t=0 \qquad (2)$$

نوجد حلاً غير صفري لـ (2). ليكن $v_2 = (0,2,-1,-1)$. نريد أن يكون المتجه الثالث في القاعدة حلاً لـ (1)، ومتعامداً أيضاً مع v_1 و v_2، أي أن يكون حلاً للمنظومة

$$x+y+z+t=0 \qquad 2y-z-t=0 \qquad z-t=0 \qquad (3)$$

نوجد حلاً غير ـ صفري لـ (3). ليكن $v_3 = (-1,1,1,1)$. إذن، تكوّن $\{v_1, v_2 v_3\}$ قاعدة متعامدة لـ $u^\perp$.

[ملاحظة: نلاحظ أننا نختار الحلّين المتوسطين v_1 و v_2 بحيث أن كل منظومة جديدة في شكل درجي. وهذا يبسط العملية الحسابية.]

134.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد للمتممة المتعامدة $u^\perp$ للمتجه $u = (1,1,1,1)$ في R^4.

■ نناظم القاعدة المتعامدة لـ $u^\perp$ التي تحصلنا عليها أعلاه.

$$\|v_1\|^2 = 0+0+1+1 = 2 \qquad \|v_2\|^2 = 0+4+1+1 = 6 \qquad \|v_3\|^2 = 9+1+1+1 = 12$$

وبذلك، تكون المجموعة التالية قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ $u^\perp$:

$$v_1 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \qquad v_2 = (0, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) \qquad v_3 = (-3/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12})$$

135.14 ليكن $w = (1,2,3)$ متجهان الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^3$. أوجد قاعدة متعامدة لـ $w^{\perp}$.

■ نوجد حلاً غير ـ صفري للمنظومة $x+2y+3z = 0$، ليكن $v_1 = (1,1,-1)$. نوجد الآن حلاً غير صفري للمنظومة $x + 2y + 3z = 0$، $x+y-z = 0$. فنحصل على $v_2 = (5,-4,1)$. [أو يمكن، بشكل بديل، الحصول على v_2 بأخذ الجداء التقاطعي $w \times v_1$]. إذن، تكون $\{v_1,v_2\}$ قاعدة متعامدة من أجل $w^{\perp}$.

136.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد من أجل $w^{\perp}$ حيث $w = (1,2,3)$.

■ نناظم القاعدة المتعامدة المتحصل عليها أعلاه: $\|v_1\|^2 = 1+1+1 = 3$ ، $\|v_2\|^2 = 25+16+1 = 42$. إذن، تشكل $\hat{v}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ و $\hat{v}_2 = (5/\sqrt{42}, -4/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42})$ قاعدة ناظمية التعامد لـ $w^{\perp}$.

مبرهنة 3.14 (المبرهنة الفيثاغورية المعمَّمة): لتكن $\{u_1,u_2,...,u_r\}$ مجموعة متجهات متعامدة. إذن، $\|u_1 + u_2 +...+u_r\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 +...+\|u_r\|^2$.

137.14 أثبت مبرهنة 3.14.

■ لدينا $\|u_1 + u_2 +...+u_r\|^2 = \langle u_1 + u_2 +...+u_r, u_1 + u_2 +...+u_r\rangle = \langle u_1,u_1\rangle + \langle u_2,u_2\rangle +...+ \langle u_r, u_r\rangle + \sum_{i\neq j} \langle u_i, u_j\rangle$.
المبرهنة تنتج من حقيقة أن $\langle u_i,u_i\rangle = \|u_i\|^2$ و $\langle u_i,u_j\rangle = 0$ من أجل $i \neq j$.

138.14 حقق المبرهنة الفيثاغورية من أجل المجموعة المتعامدة التالية في $\mathbf{R}^4$ [أنظر المسألة 118.14]:
$\{u = (1,2,-3,4), v = (3,4,1,-2), w =(3,-21,1)\}$.

■ لدينا $u + v + w = (7,4,-1,3)$ و $\|u + v + w\|^2 = 49 + 16 + 1 +9 = 75$. نجد، من المسألة 119.14، أن $\|u\|^2 = 30$ ، $\|v\|^2 = 30$. و $\|w\|^2 = 15$. وبذلك، $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 30 + 30 + 15 = 75 = \|u + v + w\|^2$.

المسائل 139.14-143.14 تتعلق بالفضاء المتجهي $V = \mathbf{R}^2$ بالجداء الداخلي المعرّف كما يلي [أنظر المسألة 18.14]:
$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ، حيث $u = (x_1,x_2)$، $v = (y_1,y_2)$.

139.14 هل $E = \{(1,0),(0,1)\}$ قاعدة لـ V؟

■ نعم، فإن مسألة قاعدة لـ V لا تتأثر بالجداء الداخلي في V.

140.14 هل E قاعدة متعامدة أو ناظمية ـ التعامد لـ V؟

■ $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 0 - 1 + 0 + 0 = -1$

إذن، E ليست قاعدة متعامدة لـ V، وبالتالي فهي ليست قاعدة ناظمية التعامد لهذا الفضاء.

141.14 أوجد قاعدة متعامدة S لـ V تتضمن المتجه $u_1 = (1,2)$.

■ بما أن $\dim V = 2$، فإننا نحتاج فقط لمتجه غير صفري آخر $u_2 = (x,y)$ بحيث أن $\langle u_1,u_2\rangle = 0$. لدينا إذن $\langle(1,2),(x,y)\rangle = x - y - 2x + 6y = - x + 5y = 0$. ويكون $x = 5$، $y = 1$ حلاً غير صفري لهذه المعادلة. وبذلك، تكون $S = \{u_1 = (1,2),u_2 = (5,1)\}$ قاعدة متعامدة لـ V.

142.14 أوجد قاعدة ناظمية التعامد لـ V.

■ نناظم القاعدة المتعامدة أعلاه.

$$\|u_1\|^2 = 1 - 2 - 2 + 12 = 9 \qquad \|u_2\|^2 = 25 - 5 - 5 + 3 = 18$$

وبذلك، $\hat{u}_1 = (1/3,2/3)$ و $\hat{u}_2 = (5/\sqrt{18}, 1/\sqrt{18})$ يشكلان قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V.

143.14 حقق المبرهنة الفيثاغورية من أجل u_1 و u_2.

■ لديـنـا $u_1 + u_2 = (1,2) + (5,1) = (6,3)$ و $\|u_1 + u_2\|^2 = \langle(6,3),(6,3)\rangle = 36 - 18 - 18 + 27 = 27$. إذن $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = 9 + 18 = 27 = \|u_1 + u_2\|^2$.

144.14 بيِّن أنه إذا كانت $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$ متعامدة، فإن $\{a_1u_1,a_2u_2,\ldots,a_ru_r\}$ من أجل أي إختيار للسلّميات غير الصفرية $a_1,\ldots,a_r$ في $\mathbb{R}$.

■ بما أن $u_i \neq 0$ و $a_i \neq 0$، فيكون لدينا $a_iu_i \neq 0$. لدينا أيضاً من أجل $i \neq j$ $\langle u_i,u_j\rangle = 0$ إذن $\langle a_iu_i,a_ju_j\rangle = a_ia_j\langle u_i,u_j\rangle = a_ia_j.0 = 0$. وبالتالي، تكون $\{a_iu_i\}$ متعامدة.

المسائل 145.14-148.14 تتعلق بقاعدة ناظمية ـ التعامد $E = \{e_1,\ldots,e_n\}$ لفضاء جداء داخلي V.

145.14 بيِّن أنه يكون لدينا $u = \langle u,e_1\rangle e_1 + \langle u,e_2\rangle e_2 + \ldots + \langle u,e_n\rangle e_n$ من أجل أي $u \in V$. [قارن بالمبرهنة 2.14].

■ لنفترض أن $u = k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n$. نأخذ الجداء الداخلي لـ u مع e_1، فنحصل على $\langle u,e_1\rangle = \langle k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n,e_1\rangle = k_1\langle e_1,e_1\rangle + k_2\langle e_2,e_1\rangle + \ldots + k_n\langle e_n,e_1\rangle = k_1.1 + k_2.0 + \ldots + k_n.0 = k_1$. بالمثل، ومن أجل $i = 2,\ldots,n$، يكون لدينا

$\langle u,e_i\rangle = \langle k_1e_1 + \ldots + k_ie_i + \ldots + k_ne_n,e_i\rangle = k_1\langle e_1,e_i\rangle + \ldots + k_i\langle e_i,e_i\rangle + \ldots + k_n\langle e_n,e_i\rangle = k_1.0 + \ldots + k_i.1 + \ldots + k_n.0 = k_i$.

نعوض بـ $\langle u,e_i\rangle$ من أجل k_i في المعادلة $u = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n$، فنحصل على النتيجة المنشودة.

146.14 بيِّن أن $\langle a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, b_1e_1 + \ldots + b_ne_n\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

■ لدينا

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_ie_i, \sum_{j=1}^{n} b_je_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\langle e_i, e_i\rangle + \sum_{i\neq j} a_ib_j\langle e_i, e_j\rangle$$

ولكن $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ من أجل $i \neq j$ و $\langle e_i,e_j\rangle = 1$ من أجل $i = j$؛ إذن، نحصل وكما هو مطلوب على

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_ie_i, \sum_{j=1}^{n} b_je_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

147.14 بيِّن أن $\langle u,v\rangle = \langle u,e_1\rangle\langle v,e_1\rangle + \ldots + \langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle$ من أجل أي $u,v \in V$.

■ نجد، من المسألة 145.14، أن $u = \langle u,e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u,e_n\rangle e_n$ و $v = \langle v,e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v,e_n\rangle e_n$. إذن، وبواسطة المسألة 146.14، يكون لدينا $\langle u,v\rangle = \langle u,e_1\rangle\langle v,e_1\rangle + \langle u,e_2\rangle\langle v,e_2\rangle + \ldots + \langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle$.

148.14 لنفترض أن $T: V \to V$ تطبيق خطي، ولنكن A التمثيل المصفوفي لـ T في القاعدة المعطاة $\{e_i\}$. بيِّن أن $\langle T(e_j),e_i\rangle$ هو المدخل ij لـ A.

■ لدينا، من المسألة 145.14، أن

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= \langle T(e_1), e_1\rangle e_1 + \langle T(e_1), e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle T(e_1), e_n\rangle e_n \\
T(e_2) &= \langle T(e_2), e_1\rangle e_1 + \langle T(e_2), e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle T(e_2), e_n\rangle e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(e_n) &= \langle T(e_n), e_1\rangle e_1 + \langle T(e_n), e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle T(e_n), e_n\rangle e_n
\end{aligned}$$

إن المصفوفة A التي تمثل T في القاعدة $\{e_i\}$ هي منقولة مصفوفة المعاملات أعلاه؛ وبالتالي، فإن $\langle T(e_j),e_i\rangle$ هو المدخل ij لـ A.

المسائل 149.14-154.14 تتعلق بالفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 الحقيقية، بجداء داخلي معرّف بواسطة $\langle A,B\rangle = tr(B^TA)$.

149.14 بيِّن أن القاعدة المعتادة التالية S لـ V متعامدة.

$$S = \left\{E_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

■ لدينا $\langle E_1, E_2\rangle = \mathrm{tr}(E_2^T E_1) = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$ لدينا، بالمثل، أن $\langle W_i, E_j\rangle = \mathrm{tr}(E_j^T E_i) = 0$ من أجل $i \neq j$. وبذلك، تكون S متعامدة.

150.14 بيّن أن S تكون في الحقيقة ناظمية ـ التعامد.

■ لدينا $\langle E_2, E_2\rangle = \mathrm{tr}(E_2^T E_2) = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$، $\langle E_1, E_1\rangle = \mathrm{tr}(E_1^T E_1) = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1 + 0 = 1$. ولدينا، بالمثل، أن $\langle E_3, E_3\rangle = 1$ و $\langle E_4, E_4\rangle = 1$.

وبذلك، تكوّن S ناظمية ـ التعامد.

151.14 ليكن W الفضاء الجزئي في V المتكون من المصفوفات القطرية. أوجد قاعدة متعامدة لـ $W^\perp$ (المتممة المتعامدة لـ W).

■ يتولّد W بواسطة المصفوفتين $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$، وهما جزئين من القاعدة المعتادة S أعلاه. وبذلك تشكل المصفوفتان المتبقيتان $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ في S قاعدة متعامدة من أجل $W^\perp$.

152.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ $W^\perp$.

■ بما أن $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ هما فعلا متجها وحدة، فإنهما يشكلان قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ $W^\perp$.

153.14 ليكن U الفضاء الجزئي في V المكوّن من المصفوفات المتناظرة. أوجد قاعدة متعامدة من أجل $U^\perp$.

■ يتولّد U بواسطة المصفوفات $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$، $C = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. وتتكون U من كل المصفوفات $M = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ المتعامدة مع A، B، C. إذن

$$\langle M, A\rangle = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 0\end{pmatrix} = x = 0$$

$$\langle M, B\rangle = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}z & t\\ x & y\end{pmatrix} = y + z = 0$$

$$\langle M, C\rangle = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\right] = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ z & t\end{pmatrix} = t = 0$$

يكون للمنظومة $x = 0$، $y + z = 0$، $t = 0$ متغير حرّ واحد هو z. إذن، تكون $x = 0$، $y = 1$، $z = -1$، $t = 0$ قاعدة للفضاء الحلّي للمنظومة. ينتج عن ذلك أن $M = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ تشكل قاعدة من أجل $U^\perp$؛ وهي، على الخصوص، قاعدة متعامدة لـ $U^\perp$.

154.14 أوجد قاعدة ناظمية التعامد لـ $U^\perp$.

■ نناظم M فنحصل على $\langle M, M\rangle = 1 + 1 = 2$. إذن $\hat{M} = \begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ تشكل القاعدة المنشودة.

6.14 المصفوفات المتعامدة

تذكر [القسم 13.4] أن مصفوفة حقيقية P تكون متعامدة إذا كانت P عكوسة وإذا $P^T = P^{-1}$، أي إذا $PP^T = P^TP = I$. يواصل هذا القسم البحث في هذه المصفوفات. بالإضافة إلى ذلك، وبما أن متجهاتنا في $\mathbf{R}^n$ يمكن أن تضرب في مصفوفات، فإننا نفترض أن مثل هذه المتجهات عمودية، إلاّ إذا ذكر أو فهم غير ذلك. وبذلك، يكون لدينا من أجل متجهين $u, v \in \mathbf{R}^n$، $\langle u, v\rangle = u^Tv$ بالنسبة للجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^n$.

مبرهنة 4.14 لتكن P مصفوفة حقيقية مربعة -n إذن، الخواص الثلاث التالية متكافئة:

(i) P متعامدة، أي $P^T = P^{-1}$.

(ii) تشكل صفوف P مجموعة من المتجهات ناظمية ـ التعامد

(iii) تشكل أعمدة P مجموعة من المتجهات ناظمية ـ التعامد

155.14 ناقش صلاحية مبرهنة 4.14 [أنظر مبرهنة 9.4].

■ لا تكون هذه المبرهنة [والتي يتم إثباتها في المسألتين 235.4-236.4] صحيحة إلاّ بالنسبة للجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^n$. فهي لا تكون صحيحة من أجل أي جداء داخلي آخر على $\mathbf{R}^n$.

156.14 بيّن أن $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ متعامدة من أجل أي عدد حقيقي θ .

■ لدينا $(\cos\theta,-\sin\theta).(\sin\theta,\cos\theta) = \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$، وبذلك تكون الصفوف متعامدة؛ كما أن $\|(\cos\theta,-\sin\theta)\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ، $\|(\sin\theta,\cos\theta)\|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ، وبذلك تكون الصفوف متجهات وحدة. إذن، المصفوفة متعامدة.

ملاحظة: لدينا، في الحقيقة، النتيجة الأقوى التالية، والتي سوف نبرهنها في المسألتين 241.14-242.14:

مبرهنة 5.14: تكون كل مصفوفة متعامدة 2×2 في الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{أو} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

من أجل عدد حقيقي مناسب θ .

157.14 أوجد مصفوفة متعامدة P يكون صفها الأول $(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$.

■ نجد، من مبرهنة 5.14، أن

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \qquad \text{أو} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

158.14 أوجد مصفوفة متعامدة P يكون صفها الأول $u_1 = (1/3,2/3,2/3)$.

■ نوجد أولاً متجهاً غير صفري $w_2 = (x,y,z)$ يكون متعامداً مع u_1، أو ـ بشكل بديل ـ متعامداً مع $w_1 = 3u_1 = (1,2,2)$. يكون لدينا

$$\langle w_1,w_2\rangle = (1,2,2).(x,y,z) = 0 \qquad \text{أو} \qquad x + 2y + 2z = 0$$

وأحد حلولها $w_2 = (0,1,-1)$. نوجد بعدئذ متجهاً غير صفري $w_3 = (x,y,z)$ يكون متعامداً مع w_1 و w_2 معاً. يكون لدينا

$$\langle w_1,w_3\rangle = (1,2,2).(x,y,z) = x + 2y + 2z = 0$$

$$\langle w_2,w_3\rangle = (0,1,-1).(x,y,z) = y - z = 0$$

نضع $z = -1$ فنجد الحل $w_3 = (4,-1,-1)$. نناظم w_2، w_3 فنحصل على

$$u_2 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \qquad \text{و} \qquad u_3 = (4/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18})$$

على الترتيب. وبذلك

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

نؤكد على أن المصفوفة P أعلاه ليست وحيدة.

المسائل 159.14-164.14 تتعلق بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

159.14 هل صفوف A متعامدة؟

■ نعم، لأن

$$(1,1,-1).(1,3,4) = 1 + 3 \quad 4 = 0$$

$$(1,1,-1).(7,-5,2) = 7 - 5 - 2 = 0$$

$$(1,3,4).(7,-5,2) = 7 - 15 + 8 = 0$$

160.14 هل A مصفوفة متعامدة؟

■ لا، لأن صفوف A ليست متجهات وحدة؛ مثلاً، $(1,1,-1)^2 = 1 + 1 + 1 = 3$.

161.14 هل أعمدة A متعامدة؟

■ لا، مثلا $(1,1,7).(1,3,-5) = 1 + 3 - 35 = -31 \neq 0$.

162.14 لتكن B المصفوفة التي يتحصل عليها بمناظمة كل صف في A.
أوجد B.

■ لدينا $\|(1,1,-1)\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$، $\|(1,3,4)\|^2 = 1 + 9 + 16 = 26$، $\|(7,-5,2)\|^2 = 49 + 25 + 4 = 78$.
وبذلك

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{26} & 3/\sqrt{26} & 4/\sqrt{26} \\ 7/(6\sqrt{2}) & -5/(6\sqrt{2}) & 2/(6\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

163.14 هل B مصفوفة متعامدة؟

■ نعم، لأن صفوف B لا زالت متعامدة كما أنّها الآن متجهات وحدة.

164.14 هل أعمدة B متعامدة؟

■ نعم، لأن صفوف B تشكل مجموعة متجهات ناظمية ـ التعامد. إذن، وبواسطة مبرهنة 4.14، تكون أعمدة B آلياً مجموعة ناظمية ـ التعامد.

165.14 أوجد مصفوفة متناظرة متعامدة P يكون صفها الأول $(1/3,2/3,2/3)$. [قارن بالمسألة 158.14].

■ بما أن P متناظرة، فيجب أن يكون في الشكل

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & x & y \\ \frac{2}{3} & y & z \end{pmatrix}$$

بما أن الصفين الأول والثاني متعامدان، فإننا نحصل على $2/9 + 2/3\,x + 2/3\,y = 0$ أو $1 + 3x + 3y = 0$. بما أن الصف الثاني متجه وحدة، فإننا نحصل على $4/9 + x^2 + y^2 = 1$ أو $9x^2 + 9y^2 = 5$. نعوّض بـ $y = -(1 + 3x)/3$ في $9x^2 + 9y^2 = 5$ فنحصل على $9x^2 + 3x - 2 = 0$ أو $(3x - 1)(3x + 2) = 0$. توجد حالتان:
حالة (i): $x = 1/3$. إذن $y = -2/3$. بما أن الصفين الأول والثالث متعامدان نحصل على $2/9 - 4/9 + 2/3\,z = 0$ أو $z = 1/3$. إذن

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

حالة (ii): $x = -2/3$. إذن، $y = 1/3$. بما أن الصفين الأول والثالث متعامدان، نحصل على $2/9 + 2/9 + 2/3z = 0$ أو $z = -2/3$. إذن،

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

166.14 أثبت أن:

(أ) P متعامدة إذا وفقط إذا P^T متعامدة.

(ب) إذا P متعامدة، إذن P^{-1} متعامدة.

(ج) إذا P متعامدة، إذن PQ متعامدة.

(د) إذا P متعامدة، إذن $\det(P) = 1$ أو $\det(P) = -1$.

■ (أ) لدينا $(P^T)^T = P$، إذن P متعامدة إذا وفقط إذا $PP^T = I$ إذا وفقط إذا $P^{TT}P^T = I$ إذا وفقط إذا P^T متعامدة.
[نلاحظ هنا أن المصطلح الإنكليزي iff يعني if and only if/ إذا وفقط إذا وليس له مقابل بالعربية حتى الآن].

(ب) لدينا $P^T = P^{-1}$، لأن P متعامدة. وبذلك، وبسبب (أ)، تكون P^{-1} متعامدة.

(ج) لدينا $P^T = P^{-1}$ و $Q^T = Q^{-1}$. إذن، $(PQ)(PQ)^T = PQQ^TP^T = PQQ^{-1}P^{-1} = I$. وبذلك، $(PQ)^T = (PQ)^{-1}$، وهذا يعني أن PQ متعامدة.

(د) لدينا $PP^T = I$. باستخدام $|P| = |P^T|$، نجد أن $|P| = |P^T|$، $1 = |I| = |PP^T| = |P||P^T| = |P|^2$. إذن، $|P| = 1$ أو -1.

167.14 ليكن $\mathcal{O}_n$ يرمز إلى تجميع كل المصفوفات المتعامدة المربعة -n. بيِّن أن $\mathcal{O}_n$ زمرة تحت الضرب [تسمى «الزمرة المتعامدة»].

■ المصفوفة المتطابقة I تنتمي إلى $\mathcal{O}_n$، لأن I متعامدة. ونعرف من المسألة 166.14 أن $\mathcal{O}_n$ مغلقة تحت الضرب والمعكوسات. وبذلك، تكون $\mathcal{O}_n$ زمرة.

168.14 لتكن P مصفوفة بصفوف R_i^T وأعمدة C_j. بيِّن أن (أ) المدخل ij لـ PP^T هو $\langle R_i,R_j \rangle$، و (ب) المدخل ij لـ P^TP هو $\langle C_i,C_j \rangle$.

■ (أ) إن أعمدة P^T هي $R_1,R_2,\ldots$ إذن، المدخل ij لـ PP^T يكون $R_i^TR_j = \langle R_i,R_j \rangle$. (ب) إن صفوف P^T هي $C_1^T,C_2^T,\ldots$. إذن، المدخل ij لـ P^TP يكون $C_i^TC_j = \langle C_i,C_j \rangle$.

مبرهنة 6.14: لنفترض أن $E = \{e_i\}$ و $F = \{f_i\}$ قاعدتان متعامدتان لـ V. ولتكن P مصفوفة تغيير ـ القاعدة من القاعدة E إلى القاعدة F. إذن، P تكون متعامدة.

169.14 أثبت مبرهنة 6.14.

■ لنفترض أن

$$f_i = b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + \ldots + b_{in}e_n \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (1)$$

باستخدام المسألة 146.14 وحقيقة أن $\{f_i\}$ متعامدة، نحصل على

$$\delta_{ij} = \langle f_i,f_j \rangle = b_{i1}b_{j1} + b_{i2}b_{j2} + \ldots + b_{in}b_{jn} \qquad (2)$$

لتكن $B = (b_{ij})$ مصفوفة المعاملات في (1). [إذن $P = B^T$] نفترض أن $BB^T = (c_{ij})$. إذن، وبواسطة المسألة 168.14 و (2)، يكون لدينا $c_{ij} = b_{i1}b_{j1} + b_{i2}b_{j2} + \ldots + b_{in}b_{jn} = \delta_{ij}$. وبذلك $BB^T = I$. ينتج عن ذلك أن B متعامدة، وبالتالي تكون $P = B^T$ متعامدة.

مبرهنة 7.14: لتكن $\{e_1,\ldots,e_n\}$ قاعدة ناظمية التعامد لفضاء جداء داخلي V. ولتكن P مصفوفة متعامدة. إذن، المجموعة التالية تشكل قاعدة ناظمية ـ التعامد: $\{e'_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n : i = 1,\ldots,n\}$.

170.14 أثبت مبرهنة 7.14.

■ بما أن $\{e_i\}$ ناظمية ـ التعامد، نحصل بالمسألة 146.14 على $\langle e'_i, e'_j\rangle = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \langle C_i, C_j\rangle$، حيث يرمز C_i إلى العمود i في المصفوفة المتعامدة $P = (a_{ij})$. بما أن P متعامدة، فإن أعمدتها تشكل مجموعة ناظمية التعامد. هذا يقتضي $\langle e'_i, e'_j\rangle = \langle C_i, C_j\rangle = \delta_{ij}$. وبذلك، تكون $\{e'_i\}$. قاعدة ناظمية التعامد.

171.14 لنفترض أن P مصفوفة متعامدة. بين أن $\langle Pu, Pv\rangle = \langle u, v\rangle$ من أجل أي $u, v \in V$.

■ باستخدام $P^TP = I$، يكون لدينا $\langle Pu, Pv\rangle = (Pu)^T(Pv) = u^TP^TPv = u^Tv = \langle u, v\rangle$. [ملاحظة: يعني هذا أن P، منظوراً إليها كتطبيق خطي، تحافظ على الجداءات الداخلية].

172.14 لتكن P متعامدة. بيّن أن $\|Pu\| = \|u\|$ من أجل كل $u \in V$.

■ نستخدم $P^TP = I$، فيكون لدينا $\|Pu\|^2 = \langle Pu, Pu\rangle = u^TP^TPu = u^Tu = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$. نأخذ الجذر التربيعي للطرفين، فنجد نتيجتنا. [ملاحظة: يعني هذا أن P، منظوراً إليها كتطبيق خطي، تحافظ على الأطوال].

173.14 عرّف المصفوفات المتكافئة تعامدياً.

■ تكون مصفوفتان حقيقيتان A و B متكافئتين تعامدياً إذا كانت توجد مصفوفة متعامدة P بحيث أن $B = P^TAP = P^{-1}AP$.

المسائل 174.14-176.14 تبيّن أن التكافؤ التعامدي علاقة تكافؤ.

174.14 بيّن أن أي مصفوفة A تكون متكافئة تعامدياً مع A.

■ إن المصفوفة المتطابقة I متعامدة، و $I^T = I$. بما أن $A = I^TAI$، فإن A تكون مكافئة تعامدياً لـ A.

175.14 لنفترض أن A متكافئة تعامدياً مع B. بيّن أن B متكافئة تتعامدياً مع A.

■ توجد مصفوفة متعامدة P بحيث أن $A = P^TBP = P^{-1}BP$. إذن، $B = PAP^{-1} = PAP^T = (P^T)^TAP^T$. وبذلك، تكون B مكافئة تعامدياً لـ A.

176.14 لفترض أن A متكافئة تعامدياً مع B، وان B متكافئة تعامدياً مع C. بيّن أن A متكافئة تعامدياً مع C.

■ توجد مصفوفتان متعامدتان P و Q بحيث أن $A = P^TBP$ و $B = Q^TCQ$. إذن، $A = P^TBP = P^T(Q^TCQ)P = (QP)^TC(QP)$. ولكن QP متعامدة أيضاً. وبالتالي، تكون A متكافئة تعامدياً مع C.

7.14 المساقط، خوارزمية غرام ـ شميدت، تطبيقات

177.14 لنفترض أن $w \neq 0$. وليكن v أي متجه في V. بيّن أن

$$c = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$$

هو السلّمي الوحيد بحيث أن $v' = v - cw$ يكون متعامداً مع w.

■ لكـي يكـون v' متعـامـداً مـع w يجـب أن يكـون لـدينـا $\langle v - cw, w\rangle = 0$ أو $\langle v, w\rangle - c\langle w, w\rangle = 0$ أو $\langle v, w\rangle = c\langle w, w\rangle$. وبذلك، $c = \langle v, w\rangle / \langle w, w\rangle$. وبالعكس، لنفترض أن $c = \langle v, w\rangle / \langle w, w\rangle$. إذن

$$\langle v - cw, w\rangle = \langle v, w\rangle - c\langle w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, w\rangle = 0$$

ملاحظة: السلّمي c أعلاه يسمّى معامل فورييه لـ v بالنسبة إلى w، أو مركبة v على طول w. لاحظ أن cw يسمى مسقط v على طول w، كما موضح بالشكل 14-5.

شكل 14-5

178.14 أوجد معامل فورييه c والمسقط cw لـ $v = (1,-1,4)$ على طول $w = (0,1,1,1)$ في $\mathbf{R}^3$.

■ نحسب $\langle v,w\rangle = 0 - 1 + 2 = 1$ و $\|w\|^2 = 0+1+1=2$. وبذلك، $c = 1/2$ ويكون $cw = (0,1/2,1/2)$ مسقط v على طول w.

179.14 أوجد المركبة c والمسقط cw لـ $v = (1,2,3,4)$ على طول $w = (1,-3,4,-2)$ في $\mathbf{R}^4$.

■ احسب $\langle v,w\rangle = 1 - 6 + 12 - 8 = -1$ و $\|w\|^2 = 1 + 9 + 16 + 4 = 30$. إذن يكون $c = -1/30$ و $cw = (-1/30,1/10,-2/15,1/15)$ مسقط v على طول w.

180.14 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات، بالجداء الداخلي $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ أوجد معامل فورييه c والمسقط cg لـ $f(t) = 2t - 1$ على طول $g(t) = t^2$.

■ نحسب

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 (2t^3 - t^2)\,dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\langle g, g\rangle = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

وبذلك، $c = 5/6$ ويكون $cg(t) = 5/6\,t^2$ مسقط f على طول g.

181.14 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات 2×2 الحقيقية، بالجداء الداخلي $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^TA)$. أوجد المركبة c والمسقط cB لـ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ على طول $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

■ نحسب $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^TA) = 1 - 8 = -7$ و $\|B\|^2 = 0 + 1 + 1 + 4 = 6$. إذن، $c = -7/6$ و $cB = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ مسقط A على B.

182.14 لنفترض أن $\{w_1,w_2\}$ مجموعة متجهات متعامدة. ولنفترض أن v أي متجه في V. أوجد c_1 و c_2 بحيث يكون $v' = v - c_1w_1 - c_2w_2$ متعامداً مع w_1 و w_2.

■ إذا كان v' متعامداً مع w_1، إذن، $0 = \langle v - c_1w_1 - c_2w_2, w_1\rangle =$

$$0 = \langle v - c_1w_1 - c_2w_2, w_1\rangle = \langle v, w_1\rangle - c_1\langle w_1, w_1\rangle - c_2\langle w_2, w_1\rangle = \langle v, w_1\rangle - c_1\langle w_1, w_1\rangle - c_2\cdot 0$$
$$= \langle v, w_1\rangle - c_1\langle w_1, w_1\rangle$$

وبذلك $c_1 = \langle v,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle$. [أي أن c_1 تكون مركبة v على طول w_1]. بالمثل، إذا كان v' متعامداً مع w_2، إذن $0 = \langle v - c_1w_1 - c_2w_2,w_2\rangle = \langle v,w_2\rangle - c_2\langle w_2,w_2\rangle$. وبذلك، $c_2 = \langle v,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle$. [أي أن c_2 هو مركبة v على طول w_2].

توطئة 8.14: لتكن $\{w_1,w_2,\ldots,w_r\}$ مجموعة متعامدة من متجهات في V. وليكن v أي متجه في V. نعرّف $v' = v - c_1w_1 - c_2w_2 - \ldots - c_rw_r$ حيث

$$c_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

إذن، يكون v' متعامداً مع $w_1, w_2, \ldots, w_r$. [لاحظ أن الـ c تكون مركبات v على طول الـ w، على الترتيب].

183.14 أثبت توطئة 8.14.

■ لدينا، من أجل $i = 1, 2, \ldots, r$ وباستخدام $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ من أجل $i \neq j$،

$$\begin{aligned}\langle v - c_1 w_1 - c_2 w_2 - \cdots - c_r w_r, w_i \rangle &= \langle v, w_i \rangle - c_1 \langle w_1, w_i \rangle - \cdots - c_i \langle w_i w_i \rangle - \cdots - c_r \langle w_r, w_i \rangle \\ &= \langle v, w_i \rangle - c_1 \cdot 0 - \cdots - c_i \langle w_i, w_i \rangle - \cdots - c_r \cdot 0 \\ &= \langle v, w_i \rangle = c_i \langle w_i, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

مبرهنة 9.14: لنفترض أن $\{w_1, \ldots, w_r\}$ مجموعة متعامدة من متجهات في V. وليكن v أي متجه في V، ولتكن c_i مركبة v على طول w_i. إذن، يكون لدينا من أجل أي سلّميات $a_1, \ldots, a_r$.

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{r} c_k w_k \right\| \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{r} a_k w_k \right\|$$

184.14 أثبت مبرهنة 9.14 وهي التي تبيّن أن $c_1 w_1 + \ldots + c_r w_r$ هي أفضل تقريب لـ v كتركيبة خطية في $w_1, \ldots, w_r$.

■ نجد، من توطئة 8.14، أن $v - \sum c_k w_k$ متعامد مع كل w_i، وبالتالي متعامد مع أي تركيبة خطية في $w_1, \ldots, w_r$. لذلك، وباستخدام المبرهنة الفيثاغورية وبالجمع من $k = 1$ إلى r، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\left\| v - \sum a_k w_k \right\|^2 &= \left\| v - \sum c_k w_k + \sum (c_k - a_k) w_k \right\|^2 = \left\| v - \sum c_k w_k \right\|^2 + \left\| \sum (c_k - a_k) w_k \right\|^2 \\ &\geq \left\| v - \sum c_k w_k \right\|^2\end{aligned}$$

الجذر التربيعي للطرفين يعطينا المبرهنة.

185.14 لنفترض أن $v_1, v_2, \ldots, v_r$ تشكل قاعدة من أجل فضاء جزئي U في فضاء جداء داخلي V. صف خوارزمية غرام ـ شميدت التي تقود إلى قاعدة متعامدة [وناظمية ـ التعامد بعد المناظمة] لـ U.

■ نضع

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - c_{21} w_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\ w_3 &= v_3 - c_{31} w_1 - c_{32} w_2 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_r &= v_r - c_{r1} w_1 - c_{r2} w_2 - \cdots - c_{r-1} w_{r-1}\end{aligned}$$

حيث $c_{ri} = \langle v_r, w_i \rangle / \|w_i\|^2$. وبذلك، تكون المجموعة $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ القاعدة المتعامدة لـ U المطلوبة.

ملاحظة: قد يكون من الأبسط، في حالة الحساب اليدوي، أن تتخلص من الكسور في أيٍّ w_k جديد، وذلك بضربه في عدد سلّمي مناسب، لأن ذلك لا يؤثر في التعامد.

186.14 بيّن أنه يكون لدينا $\text{span}(v_1, \ldots, v_k) = \text{span}(w_1, \ldots, w_k)$ من أجل $k = 1, \ldots, r$، وذلك في خوارزمية غرام ـ شميدت أعلاه.

■ يكون البرهان بالاستقراء على k. لدينا، من أجل $k = 1$، أن $w_1 = v_1$، وبذلك يكون $\text{span}(v_1) = \text{span}(w_1)$.

لنفترض أن $k > 1$. بما أن v_k تركيبة خطية في $w_1,...,w_k$، يكون لدينا $span(v_1,...,v_k) \subseteq span(w_1,...,w_k)$، من ناحية أخرى w_k تركيبة خطية في v_k و $w_1,...,w_{k-1}$، بالاستقراء $span(w_1,...,w_{k-1}) = span(v_1,...,v_{k-1})$. إذن، يكون w_k تركيبة خطية في $v_1,...,v_k$ وبالتالي $span(w_1,...,w_k) \subseteq span(v_1,...,v_k)$. الاحتواءان معاً يقودان إلى النتيجة المطلوبة.

187.14 بيِّن أنه، في خوارزمية غرام ـ شميدت أعلاه، تشكل المتجهات $w_1,w_2,...,w_r$ قاعدة متعامدة.

■ لدينا أولاً أن $w_1 = v_1 \neq 0$. ولدينا، من أجل $k > 1$، أن $v_k \notin span(v_1,...,v_{k-1})$، لأن $v_1,...,v_r$ مستقلة خطياً، وبالتالي، $w_k \neq 0$.

نجد، من توطئة 8.14، أن كل w_k متعامد مع الـ $w_1,...,w_{k-1}$ السابقة له. وبذلك، تكون $\{w_1,...,w_r\}$ مجموعة متعامدة.

مبرهنة 10.14: لتكن $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أي قاعدة في فضاء جداء داخلي V. إذن، توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ لـ V بحيث أن مصفوفة تغيير ـ القاعدة من $\{v_i\}$ إلى $\{u_i\}$ تكون مثلثية؛ أي أن $u_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 +...+ a_{kk}u_k$ من أجل $k = 1,...,n$.

188.14 أثبت مبرهنة 10.14.

■ يتبع البرهان من خوارزمية غرام ـ شميدت والمسألتين 186.14 و 187.14. وتحديداً، نطبق الخوارزمية على $\{v_i\}$ فنحصل على قاعدة متعامدة $\{w_1,...,w_n\}$، ثم نناظم $\{w_i\}$ للحصول على قاعدة ناظمية التعامد $\{u_i\}$ لـ V. إن الخوارزمية المحدّدة تضمن أن كل w_k تركيبة خطية في $v_1,...,v_k$، وبالتالي تكون كل u_k تركيبة خطية في $v_1,...,v_k$.

189.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد من أجل الفضاء الجزئي في $\mathbf{R}^4$ المُوَلَّد بواسطة $v_1 = (1,1,1,1)$، $v_2 = (1,2,4,5)$، $v_3 = (1,-3,-4,-2)$.

■ نبحث أولاً عن قاعدة متعامدة لـ U باستخدام خوارزمية غرام ـ شميدت. نضع أولاً $w_1 = u_1 = (1,1,1,1)$، ثم نوجد

$$v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1, 2, 4, 5) - \tfrac{12}{4}(1, 1, 1, 1) = (-2, -1, 1, 2)$$

ونضع $w_2 = (-2,-1,1,2)$. فنجد

$$v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (1, -3, -4, -2) - \frac{-8}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{-7}{10}(-2, -1, 1, 2) = (\tfrac{8}{5}, -\tfrac{17}{10}, -\tfrac{13}{10}, \tfrac{7}{5})$$

نتخلص من الكسور، فنحصل على $w_3 = (16,-17,-13,14)$. [يستحسن، في الحسابات اليدوية، أن نتخلص من الكسور لأن ذلك لا يؤثر على التعامد]. أخيراً، نناظم القاعدة المتعامدة $w_1 = (1,1,1,1)$، $w_2 = (-2,-1,1,2)$، $w_3 = (16,-17,-13,14)$. إذن المتجهات التالية تشكل قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ U:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, -1, 1, 2) \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{910}}(16, -17, -13, 14)$$

190.14 لتكن القاعدة التالية للفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^3$: $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$. إستخدم خوارزمية غرام ـ شميدت لتحويل $\{v_i\}$ إلى قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_i\}$ لـ $\mathbf{R}^3$.

■ نضع أولاً $w_1 = v_1 = (1,1,1)$. ثم نحسب

$$v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0, 1, 1) - \tfrac{2}{3}(1, 1, 1) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

نتخلص من الكسور، فنحصل على $w_2 = (-2,1,1)$. نحسب بعدئذ

$$v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} = (0, 0, 1) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) - \tfrac{1}{6}(-2, 1, 1) = (0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

نتخلص من الكسور، فنحصل على $w_3 = (0,-1,1)$. نُنَاظِم $\{w_1,w_2,w_3\}$، فنحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد المطلوبة التالية:

$$\left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

191.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد للفضاء الجزئي W في $\mathbf{R}^5$، المولّد بواسطة: $v_1 = (1,1,1,0,1)$، $v_2 = (1,0,0,-1,1)$، $v_3 = (3,1,1,-2,3)$، $v_4 = (0,2,1,1,.-1)$.

■ أولاً، نضع $w_1 = u_1 = (1,1,1,0,1)$. ثم نحسب

$$v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{w_1^2} w_1 = (1,0,0,-1,1) - \tfrac{2}{4}(1,1,1,0,1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, \tfrac{1}{2})$$

نتخلص من الكسور، فنحصل على $w_2 = (1,-1,-1,-2,1)$. نحسب الآن

$$v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} = (3,1,1,-2,3) - \tfrac{8}{4}(1,1,1,0,1) - \tfrac{8}{8}(1,-1,-1,-2,1) = (0,0,0,0,0,0)$$

يبيِّن هذا أن v_3 تركيبة خطية في v_1 و v_2، وبالتالي نحذف v_3. نكوِّن الآن

$$v_4 - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (0,2,1,1,-1) - \frac{2}{4}(1,1,1,0,1) \frac{-6}{8}(1,-1,-1,-2,1) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4})$$

ثم نتخلص من الكسور، فنحصل على $w_3 = (1,3,-1,-2,-3)$. نناظم $\{w_1,w_2,w_3\}$ فنحصل على القاعدة ناظمية التعامد لـ W المطلوبة:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,0,1) \qquad u_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-1,-1,-2,1) \qquad u_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}(1,3,-1,-2,-3)$$

192.14 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات $f(t)$، بالجداء الداخلي $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ لتحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$.

■ نستخدم هنا حقيقة أنه إذا $r + s = n$، إذن

$$\langle t^r, t^s\rangle = \int_{-1}^{1} t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 2/(n+1) & \text{إذا n زوجية} \\ 0 & \text{إذا n فردية} \end{cases}$$

نضع أولاً $f_0 = 1$. ثم نحسب

$$f_1 = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = t - \frac{0}{2} \cdot 1 = t - \frac{0}{2} \cdot 1 = t$$

ثم نحسب

$$f_2 = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle} \cdot t = t^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}} \cdot t = t^2 - \tfrac{1}{3}$$

ثم نحسب أخيراً

$$f_3 = t^3 - \frac{\langle t^3, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle t^3, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t - \frac{\langle t^3, t^2 - \frac{1}{3}\rangle}{\langle t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3}\rangle}(t^2 - \tfrac{1}{3}) = t^3 - 0 \cdot 1 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} t - 0(t^2 - \tfrac{1}{3}) = t^3 - \tfrac{3}{5}t$$

وبذلك، تكون $\{1, t, t^2 - 1/3, t^3 - 3/5\,t\}$ مجموعة الحدوديات ناظمية ـ التعامد المطلوبة.

193.14 أوجد حدوديات لجاندر الأربع الأولى.

■ نأخذ مضاعفات الحدوديات المتعامدة المتحصل عليها في المسألة 192.14، بحيث أن $p(1) = 1$، من أجل أيّ حدودية

$p(t)$ في المجموعة. يعطينا هذا $\{1,t,1/2(3t^2-1),1/2(5t^3-3t)\}$. وهذه هي حدوديات لجاندر الأربع الأولى. [وهي حدوديات مهمة في دراسة المعادلات التفاضلية].

194.14 ليكن W فضاء جزئياً في فضاء جداء داخلي V. بيّن أنه توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ W تكون جزءاً من قاعدةٍ ناظمية التعامد لـ V.

■ نختار قاعدةً $\{v_1,\ldots,v_r\}$ لـ W ونوسعها إلى قاعدةٍ $\{v_1,\ldots,v_n\}$ لـ V؛ ثم نطبق خوارزمية غرام ـ شميدت على $\{v_1,\ldots,v_n\}$ فنحصل على قاعدةٍ ناظمية ـ التعامد $\{u_1,\ldots,u_n\}$ لـ V، حيث $u_i=a_{i1}v_1+\ldots+a_{ii}v_i$ من أجل كل $i=1,\ldots,n$. وبذلك، $u_1,\ldots,u_r\in W$، إذن تكون $\{u_1,\ldots,u_r\}$ قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ W.

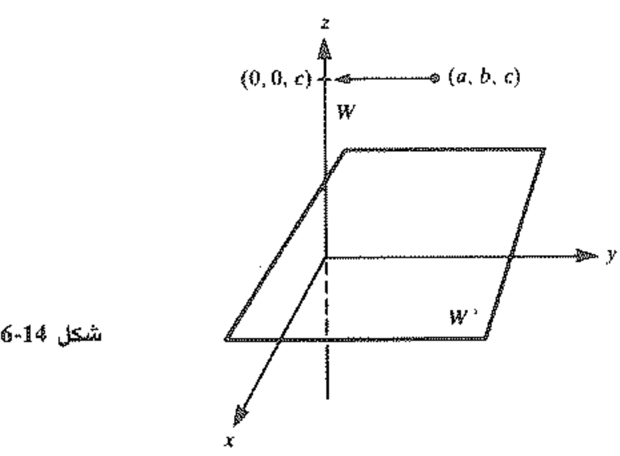
مبرهنة 11.14: ليكن W فضاءً جزئياً لـ V؛ إذن، $V=W\oplus W^\perp$.

195.14 أثبت مبرهنة 11.14.

■ نعرف، من المسألة 194.14، أنه توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_1,\ldots,u_r\}$ لـ W تكون جزءاً من قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_1,\ldots,u_n\}$ لـ V. بما أن $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ناظمية ـ التعامد، فإن $u_{r+1},\ldots,u_n\in W^\perp$. إذا $v\in V$، إذن $v=a_1u_1+\ldots+a_nu_n$ حيث $a_1u_1+\ldots+a_ru_r\in W$، $a_{r+1}u_{r+1}+\ldots+a_nu_n\in W^\perp$. ينتج عن ذلك $V=W+W^\perp$. من جهة أخرى، إذا $w\in W\cap W^\perp$، إذن $(w,w)=0$. يقود هذا إلى $w=0$؛ وبالتالي $W\cap W^\perp=\{0\}$. الشرطان $V=W+W^\perp$ و $W\cap W^\perp=\{0\}$ يعطيان معاً النتيجة المطلوبة: $V=W+W^\perp$ و $W\cap W^\perp=\{0\}$ يعطيان معاً النتيجة المطلوبة: $V=W\oplus W^\perp$. لاحظ أننا أثبتنا المبرهنة فقط من أجل V منتهِ البعد؛ ونلاحظ أن المبرهنة تظل صالحة في حالة فضاءات ذوات أبعاد إختيارية.

196.14 ليكن W فضاءً جزئياً في فضاء جداء داخلي V. عرّف تطبيق الإسقاط المتعامد لـ V فوق W، والذي نرمز له بـ E_W. ما هي صورة نواة E_W؟

■ ليكن $v\in V$. بما أن $V=W\oplus W^\perp$، إذن يوجد $w\in W$ و $w'\in W^\perp$ وحيدان، بحيث أن $v=w+w'$. نعرّف $E_W:V\to V$ بواسطة $E_w(v)=w$. هذا التطبيق E_w يسمى «الإسقاط المتعامد» لـ V فوق W؛ وهو خطي، ولدينا $Im(E_w)=W$ و $Ker(E_w)=W^\perp$.



شكل 6-14

197.14 ليكن W محور -z في R^3، أي $W=\{(0,0,c):c\in R\}$. ما هو $W^\perp$؟ أوجد تطبيق الإسقاط E_W.

■ $W^\perp$ هو المستوى -xy، أي $W^\perp=\{(a,b,0):a,b\in R\}$. [أنظر شكل 6-14]. أما تطبيق الإسقاط E_w لـ R^3 فوق W فيعطى بواسطة: $E_w(x,y,z)=(0,0,z)$.

مبرهنة 12.14: لنفترض أن $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$ مجموعة ناظمية ـ التعامد من متجهات في V. وليكن v أي متجه في V، و c_i معامل فورييه لـ v بالنسبة لـ u_i. إذن، $\sum_{k=1}^{r}c_k^2\le\|v\|^2$.

198.14 اثبت مبرهنة 12.14، المعروفة باسم «متباينة بِسَّل».

■ لاحظ أن $c_i = \langle v,u_i \rangle$، لأن $\|u_i\| = 1$. باستخدام $\langle u_i,u_j \rangle = 0$ من أجل $i \neq j$، نحصل على

$$0 \leq \left\langle v - \sum c_k u_k, v - \sum c_k, u_k \right\rangle = \langle v, v \rangle - 2\left\langle v, \sum c_k u_k \right\rangle + \sum c_k^2 = \langle v, v \rangle - \sum 2c_k \langle v, u_k \rangle + \sum c_k^2$$
$$= \langle v, v \rangle - \sum 2c_k^2 + \sum c_k^2 = \langle v, v \rangle - \sum c_k^2$$

وهذا يعطينا متباينتنا.

8.14 الجداءات الداخلية والمصفوفات المعرّفة موجبة

199.14 ليكن V فضاء جداء داخلي ولتكن $B = \{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لـ V. عرِّف المصفوفة A التي تعرِّف الجداء الداخلي على V بالنسبة للقاعدة B.

■ نعرِّف المصفوفة $A = (a_{ij})$ بواسطة $a_{ij} = \langle e_i,e_j \rangle$؛ أي

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle \cdots \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle \cdots \langle e_2, e_n \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle \langle e_n, e_2 \rangle \cdots \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

[ملاحظة: لاحظ أن A متناظرة لأن $\langle e_i,e_j \rangle = \langle e_j,e_i \rangle$ من أجل أي متجهين e_i و e_j للقاعدة، وبأن A تعتمد على الجداء الداخلي على V، وكذلك على قاعدة V.]

200.14 لتكن القاعدة $B = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (1,3,5)\}$ لـ $\mathbf{R}^3$. أوجد المصفوفة A التي تمثل الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة B.

■ نحسب: $\langle u_1,u_1 \rangle = 1 + 1 + 0 = 2$ ، $\langle u_1,u_2 \rangle = 1 + 2 + 0 = 3$ ، $\langle u_1,u_3 \rangle = 1 + 3 + 0 = 4$ ، $\langle u_2,u_2 \rangle = 1 + 4 + 9 = 14$ ، $\langle u_2,u_3 \rangle = 1 + 6 + 15 = 22$ ، $\langle u_3,u_3 \rangle = 1 + 9 + 25 = 35$.
إذن

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 14 & 22 \\ 4 & 22 & 35 \end{pmatrix}$$

201.14 لتكن القاعدة المعتادة $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ لـ $\mathbf{R}^3$. أوجد المصفوفة التي تمثل الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة المعتادة E.

■ لدينا $\langle e_1,e_1 \rangle = 1$ ، $\langle e_1,e_2 \rangle = 0$ ، $\langle e_1,e_3 \rangle = 0$ ، $\langle e_2,e_2 \rangle = 1$ ، $\langle e_2,e_3 \rangle = 0$ ، $\langle e_3,e_3 \rangle = 1$. إذن، المصفوفة المتطابقة I تمثل الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^3$ بالنسبة للقاعدة المعتادة E لـ $\mathbf{R}^3$.

ملاحظة: تظل النتيجة أعلاه صالحة من أجل أي قاعدة ناظمية التعامد $\{e_i\}$ لفضاء جداء داخلي V. أي أنه إذا $\langle e_i,e_j \rangle = \delta_{ij}$ ، فإن المصفوفة المتطابقة I تمثل الجداء الداخلي على V بالنسبه للقاعدة $\{e_i\}$.

202.14 لتكن القاعدة $B = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$ لـ $\mathbf{R}^2$. أوجد المصفوفة A_1 التي تمثل الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^2$ بالنسبة للقاعدة B.

■ نحسب $\langle v_1,v_1 \rangle = 1 + 9 = 10$ ، $\langle v_1,v_2 \rangle = 2 + 15 = 17$ ، $\langle v_2,v_2 \rangle = 4 + 25 = 29$. إذن $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix}$

المسائل 203.14-204.14 تتعلقان بالجداء الداخلي التالي على $\mathbf{R}^2$ (أنظر المسألة 18.14):
$\langle u,v \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ، حيث $u = (x_1,x_2)$ ، $v = (y_1,y_2)$.

203.14 أوجد المصفوفة A التي تمثل الجداء الداخلي على $\mathbf{R}^2$ المذكور بالنسبة للقاعدة المعتادة $\{(1,0),(0,1)\}$ لـ $\mathbf{R}^2$.

▩ نحسب $\langle(1,0),(1,0)\rangle = 1 - 0 - 0 + 1 = 1$ ، $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 0 - 1 - 0 + 0 = -1$ ، $\langle(0,1),(0,1)\rangle = 0 - 0 - 0 + 3 = 3$.

إذن $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

ملاحظة: بافتراض أن $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ متجهان عموديان، نلاحظ أن

$$u^TAv = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 = \langle u, v\rangle$$

[أنظر مبرهنة 3.14].

204.14 أوجد المصفوفة A_2 التي تمثل الجداء الداخلي على $\mathbf{R}^2$ المذكور بالنسبة للقاعدة $B = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$ لـ R^2. [قارن بالمسألة 202.14].

▩ نحسب $\langle(1,3),(1,3)\rangle = 1 - 3 - 3 + 27 = 22$ ، $\langle(1,3),(2,5)\rangle = 2 - 5 - 6 + 45 = 36$ ،

$\langle(2,5),(2,5)\rangle = 4 - 10 - 10 + 75 = 59$. إذن، $A_2 = \begin{pmatrix} 22 & 36 \\ 36 & 59 \end{pmatrix}$

ملاحظة: المسائل 202.1-204.14 تبين أن المصفوفة الممثلة لجداء داخلي تعتمد على القاعدة والجداء الداخلي على V.

مبرهنة 13.14: لتكن A المصفوفة الممثلة لجداء داخلي على V بالنسبة إلى قاعدة $B = \{e_1,\dots,e_n\}$. إذن، يكون لدينا $\langle u,v\rangle = [u]^TA[v]$ ، من أجل أي متجهين $u,v \in V$ ، حيث $[u]$ و $[v]$ يرمزان، على الترتيب، للمتجهين الإحداثيين [العموديين] لـ u و v بالنسبة للقاعدة B.

205.14 أثبت مبرهنة 13.14.

▩ لنفتـــــــــرض أن $A = (k_{ij})$، إذن $k_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. لنفتـــــــــرض أن $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$ و $v = b_1e_1 + b_2e + \dots + b_ne_n$. إذن،

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\langle e_i, e_j\rangle \qquad (1)$$

لدينا، من جهة أخرى، أن

$$[u]^TA[v] = (a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_ik_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_ik_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_ik_{in}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_jk_{ij} \qquad (2)$$

بما أن $k_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$، فإن المجموعتين النهائيين في (1) و (2) متساويان. إذن، $\langle u,v\rangle = [u]^TA[v]$.

المسائل 206.14-208.14 تتعلق بالفضاء المتجهي V للحدوديات $f(t)$ من الدرجة 2 فأقل، وبجداء داخلي معرّف بواسطة

$$\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$$

206.14 أوجد $\langle f,g\rangle$ حيث $f(t) = t + 2$ و $g(t) = t^2 - 3t + 4$.

▩ $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (t+2)(t^2 - 3t + 4)\, dt = \int_{-1}^{1} (t^3 - t^2 - 2t + 8)\, dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - t^2 + 8t\right]_{-1}^{1} = \frac{46}{3}$$

207.14 أوجد المصفوفة A للجداء الداخلي بالنسبة للقاعدة $\{1, t, t^2\}$ لـ V.

▩ نستخدم هنا حقيقة أنّه إذا $r + s = n$، إذن

$$\langle t^r, t^s\rangle = \int_{-1}^{1} t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 2/(n+1) & \text{إذا } n \text{ زوجية} \\ 0 & \text{إذا } n \text{ فردية} \end{cases}$$

وبالتالي، $\langle 1,1\rangle = 2$ ، $\langle 1,t\rangle = 0$ ، $\langle 1,t^2\rangle = 2/3$ ، $\langle t,t\rangle = 2/3$ ، $\langle t,t^2\rangle = 0$ ، $\langle t^2,t^2\rangle = 2/5$. وبذلك

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

208.14 حقق مبرهنة 208.14 بأن $\langle f,g\rangle = [f]^T A[g]$ بالنسبة للقاعدة $\langle 1,t,t^2\rangle$.

■ لدينا $[f]^T = (2,1,0)$ و $[g]^T = (4,-3,1)$ بالنسبة للقاعدة المعطاة. إذن

$$[f]^T A[g] = (2,1,0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = (4, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3})\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{46}{3} = \langle f, g\rangle$$

209.14 عرِّف مصفوفة معرّفة ـ موجبة.

■ تكون مصفوفة مربعة A معرّفة ـ موجبة إذا كانت A متناظرة، وإذا $X^TAX > 0$، من أجل أي متجه غير صفري X.

مبرهنة 14.14: لتكن A مصفوفة تمثل جداءً داخلياً على V بالنسبة لأي قاعدة $B = \{e_i\}$. إذن، تكون A معرّفة ـ موجبة.

210.14 أثبت مبرهنة 14.14.

■ A متناظرة، لأن $\langle e_i,e_j\rangle = \langle e_j,e_i\rangle$. وليكن X أي متجه غير ـ صفري في $\mathbf{R}^n$. إذن $[u] = X$، من أجل متجهٍ غير ـ صفري $u \in V$. باستخدام مبرهنة 13.14، يكون لدينا $X^TAX = [u]^TA[u] = \langle u,u\rangle > 0$. إذن، تكون A معرّفة موجبة.

مبرهنة 15.14: لتكن A مصفوفة مربعة n- معرّفة موجبة. عرِّف $\langle u,v\rangle_A = u^TAv$ من أجل أي متجهين $u,v \in \mathbf{R}^n$. إذن، يكون $\langle,\rangle_A$ جداءً داخلياً على $\mathbf{R}^n$، أي أن $\langle,\rangle_A$ يحقق الموضوعات $[RIP_1]$ و $[RIP_2]$ و $[RIP_3]$. [تبسيطاً للترميز، سوف نحذف الدليل السفلي A من الرمز $\langle,\rangle_A$.]

211.14 بيِّن أن $\langle,\rangle$ تحقق $[RIP_1]$.

■ لدينا، من أجل أي متجهات u_1، u_2، و v، أن

$\langle v_1 + u_2,v\rangle = (u_1 + u_2)^TAv = (u_1^T + u_2^T)Av = u_1^TAv + u_2^TAv = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ ؛ ولدينا $\langle ku,v\rangle = \langle ku,v\rangle = (ku)^TAv = ku^TAv = k\langle u,v\rangle$. من أجل أي سلّمي k وأي متجهين v، u. إذن، يحقق $\langle,\rangle$ الموضوعة $[RIP_1]$.

212.14 بيِّن أن $\langle,\rangle$ يحقق $[RIP_2]$.

■ بما أن u^TAv عدد سلّمي، إذن $(u^TAv)^T = u^TAv$. لدينا أيضاً $A^T = A$، لأن A متناظرة. لذلك، $\langle u,v\rangle = u^TAv = (u^TAv)^T = v^TA^Tu^{TT} = v^TAu = \langle v,u\rangle$. إذن، $\langle,\rangle$ يحقق $[RIP_2]$.

213.14 بيِّن أن $\langle,\rangle$ يحقق $[RIP_3]$.

■ بما أن A معرّفة ـ موجبة، إذن $X^TAX > 0$ من أجل أي متجه غير ـ صفري $x \in \mathbf{R}^n$. وبالتالي، يكون لدينا $\langle v,v\rangle = v^TAv > 0$. من أجل أي متجه غير ـ صفري v. إذن، $\langle,\rangle$ يحقق $[RIP_3]$.

214.14 لنفترض أن A و B مصفوفتان معرّفتان ـ موجبتان. بيِّن أن $A + B$ مصفوفة معرّفة ـ موجبة.

■ بما أن A و B متناظرتان، إذن $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$، وبالتالي تكون $A + B$ متناظرة. لدينا أيضاً، من أجل أي متجه غير صفري X، $X^TAX > 0$ و $X^TBX > 0$. إذن، $X^T(A + B)X = X^TAX + X^TBX > 0$. ينتج عن ذلك أن $A + B$ معرّفة ـ موجبة.

215.14 لنفترض أن A معرّفة ـ موجبة و $k > 0$. بيِّن أن kA مصفوفة معرّفة ـ موجبة أيضاً.

■ لدينا $(kA)^T = kA^T = kA$، وبذلك تكون kA متناظرة. لدينا أيضاً، من أجل أي متجه غير صفري X، أن $X^TAX > 0$؛ وبالتالي، $X^T(kA)X = k(X^TAX) > 0$. إذن، تكون kA معرّفة ـ موجبة.

216.14 لنفترض أن B مصفوفة حقيقية غير ـ شاذة. بيِّن أن B^TB مصفوفة معرّفة ـ موجبة.

■ لدينا $(B^TB)^T = B^TB^{TT} = B^TB$، إذن، B^TB متناظرة. لنفترض أن X متجه غير ـ صفري في $\mathbf{R}^n$. بما أن B غير شاذة، فإن BX يكون غير صفري أيضاً. وبالتالي، $\langle BX,BX\rangle>0$ [للجداء الداخلي العادي في $\mathbf{R}^n$]. بالتالي $X^T(B^TB)X = (BX)^T(BX) = \langle BX,BX\rangle > 0$. وبذلك، تكون B^TB معرّفة ـ موجبة.

9.14 فضاءات الجداء الداخلي العقدية

ندرس في هذا القسم الفضاءات المتجهية فوق الحقل العقدي C. نذكِّر أولاً ببعض خواص الأعداد العقدية. لنفترض أن $z \in C$، أي $z = a + bi$ حيث $a,b \in R$. إذن، $\bar{z} = a - bi$ ، $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ، و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. لدينا أيضاً، من أجل أي $z, z_1, z_2 \in C$، $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ، $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ، $\bar{\bar{z}} = z$ ، ويكون z حقيقياً إذا وفقط إذا $\bar{z} = z$.

217.14 عرّف جداءً داخلياً عقدياً وفضاء جداء داخلي عقدي V.

■ لنفترض أننا نقرن بكل زوج متجهات $u,v \in V$ عدداً عقدياً، نرمز له بـ $\langle u,v\rangle$. إذن، نقول أن هذه الدالة $\langle,\rangle$ تكون «جداءً داخلياً عقدياً» على V إذا حققت الموضوعات التالية [حيث $u_1,u_2,u,v \in V$، $a,b,k \in C$]:

$[CIP_1]$ (خاصية الخطية) $\langle au_1 + bu_2,v\rangle = a\langle u_1,v\rangle + b\langle u_2,v\rangle$، أو بشكل بديل (أ) $\langle u_1 + u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ و (ب) $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$.

$[CIP_2]$ (خاصية التناظر المرافق) $\langle u, v\rangle = \langle \overline{v, u}\rangle$.

$[CIP_3]$ (خاصية موجبية التعريف) إذا $u \neq 0$ إذن $\langle u,u\rangle > 0$.

ويطلق على الفضاء المتجهي العقدي V المزود بجداء داخلي اسم «فضاء جداء داخلي عقدي».

ملاحظة: لاحظ أن فضاء جداء داخلي عقدي لا يختلف إلا قليلاً عن فضاء جداء داخلي حقيقي [الموضوعة $[CIP_2]$ وحدها تختلف عن $[RIP_2]$]. وفي الحقيقة، كثيرة هي تعريفات وخواص فضاء جداء داخلي عقدي التي تماثل مقابلاتها في فضاء داخلي حقيقي. ولكن، بعض البراهين يجب أن تكيَّف للحالة العقدية.

218.14 بيِّن أن $\langle v,0\rangle = 0 = \langle 0,v\rangle$، من أجل v في V. [هكذا، وبشكل خاص، $\langle 0,0\rangle = 0$.] [قارن بالمسألة 2.14]

■ $\langle 0,v\rangle = \langle 0v,v\rangle = 0\langle v,v\rangle = 0$. لدينا أيضاً $\langle v, 0\rangle = \overline{\langle 0, v\rangle} = \bar{0} = 0$.

219.14 بيِّن أن $\langle u, kv\rangle = \bar{k}\langle u, v\rangle$. [بتعبير آخر، يجب أن نأخذ مرافق عدد عقدي عند إخراجه من الموضع الثاني في الجداء الداخلي].

■ $\langle u, kv\rangle = \overline{\langle kv, u\rangle} = \overline{k\langle v, u\rangle} = \bar{k}\,\overline{\langle v, u\rangle} = \bar{k}\,\overline{\overline{\langle u, v\rangle}} = \bar{k}\langle u, v\rangle$

220.14 حقق العلاقة $\langle u, av_1 + bv_2\rangle = \bar{a}\langle u, v_1\rangle + \bar{b}\langle u, v_2\rangle$.

■ $\langle u, av_1 + bv_2\rangle = \overline{\langle av_1 + bv_2, u\rangle} = \overline{a\langle v_1, u\rangle + b\langle v_2, u\rangle} = \bar{a}\,\overline{\langle v_1, u\rangle} + \bar{b}\,\overline{\langle v_2, u\rangle} = \bar{a}\langle u, v_1\rangle + \bar{b}\langle u, v_2\rangle$

ملاحظة: يمكننا إثبات، وبشكل مماثل، أن

$$\langle a_1u_1 + a_2u_2, b_1v_1 + b_2v_2\rangle = a_1\bar{b}_1\langle u_1, v_1\rangle + a_1\bar{b}_2\langle u_1, v_2\rangle + a_2\bar{b}_1\langle u_2, v_1\rangle + a_2\bar{b}_2\langle u_2, v_2\rangle$$

ويمكننا بالاستقراء إثبات أن

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iu_i, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j\right\rangle = \sum_{i,j} a_i\bar{b}_j\langle u_i, v_j\rangle$$

[قارن بالمسألة 68.14].

أعطينا، في المسائل 221.14-223.14، أن $\langle u,v\rangle = 3 + 2i$.

221.14 أوجد $\langle (2-4i)u, v\rangle$

$\langle (2-4i)u, v\rangle = (2-4i)\langle u, v\rangle = (2-4i)(3+2i) = 14-4i$.

222.14 أوجد $\langle u, (4+3i)v\rangle$.

■ $\langle u, (4+3i)v\rangle = \overline{(4+3i)}\langle u, v\rangle = (4-3i)(3+2i) = 18-i$.

223.14 أوجد $\langle (3-6i)u, (5-2i)v\rangle$.

■ $\langle (3-6i)u, (5-2i)v\rangle = (3-6i)\overline{(5-2i)}\langle u, v\rangle = (3-6i)(5+2i)(3+2i) = 137-30i$.

224.14 تفترض الموضوعة $[CIP_3]$ أن $\langle u,u\rangle$ عدد حقيقي. بيِّن أن هذه الحقيقة تنتج مباشرة من $[CIP_2]$. أيضاً، عرِّف طول أو نظيم متجه u في فضاء جداء داخلي عقدي V.

■ نجد، من $[CIP_2]$ أن $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$. لذلك، فإن $\langle u,u\rangle$ يجب أن يكون حقيقياً . نعرف ، من $[CIP_3]$ ، أن $\langle u,u\rangle$ يجب أن يكون غير ـ سالب، وبالتالي يكون جذره الحقيقي الموجب موجوداً. وكما في حالة فضاءات الجداء الداخلي الحقيقية، نعرِّف طول أو نظيم u بواسطة $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

ملاحظة: بالاضافة إلى النظيم، نعرِّف مفاهيم التعامد، والمتممة المتعامدة، والمجموعات المتعامدة وناظمية ـ التعامد، وذلك كما سبق. وفي الحقيقة، فإن تعريفات المسافة ومعامل فورييه والإسقاط هي نفسها كما في الحالة الحقيقية.

225.14 عرِّف الجداء الداخلي النمطي (أو المعياري) أو المعتاد في $\mathbf{C}^n$ وبيِّن أن هذا التعريف يختزل إلى التعريف المماثل في $\mathbf{R}^n$ عندما تكون كل المداخل حقيقية.

■ ليكن $u = (z_i)$ و $v = (w_i)$ متجهين في $\mathbf{C}^n$. إذن، يكون $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n$ الجداء الداخلي النمطي (أو المعياري) أو المعتاد في $\mathbf{C}^n$. [سوف نفترض دائماً هذا الجداء الداخلي، إلاّ إذا ذكر أو فهم غير ذلك]. إذا كانت مداخل u و v حقيقية، فإن $\bar{w}_k = w_k$ ؛ وبالتالي، $\langle u, v\rangle = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n = z_1w_1 + z_2w_2 + \cdots + z_nw_n$، وهو نفس التعريف من أجل $\mathbf{R}^n$.

ملاحظة: بافتراض u و v متجهين عموديين، يمكن كتابة الجداء الداخلي أعلاه في الشكل $\langle u, v\rangle = u^T\bar{v}$، حيث يرمز $u^T\bar{v}$ لجداء منقول u^T ، لـ u، و $\bar{v}$ (مرافق v) تحت عملية الضرب، مثلاً،

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = (z_1, z_2, z_3)\begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{pmatrix} = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$$

226.14 عرِّف الجداء الداخلي المعتاد فوق كل واحد من الفضاءين المتجهيين العقديين التاليين (أ) الفضاء المتجهي U للمصفوفات m×n فوق $\mathbf{C}$. (ب) الفضاء المتجهي V للدوال العقدية المستمرة على الفترة (الحقيقية) $a \leqslant t \leqslant b$.

■ (أ) ما يلي هو الجداء الداخلي المعتاد على U: $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$. وكما العادة، ترمز B^* إلى المنقولة المرافقة للمصفوفة B. (ب) وما يلي هو الجداء الداخلي المعتاد على V: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

المسائل 227.14-231.14 تتعلق بالمتجهين $u = (1-i, 2+3i)$ و $v = (2-5i, 3-i)$ في $\mathbf{C}^2$.

227.14 أوجد $\langle u,v\rangle$.

■ تذكر أن مرافق المتجه الثاني يظهر في الجداء الداخلي

$\langle u, v\rangle = (1-i)\overline{(2-5i)} + (2+3i)\overline{(3-i)} = (1-i)(2+5i) + (2+3i)(3+i) = 7+3i+3+11i = 10+14i$

228.14 أوجد $\langle v,u\rangle$.

■ $\langle v, u\rangle = (2-5i)\overline{(1-i)} + (3-i)\overline{(2+3i)} = (2-5i)(1+i) + (3-i)(2-3i) = 7-3i+3-11i = 10-14i$.

وكما هو متوقع من $[CIP_2]$، فإن $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$.

229.14 أوجد $\|u\|$.

▩ تذكر أن $z\bar{z}=a^2+b^2$ عندما $z=a+bi$. إستخدم $\|u\|^2=\langle u,u\rangle=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+\cdots+z_n\bar{z}_n$، حيث $u=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$. إحسب $\|u\|^2=1^2+(-1)^2+2^2+3^2=1+1+2+9=13$ أو $\|u\|=\sqrt{13}$.

230.14 أوجد $\|v\|$.

▩ $\|v\|^2=4+25+9+1=39$، وبذلك $\|v\|=\sqrt{39}$.

231.14 أوجد $d(u,v)$، المسافة بين u و v.

▩ نذكّر بأن $d(u,v)=\|u-v\|$. نوجد أولاً $u-v=(-1+4i,-1+4i)$. إذن، $\|u-v\|^2=1+16+1+16=34$؛ وبالتالي، $d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{34}$.

232.14 أوجد معامل فورييه (أو المركبة) c للمسقط cw لـ $v=(3+4i,2-3i)$ على طول $w=(5+i,2i)$ في C^2.

▩ تذكر أن $c=\langle v,w\rangle/\langle w,w\rangle$، ثم إحسب

$$\langle v,w\rangle=(3+4i)(\overline{5+i})+(2-3i)(\overline{2i})=(3+4i)(5-i)+(2-3i)(-2i)=19+17i-6-4i=13+13i$$

$$\langle w,w\rangle=25+1+4=30$$

إذن، $c=(13+13i)/30=13/30+13i/30$. ينتج عن ذلك أن $cw=(26/15+39i/15,\ -13/15+i/15)$.

مبرهنة 16.14 (كوشي ـ تشفارتز): $|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\|v\|$.

233.14 أثبت مبرهنة 16.14 من أجل فضاء الجداء الداخلي العقدي V.

▩ إذا $v=0$، تختزل المتباينة إلى $0\leqslant 0$، وبالتالي تكون صالحة. نفترض الآن أن $v\neq 0$. نفك $\|u-\langle u,v\rangle tv\|^2\geqslant 0$، حيث t أي قيمة حقيقية، وذلك باستخدام $z\bar{z}=\|z\|^2$ و $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ (من أجل أي عدد عقدي z):

$$\begin{aligned}0\leq\|u-\langle u,v\rangle tv\|^2&=\langle u-\langle u,v\rangle tv,\ u-\langle u,v\rangle tv\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}t\langle u,v\rangle-\langle u,v\rangle t\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle\overline{\langle u,v\rangle}t^2\langle v,v\rangle\\&=\|u\|^2-2t|\langle u,v\rangle|^2+|\langle u,v\rangle|^2t^2\|v\|^2\end{aligned}$$

نضع $t=1/\|v\|^2$ فنجد $0\leqslant\|u\|^2-(|\langle u,v\rangle|^2/\|v\|^2)$، ومنها $|\langle u,v\rangle|^2\leqslant\|u\|^2\|v\|^2$. بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، نحصل على المتباينة المطلوبة.

234.14 أوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد للفضاء الجزئي W في C^3 المولّد بواسطة $v_1=(1,i,0)$ و $v_2=(1,2,1-i)$.

▩ نطبق خوارزمية غرام ـ شميدت. نضع $w_1=v_1=(1,i,0)$. نحسب

$$v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|}w_1=(1,2,1-i)-\frac{1-2i}{2}(1,i,0)=(\tfrac{1}{2}+i,1-\tfrac{1}{2}i,1-i)$$

نضرب في 2 للتخلص من الكسور، فنحصل على $w_2=(1+2i,2-i,2-2i)$. نوجد بعدئذ $\|w_1\|=\sqrt{2}$ و $\|w_2\|=\sqrt{18}$. نناظم $\{w_1,w_2\}$ فنحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد التالية من أجل W:

$$\left\{u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}},0\right),\ u_2=\left(\frac{1+2i}{\sqrt{18}},\frac{2-i}{\sqrt{18}},\frac{2-2i}{\sqrt{18}}\right)\right\}$$

فيما يلي قائمة بخواص فضاء جداء داخلي عقدي V، وهي مماثلة لخواص فضاءات الجداءات الداخلية الحقيقية، والتي تشبه براهينها تلك البراهين في الحالة الحقيقية، لذلك حُذفتْ.

مبرهنة 17.14: ليكن W فضاءً جزئياً في فضاء جداء داخلي عقدي V إذن، $V=W\oplus W$.

توطئة 18.14: لتكن $\{e_1,\ldots,e_n\}$ قاعدة ناظمية التعامد لـ V. إذن:

(أ) $u=\langle u,e_1\rangle e_1+\langle u,e_2\rangle e_2+\ldots+\langle u,e_n\rangle e_n$، من أجل أي $u\in V$.

(ب) $\langle a_1e_1+\cdots+a_ne_n, b_1e_1+\cdots+b_ne_n\rangle = a_1\bar{b}+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n$.

(ج) $\langle u,v\rangle = \langle u,e_1\rangle\overline{\langle v,e_1\rangle}+\cdots+\langle u,e_n\rangle\overline{\langle v,e_n\rangle}$. من أجل أي $u,v\in V$.

(د) إذا كان $T: V\to V$ خطياً، فإن $\langle T(e_j),e_i\rangle$ يكون المدخل ij في المصفوفة A الممثلة لـ T في القاعدة المعطاة $\{e_i\}$.

مبرهنة 19.14: لتكن $\{u_1,...,u_n\}$ قاعدة لـ V. ولتكن $A=(a_{ij})$ المصفوفة العقدية المعرّفة بـ $a_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle$. إذن، $\langle u,v\rangle = [u]^TA[\bar{v}]$ من أجل $u,v\in V$، حيث [u] و [v] المتجهان الإحداثيان العقديان في القاعدة المعطاة $\{u_i\}$. [ملاحظة: نقول أن هذه المصفوفة A تمثل الجداء الداخلي على V].

مبرهنة 20.14: لتكن A مصفوفة هرميتية [أي أن $A^*=\bar{A}^T=A$] بحيث يكون $X^TA\bar{X}$ حقيقياً. موجباً من أجل كل متجه غير ـ صفري $X\in C^n$. إذن، يكون $\langle u,v\rangle = u^TA\bar{v}$ جداءً داخلياً على C^n.

مبرهنة 21.14: لتكن A المصفوفة التي تمثل جداء داخلياً على V. إذن، تكون A هرميتية، ويكون X^TAX حقيقياً موجباً من أجل أي متجه غير صفري في C^n.

10.14 الفضاءات المتجهية النظيمية

235.14 ليكن V فضاءً متجهياً حقيقياً أو عقدياً. لنفترض اننا نقرن بكل $v\in V$ عدداً حقيقياً، نرمز له بـ $\|v\|$. تسمى هذه الدالة $\|.\|$ «نظيماً» على V، إذا حققت الموضوعات التالية [حيث $u,v\in V$، $k\in K$]:

$[N_1]$ $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$.

$[N_2]$ $\|kv\|=|k|\|v\|$.

$[N_3]$ إذا $v\neq 0$، إذن $\|v\|>0$.

ويسمى الفضاء المتجهي V المزود بالنظيم «الفضاء المتجهي النظيمي».

236.14 أثبت أن $\|0\|=0$.

■ $\|0\|=\|0v\|=0\|v\|=0$.

237.14 بيِّن أن كل فضاء جداء داخلي يكون فضاءً متجهياً نظيمياً.

■ إن النظيم على V المعرّف بواسطة $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ يحقق الموضوعات $[N_1]$، $[N_2]$، $[N_3]$. [انظر المسائل 93.14-95.14]. وبذلك يكون V فضاءً متجهياً نظيمياً.

238.14 عرِّف المسافة في فضاء متجهي نظيمي V.

■ يرمز للمسافة بين متجهين $u,v\in V$ وتعرّف بواسطة $d(u,v)=\|u-v\|$.

المسائل 239.14-241.14 تبين أن $d(u,v)$ تحقق الموضوعات الثلاث التالية لفضاء متري:

$[M_1]$ إذا $u\neq v$ إذن $d(u,v)>0$ و $d(u,u)=0$.

$[M_2]$ $d(u,v)=d(v,u)$.

$[M_3]$ $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(w,v)$.

239.14 بيِّن أنه إذا $u\neq v$، فإن $d(u,v)>0$ و $d(u,u)=0$.

■ إذا $u\neq v$، إذن $u-v\neq 0$، وبالتالي $d(u,v)=|(u-v)|>0$. كما أن $d(u,u)=\|u-u\|=\|0\|=0$.

240.14 بيِّن أن $d(u,v)=d(v,u)$.

■ $d(u,v)=\|u-v\|=\|-1(v-u)\|=|-1|\|v-u\|=\|v-u\|=d(v,u)$.

241.14 بيِّن أن $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$.

■ $d(u,v) = \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \leqslant \|u - w\| + \|w - v\| = d(u,w) + d(w,v)$.

سوف نستخدم - في هذا القسم - النظيمات الثلاثة التالية على $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$:

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \max(|a_i|)$$
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}$$

إن النظيمات $\|.\|_\infty$ ، $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ تسمى على الترتيب «النظيم - اللاّنهائي» والنظيم - واحد، والنظيم - إثنان. لاحظ أن $\|.\|_2$ هو النظيم على $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ المُدْخَل بواسطة الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$. [وسوف نرمز بـ d_∞ و d_2 و d_3، على الترتيب، لدوال المسافة المقابلة لها).

المسائل 242.14-245.14 تتعلق بالمتجهين $u = (1,3,-6,4)$ و $v = (3,-5,1,-2)$ في $\mathbf{R}^4$.

242.14 أوجد $\|u\|_\infty$ و $\|v\|_\infty$.

■ النظيم - اللاّنهائي يختار أعظمي القيم المطلقة للمتجهات. إذن، $\|u\|_\infty = 6$ و $\|v\| = 5$.

243.14 أوجد $\|u\|_1$ و $\|v\|_1$.

■ النظيم - واحد يجمع القيم المطلقة للمتجهات. إذن، $\|u\|_1 = 1 + 3 + 6 + 4 = 14$ ، $\|v\|_1 = 3 + 5 + 1 + 2 = 11$.

244.14 أوجد $\|u\|_2$ و $\|v\|_2$.

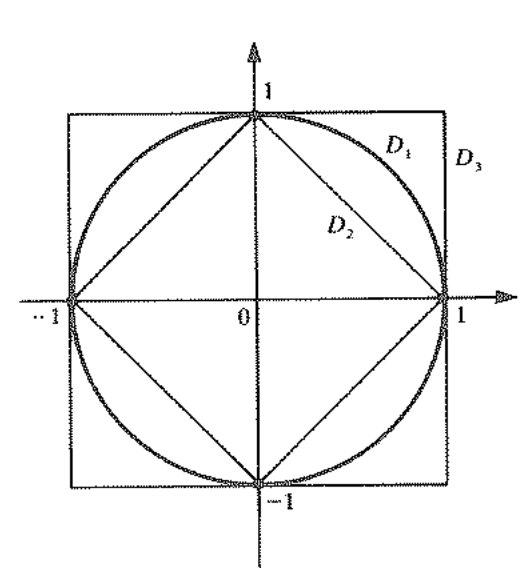
■ النظيم - إثنان يساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعات المركبات [أي النظيم المكوّن بواسطة الجداء الداخلي المعتاد على $\mathbf{R}^4$]. إذن، $\|u\|_2 = \sqrt{1 + 9 + 36 + 16} = \sqrt{62}$ و $\|v\|_2 = \sqrt{9 + 25 + 1 + 4} = \sqrt{39}$.

245.14 أوجد $d_\infty(u,v)$، $d_1(u,v)$، $d_2(u,v)$.

■ نوجد أولاً $u - v = (-2,8,-7,6)$. ثم نحسب $d_\infty(u,v) = \|u - v\|_\infty = 8$،
$d_1(u,v) = \|u - v\|_1 = 2 + 8 + 7 + 6 = 23$، $d_2(u,v) = \|u - v\|_2 = \sqrt{4 + 64 + 49 + 36} = \sqrt{153}$.

246.14 لتكن D_1 مجموعة النقط $u = (x,y)$ في $\mathbf{R}^2$، التي تحقق $\|u\|_2 = 1$. أرسم (نقطةً نقطة) D_1 في المستوى الإحداثي $\mathbf{R}^2$.

■ نرسم النقط (x,y) بحيث أن $\|u\|_2^2 = x^2 + y^2 = 1$. وبذلك، تكون D_1 دائرة الوحدة كما موضحة في شكل 7-14.



شكل 7-14

247.14 لتكن D_2 مجموعة النقط $u = (x,y)$ في $\mathbf{R}^2$، التي تحقق $\|u\|_1 = 1$. أرسم D_2 في المستوى الإحداثي $\mathbf{R}^2$.

■ أرسم النقط (x,y) بحيث أن $\|u\|_1 = |x| + |y| = 1$. إذن، تكون D_2 المعيَّن المرسوم داخل دائرة الوحدة كما في الشكل 14-7.

248.14 لتكن D_3 مجموعة النقط $u = (x,y)$ في $\mathbf{R}^2$ بحيث أن $\|u\|_\infty = 1$. أرسم D_3 في المستوى الإحداثي $\mathbf{R}^2$.

■ نرسم النقط (x,y) بحيث أن $\|u\|_\infty = \max(|x|,|y|) = 1$. وبذلك، تكون D_3 المربع المحيط بدائرة الوحدة كما في الشكل 14-7.

المسائل 14.249-14.252 تتعلق بالمتجهين $u = (5-2i, 3+4i)$ و $v = (2+i, 2-3i)$ في $\mathbf{C}^2$.

249.14 أوجد $\|u\|_1$ و $\|v\|_1$.

■ $\|u\|_1 = |5-2i| + |3+4i| = \sqrt{29} + 5$ $\|v\|_1 = |2+i| + |2-3i| = \sqrt{5} + \sqrt{13}$

250.14 أوجد $\|u\|_\infty$ و $\|v\|_\infty$.

■ $\|u\|_\infty = \max(|5-2i|, |3+4i|) = \max(\sqrt{29}, 5) = \sqrt{29}$ ، $\|v\|_\infty = \max(|2+i|, |2-3i|) = \max(\sqrt{5}, \sqrt{13}) = \sqrt{13}$.

251.14 أوجد $\|u\|_2$ و $\|v\|_2$.

■ $\|u\|_2^2 = |5-2i|^2 + |3+4i|^2 = 29 + 25 = 54$ ؛ وبذلك $\|u\|_2 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
$\|v\|_2^2 = |2+i|^2 + |2-3i|^2 = 5 + 13 = 18$ ؛ وبذلك $\|v\|_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

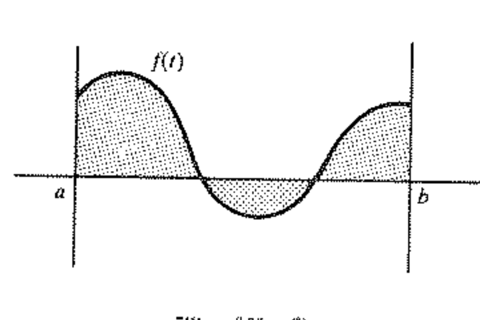
252.14 أوجد $d_1(u,v)$، $d_\infty(u,v)$، و $d_2(u,v)$.

■ نوجد أولاً $u - v = (3-3i, 1+7i)$، ثم نحسب $d_1(u,v) = |3-3i| + |1+7i| = \sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$، $d_\infty(u,v) = \max(|3-3i|, |1+7i|) = \max(3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$، وبذلك، $\|u-v\|^2 = 9 + 9 + 1 + 49 = 68$ ؛ وبذلك، $d_2(u,v) = \sqrt{68}$.

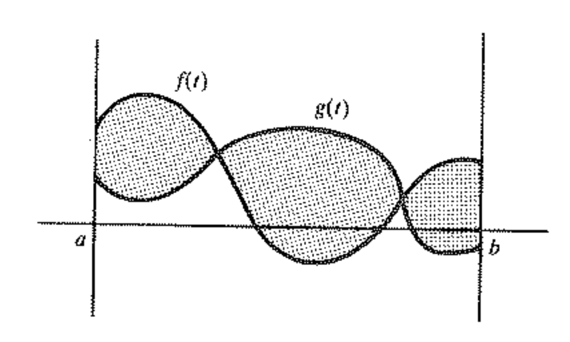
المسألتان 14.253-14.254 تتعلقان بالفضاء المتجهي للدوال المستمرة على الفترة $a \leqslant t \leqslant b$.

253.14 يعرِّف ما يلي نظيماً على V: $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\, dt$. (إن هذا النظيم مشابه للنظيم $\|\cdot\|_1$ على $\mathbf{R}^n$.) أعط وصفاً هندسياً لـ $\|f\|$ وللمسافة $d(f,g)$.

■ إن $\|f\|$، وكما موضح في الشكل 14-8، هو المساحة المحصورة بين الدالة $|f|$ ومحور -t؛ أما $d(f,g)$ فهي المساحة بين الدالتين f و g.



(أ) $\|f\|$ مظللة

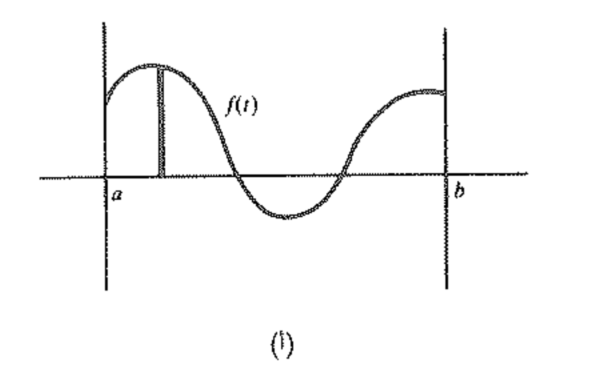


(ب) $d(f,g)$ مظللة

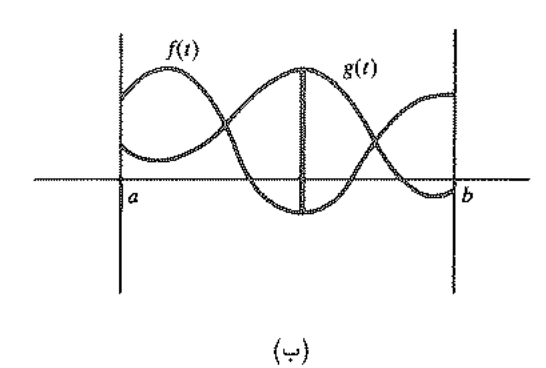
شكل 14-8

254.14 يعرِّفُ ما يلي نظيماً على V: $\|f\| = \max(|f(t)|)$. [هذا النظيم يشبه النظيم $\|.\|_\infty$ على $\mathbb{R}^n$]. أعط وصفاً هندسياً لـ $\|f\|$ ولدالة المسافة $d(f,g)$.

■ يوضح شكل 14-9 أن $\|f\|$ هو المسافة العظمى بين f ومحور -x؛ أما $d(f,g)$ فهي المسافة العظمى بين f و g.



(أ)



(ب)

شكل 14-9

الفصل 15
الحدوديات فوق حقل

يبحث هذا الفصل في الحلقة $K[t]$ للحدوديات فوق حقلٍ K، ويبين أن لـ $K[t]$ خواصّاً عديدة مشابهة لخواص الأعداد الصحيحة. تلعب هذه النتائج دوراً مهماً في الحصول على الأشكال القانونية من أجل مؤثر خطي T على فضاء متجهي V فوق K.

1.15 حلقة الحدوديات

1.15 عرّف حدودية فوق حقلٍ K، وكذلك درجتها.

■ ليكن K حقلاً. صوريًا، نعرّف حدوديةً f فوق K بأنها متتالية لانهائية من عناصر في K، بحيث أن كلها باستثناء عدد محدود منها تُساوي 0: $f=(\ldots,0,a_n,\ldots,a_1,a_0)$. أو بشكل بديل، وباستخدام رمز، وليكن t، كمتغير، نكتب الحدودية أعلاه عادة في الشكل $f(t)=a_nt^n+\ldots+a_1t+a_0$. المدخل a_k يسمى المعامل الكائي لـ f. إذا كان n أكبر عدد صحيح يكون من أجله $a_n\neq 0$، فإننا نقول عندئذ أن «درجة» f تكون n، ونكتب $\deg f=n$، كما نُسمي a_n «المعامل الرئيسي» لـ f: وإذا كان $a_n=1$، فإننا نقول أن f «حدودية واحدية المعامل الرئيسي». من جهة أخرى، إذا كان كل معامل في f صفرياً فإننا نسمّي f «الحدودية الصفرية»، ونكتبها $f=0$. أما درجة الحدودية الصفرية فليست معرّفة.

2.15 عرّف حلقة الحدوديات فوق الحقل K.

■ ليكن $K[t]$ تجميع كل الحدوديات $f(t)$. نعرّف الجمع والضرب في $K[t]$ كما يلي: لنفترض أن f الحدودية في المسألة 1.15، وأن g حدودية أخرى فوق K، لتكن $g(t)=b_mt^m+\ldots+b_1t+b_0$. إذن، نتحصل على المجموع $f+g$ بجمع المعـــامـــلات المتقـــابلـــة. أي إذا $m\leqslant n$، إذن

$f(t)+g(t)=a_nt^n+\ldots+(a_m+b_m)t^m+\ldots+(a_1+b_1)t+(a_0+b_0)$ أو $[f+g=(\ldots,0,a_n,\ldots,a_m+b_m,\ldots,a_1+b_1,a_0+b_0)]$

كما نعرّف جداء f و g بأنه الحدودية

$f(t)g(t)=a_nb_mt^{n+m}+\ldots+(a_1b_0+a_0b_1)t+a_0b_0$ أو $[fg=(\ldots,0,a_nb_m,\ldots,a_1b_0+a_0b_1,a_0b_0)]$

أي أن المعامل الكائي c_k لـ fg يكون $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0$. وتطبق هنا مبرهنة 1.15.

مبرهنة 1.15: تكون $K[t]$، تحت عمليتي الجمع والضرب أعلاه، حلقة تبديلية بعنصر وحدة، وليس لها قواسم للصفر. [أي أن $K[t]$ حلقة صحيحة].

3.15 بيّن كيف يمكن إعتبار K مجموعة جزئية في $K[t]$.

■ نطابق السلمي $a_0\in K$ مع الحدودية $f(t)=a_0$ أو $a_0=(\ldots,0,a_0)$. ثم نحفظ عمليتي الجمع والضرب لعناصر في K تحت المطابقة التالية:

$$(\ldots,0,a_0)+(\ldots,0,b_0)=(\ldots,0,a_0+b_0)$$
$$(\ldots,0,a_0).(\ldots,0,b_0)=(\ldots,0,a_0b_0)$$

مبرهنة 2.15: لنفترض أن f و g حدوديتان في $K(t)$، إذن درجة g + درجة f = درجة (fg)

4.15 أثبت مبرهنة 2.15.

■ لنفتـــرض أن $f(t)=a_nt^n+\ldots+a_0$ و $g(t)=b_mt^m+\ldots+b_0$ و $a_n\neq 0$ و $b_m\neq 0$. إذن $f(t)g(t)=a_nb_mt^{n+m}+$

حدود من درجة أدنى. أيضاً، وبما أنه ليس للحقل K قواسم للصفر، فإن $a_nb_m \neq 0$. وبذلك، تكون درجة (fg) درجة $=m+n=$ درجة f+ درجة g

5.15 بيِّن أن العناصر غير الصفرية في K هي عناصر وحدة لـ $K[t]$.

■ لنفترض أن $f(t)g(t) = 1$. إذن $0 = \deg(1) = \deg(fg) = \deg f + \deg g$. وبالتالي $\deg f = 0$ و $\deg g = 0$. وتكون f و g عددين سلّميين في K. من جهة أخرى، إذا $a \in K$ و $a \neq 0$، إذن $a.a^{-1} = 1$، وبذلك يكون a عنصر وحدة في $K[t]$.

ملاحظة: نقول عن حدودية g أنها تقسم حدودية f إذا كانت توجد حدودية h بحيث أن $f(t) = g(t)h(t)$.

6.15 لنفترض أن $g(t)$ تقسم $f(t)$ بيِّن أن $\deg g \leqslant \deg f$.

■ إذا g تقسم f، إذن توجد h بحيث أن $f(t) = g(t)h(t)$. إذن، وبواسطة مبرهنة 2.15، $\deg f = \deg g + \deg h \geqslant \deg g$.

7.15 لنفترض أن f و g حدوديتان، بحيث أن f تقسم g و g تقسم f. بيِّن أن (أ) $\deg f = \deg g$، و (ب) f و g متشاركتان، أي أن $f(t) = kg(t)$، حيث $k \in K$.

■ (أ) نعرف، من مبرهنة 2.15، أن $\deg f \leqslant \deg g$ وأن $\deg g \leqslant \deg f$؛ وبالتالي $\deg f = \deg g$. (ب) بما أن g تقسم f، فإنه توجد h بحيث أن $f(t) = h(t)\,g(t)$. بما أن $\deg f = \deg g$، يكون لدينا $\deg h = 0$. بتعبير آخر، $h(t) = k$، حيث k عنصر في K.

8.15 لنفترض أن d و d' حدوديتان واحديتا المعاملين الرئيسيين، بحيث أن d تقسم d' و d' تقسم d. إذن، $d = d'$.

■ لدينا، من المسألة 7.15، أن $d(t) = kd'(t)$، حيث $k \in K$. المعامل الرئيسي لـ d يساوي 1، لأن d واحدية المعامل الرئيسي، والمعامل الرئيسي لـ kd' يساوي k لأن d' واحدية المعامل الرئيسي. وبالتالي، $k = 1$ و $d = d'$.

2.15 الخوارزمية الإقليدية، جذور الحدوديات

نستخدم في هذا القسم المبرهنات التالية التي سوف تبرهن في المسائل 13.15-15.15.

مبرهنة 3.15 (الخوارزمية الإقليدية للقسمة): لتكن $f(t)$ و $g(t)$ حدوديتين فوق حقلٍ K، بحيث $g(t) \neq 0$. توجد، إذن، حدوديتان $q(t)$ و $r(t)$ بحيث أن $f(t) = q(t)g(t) + r(t)$، حيث إما $r(t) \equiv 0$ أو $\deg r < \deg g$.

[هذه المبرهنة صياغة صورية للطريقة المعروفة بـ «القسمة المطولة».]

مبرهنة 4.15: لنفترض أن $a \in K$ جذر لحدودية $f(t)$ فوق K، حيث $\deg f = n$. إذن، توجد حدودية $q(t)$، حيث $\deg q = n - 1$، بحيث أن $f(t) = (t - a)q(t)$. [أي أن $t - a$ تقسم $f(t)$.]

مبرهنة 5.15: لنفترض أن عدداً منطقاً p/q [مختزلاً إلى حدوده الادنى] جذرٌ للحدودية $f(t) = a_nt^n + \ldots + a_1t + a_0$ حيث $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in Z_1$. إذن، p يقسم الحد الثابت a_0 و q يقسم المعامل الرئيسي a_n. [لدينا، على الخصوص، أنه إذا كان $c = p/q$ عدداً صحيحاً، فإن c يقسم a_0.]

9.15 لنفترض أن $f(t) = t^3 + t^2 - 8t + 4$. بافتراض أن لـ $f(t)$ جذراً منطقاً، أوجد كل جذور $f(t)$.

■ بما أن المعامل الرئيسي يساوي 1، فإن الجذور المنطقة الوحيدة لـ $f(t)$ يجب أن تكون أعداداً صحيحة. أيضاً، تكون هذه الجذور ضمن ± 1، ± 2، ± 4. لاحظ أن $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$. نحصل، بالقسمة التركيبية [أو بالقسمة على $t - 2$]، على

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1+1-8+4 \\ & \quad\;\; 2+6-4 \\ \hline & 1+3-2+0 \end{array}$$

إذن، يكون $t = 2$ جذراً ويكون لدينا $f(t) = (t-2)(t^2+3t-2)$. باستخدام الصيغة التربيعية من أجل $t^2+3t-2=0$، نحصل على الجذور التالية لـ $f(t)$: $t = 2$، $t = 2, t = (-3+\sqrt{17})/2, t = (-3-\sqrt{17})/2$.

10.15 لنفترض أن $g(t) = t^3 - 2t^2 - 6t - 3$. أوجد جذور $g(t)$ بافتراض أن لـ $g(t)$ جذراً صحيحاً.

■ إن الجذور الصحيحة الوحيدة لـ $g(t)$ يجب أن تكون ضمن ± 1 ، ± 3 . لاحظ أن $f(1) \neq 0$. نستخدم القسمة التركيبية [أو نقسم على $t+1$]، نحصل على

$$\begin{array}{r|l} -1 & 1-2-6-3 \\ & \;\;\;-1+3+3 \\ \hline & 1-3-3+0 \end{array}$$

لذلك، يكون $t = -1$ جذراً، وتكون $g(t) = (t+1)(t^2-3t-3)$. يمكننا الآن إستخدام الصيغة التربيعية من أجل $t^2-3t-3=0$، للحصول على الجذور الثلاثة التالية لـ $g(t)$: $t = -1$، $t = (3+\sqrt{21})/2$ ، $t = (3-\sqrt{21})/2$.

11.15 لنفترض أن $h(t) = t^4 - 2t^3 + 11t - 10$. أوجد كل الجذور الحقيقية لـ $h(t)$، بافتراض وجود جذرين صحيحين.

■ الجذران الصحيحان يجب أن يكونا ضمن ± 1 ، ± 2 ، ± 5 ، ± 10 . نحصل، بالقسمة التركيبية [أو بالقسمة على $t-1$ ثم $t+2$]، على

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-2+0+11-10 \\ & \;\;\;\;1-1-\;\;1+10 \\ \hline -2 & 1-1-1+10+\;\;0 \\ & \;\;-2+6-10 \\ \hline & 1-3+5+\;\;0 \end{array}$$

وبذلك، يكون $t = 1$ و $t = -2$ جذرين، ويكون لدينا $h(t) = (t-1)(t+2)(t^2-3t+5)$. الصيغة التربيعية من أجل t^2-3t+5 تدلّنا انه لا توجد جذور حقيقية أخرى، اي أن $t = 1$ و $t = -2$ هما الجذران الحقيقيان الوحيدان لـ $h(t)$.

12.15 لنفترض أن $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 6t - 2$. أوجد كل الجذور للحدودية $f(t)$، علماً بأن هناك جذراً منطقاً.

■ إن الجذور المُنْطَقة يجب أن يكونا ضمن ± 1 ، ± 2 ، $\pm 1/2$. نختبر كل جذر منطق ممكن، نحصل بواسطة القسمة التركيبية (أو القسمة على $2t+1$) على

$$\begin{array}{r|l} -\frac{1}{2} & 2-3-6-2 \\ & \;\;\;-1+2+2 \\ \hline & 2-4-4+0 \end{array}$$

وبذلك، يكون $t = -1/2$ جذراً ويكون لدينا $f(t) = (t+1/2)(2t^2-4t-4) = (2t+1)(t^2-2t-2)$. نستطيع الآن أن نستخدم الصيغة التربيعية من أجل t^2-2t-2 للحصول على الجذور الثلاثة التالية لـ $f(t)$: $t = -1/2$، $t = 1+\sqrt{3}$ ، $t = 1-\sqrt{3}$.

13.15 أثبت مبرهنة 3.15.

■ إذا $f(t) \equiv 0$ أو إذا $\deg f < \deg g$، فإنه يكون لدينا التمثيل المطلوب $f(t) = 0g(t) + f(t)$. لنفترض الآن أن $\deg f \geqslant \deg$ و $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ و $g(t) = b_m t^m + \ldots b_1 t + b_0$. حيث $a_n, b_m \neq 0$ و $n \geqslant m$. نكوّن الحدودية

$$f_1(t) = f(t) - \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} g(t) \qquad (1)$$

[هذه هي الخطوة الأولى في «القسمة المطولة»]. إذن، $\deg f_1 \geqslant \deg f$. توجد، بالاستقراء، حدوديتان $q_1(t)$ و $r(t)$ بحيث أن $f_1(t) = q_1(t)g(t) + r(t)$، حيث إما $r(t) \equiv 0$ أو $\deg r < \deg g$. نعوض بهذا في (1) ونحلّ من أجل $f(t)$، نحصل على

$$f(t) = \left[q_1(t) + \frac{a_n}{b_m} t^{n-m}\right] g(t) + r(t)$$

وهو التمثيل المنشود.

14.15 أثبت مبرهنة 4.15.

▩ نعرف، من مبرهنة 3.15، أنه توجد $q(t)$ و $r(t)$ بحيث أن

$$f(t) = (t-a)(t) + r(t) \qquad (1)$$

حيث $r(t) \equiv 0$ أو $\deg r < \deg(t-a) = 1$. وبذلك، تكون $r(t) = k$، حيث k ثابت. نعوض بـ $t = a$ و $r(t) = k$ في (1) فنحصل على $f(a) = (a-a)q(t) + k$. بما أن $f(a) = 0$ و $a - a = 0$، فإن $k = r(t) = 0$. وبذلك، $f(t) = (t-a)q(t)$. أيضاً، $n = \deg f = \deg(t-a) + \deg q = 1 + \deg q$. وبالتالي، $\deg q = n-1$.

15.15 أثبت مبرهنة 5.15.

▩ نعوض بـ $t = p/q$ في $f(t) = 0$ فنحصل على $a_n(p/q)^n + \ldots + a_1(p/q) + a_0 = 0$. نضرب طرفي المعادلة في q^n نحصل على

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad (1)$$

بما أن p تقسم كل الحدود الـ n الأولى في (1)، فإن p يجب أن تقسم الحد الاخير a_0q^n. بافتراض أن p و q أوليان ثنائيا (نسبياً)، فإن p تقسم a_0. بالمثل، تقسم q الحدود الـ n الأخيرة في (1)، وبالتالي تقسم q الحد الأول a_np^n. بما أن p و q أوليان نسبياً (ثنائيا)، فإن q تقسم a_n.

مبرهنة 6.15: لنفترض أن $f(t)$ حدودية فوق حقلٍ K، وأن $\deg f = n$. إذن، يكون لـ $f(t)$ عدد n على الأكثر من الجذور في K.

16.15 أثبت مبرهنة 6.15.

▩ يكون الإثبات بالاستقراء على n. إذا $n = 1$، إذن $f(t) = at + b$ ويكون لـ $f(t)$ الجذر الوحيد $t = -b/a$. لنفترض أنّ $n > 1$. إذا لم يكن لـ $f(t)$ جذور، فإن المبرهنة تتحقق. ليكن $a \in K$ جذراً لـ $f(t)$، إذن

$$f(t) = (t-a)g(t) \qquad (1)$$

حيث $\deg g = n-1$. إننا نزعم بأن أي جذر آخر لـ $f(t)$ لا بد أن يكون أيضاً جذراً لـ $g(t)$. لنفترض أن $b \neq a$ جذر آخر لـ $f(t)$. بالتعويض بـ $t = b$ في (1) نحصل على $0 = f(b) = (b-a)g(b)$. بما أنه ليس لـ K قواسم للصفر، وبما أن $b - a \neq 0$، يجب أن يكون لدينا $g(b) = 0$. بالاستقراء، يكون لـ $g(t)$ عدد $(n-1)$ من الجذور على الأكثر. وبذلك، يكون لـ $f(t)$ عدد $(n-1)$ من الجذور على الأكثر بالإضافة إلى a. إذن، يكون لـ $f(t)$ عدد n من الجذور على الأكثر.

مبرهنة 15.7: لنفترض أن $f(t)$ حدودية فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$، ولنفترض أن العدد العقدي $z = a + bi$، $b \neq 0$، جذر لـ $f(t)$. إذن، يكـون المـرافـق العقـدي $\bar{z} = a - bi$ أيضـاً جـذراً لـ $f(t)$، وبـالتـالـي يكـون $c(t) = (t-z)(t-\bar{z}) = t^2 - 2at + a^2 + b^2$ عاملاً لـ $f(t)$.

17.15 أثبت مبرهنة 7.15.

▩ بما أن $\deg c = 2$، إذن يوجد $q(t)$ و $M, N \in \mathbf{R}$ بحيث أن

$$f(t) = c(t)q(t) + Mt + N \qquad (1)$$

بما أن $z = a + bi$ جذر لـ $f(t)$ و $c(t)$، فإنه يكون لدينا بالتعويض بـ $t = a + bi$ في (1)

$f(z) = c(z)q(z) + M(z) + N$ أو $0 = 0q(z) + M(z) + N$ أو $M(a + bi) + N = 0$

وبذلك، $Ma + N = 0$ و $Mb = 0$. بما أن $b \neq 0$، فلا بد أن يكون $M = 0$. إذن $0 + N = 0$ أو $N = 0$. ينتج عن ذلك أن $f(t) = c(t)q(t)$ وأن $\bar{z} = a - bi$ جذر لـ $f(t)$.

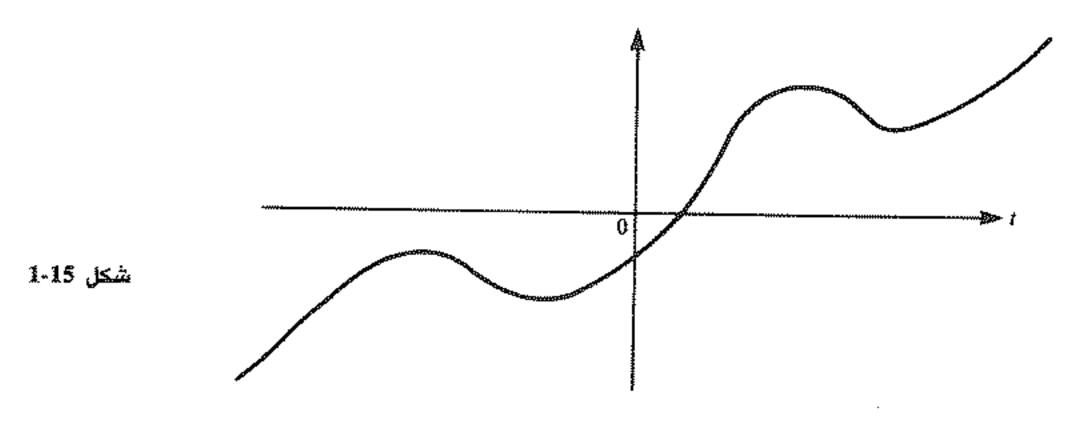
18.15 لنفترض أن $f(t) = t^4 - 3t^3 + 6t^2 + 25t - 39$. أوجد كل جذور $f(t)$ علماً بأن $t = 2 + 3i$ جذر للحدودية.

■ بما أن $2 + 3i$ جذر، إذن يكون $2 - 3i$ جذراً أيضاً، ويكون $c(t) = t^2 - 4t + 13$ عاملاً لـ $f(t)$. بقسمة $f(t)$ على $c(t)$، نحصل على $f(t) = (t^2 - 4t + 13)(t^2 + t - 3)$. نطبق الصيغة التربيعية على $t^2 + t - 3$ يعطينا الجذرين الآخرين لـ $f(t)$. أي أن الجذور الأربعة لـ $f(t)$ هي: $2 + 3i$، $2 - 3i$، $(-1 + \sqrt{13})/2$، $(-1 - \sqrt{13})/2$.

19.15 لنفترض أن $f(t)$ حدودية حقيقية بدرجة فردية. بيِّن أن $f(t)$ يجب أن يكون لها جذر حقيقي.

■ الجذور العقدية لـ $f(t)$ تأتي أزواجاً، وفق مبرهنة 7.15. وبالتالي، جذر واحد على الأقل لـ $f(t)$ يجب أن يكون حقيقياً.

20.15 أعط برهاناً هندسياً لحقيقة أن حدودية حقيقية ذات درجة فردية يكون لها جذر حقيقي.



شكل 1-15

■ لنفترض أن المعامل الرئيسي لـ $f(t)$ موجب [أو نضرب $f(t)$ في $1-$، إذا كان الأمر غير ذلك]. بما أن $\deg f = n$، حيث n فردي، يكون لدينا

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$$

وبذلك، فلا بد أن يقطع بيان $f(t)$ محور -t في نقطة واحدة على الأقل، كما يوضحه شكل 1-15.

3.15 منطقة مثالية رئيسية، حلقة التحليل الوحيد إلى عوامل أولية

سوف نبرهن في هذا القسم أن الحلقة $K[t]$ للحدوديات فوق K هي منطقة مثالية رئيسية، وأنها حلقة تحليل وحيد إلى عوامل أولية. [يطلب من القارىء الرجوع للقسم 8.6 من أجل التعريفات ذات العلاقة].

مبرهنة 8.15: إن الحلقة $K[t]$ للحدوديات فوق حقل K تكون منطقة مثالية رئيسية. إذا كان J مثالياً في $K[t]$، فإنه توجد حدودية (واحدية المعامل الرئيسي) وحيدة d تولِّد J، أي أن d تقسم كل حدودية $f \in j$.

21.15 أثبت مبرهنة 8.15.

■ لتكن d حدودية ذات الدرجة الأدنى في J. بما أنّه يمكننا ضرب d في سلّمي غير صفري، ونظل مع هذا في J، فإنه يمكننا الافتراض دون الإخلال بالعمومية أن d حدودية واحدية المعامل الرئيسي. لنفترض الآن أن $f \in J$. توجد، بواسطة خوارزمية القسمة، حدوديتان q و r بحيث أن $f = qd + r$، وحيث $r = 0$ أو $\deg r < \deg d$. الآن، $f,d \in J$ يقتضيان $qd \in J$؛ وبالتالي، $r = f - qd \in J$. ولكن d حدودية من الدرجة الأدنى في J. ينتج عن ذلك أن $r = 0$ و $f = qd$؛ أي أن d تقسم f. يبقى أن نبيِّن أن d وحيدة. إذا كانت d' حدودية أخرى واحدية المعامل الرئيسي، وتولِّد J، فإن d تقسم d' و d' تقسم d. يقتضي هذا أن $d = d'$، لأن d، d' واحديتا المعاملين الرئيسيين. وبذلك، يستكمل إثبات المبرهنة.

مبرهنة 9.15: لتكن f و g حدوديتين غير صفريتين في $K[t]$. إذن، توجد حدودية واحدية المعامل الرئيسي وحيدة d بحيث أن (i) d تقسم f و g، (ii) إذا d' تقسم f و g، إذن d' تقسم d.

22.15 أثبت مبرهنة 9.15.

■ إن المجموعة $I = \{mf + ng : m,n \in K[t]\}$ تكون مثالياً. ليكن d الحدودية واحدية المعامل الرئيسي التي تولّد I. لاحظ أن $f,g \in I$ وبالتالي d تقسم f و g. الآن نفترض أن d' تقسم f و g. ليكن J مثالياً تولده d'. إذن $f,g \in J$ وبالتالي، $I \subset J$. ينتج عن ذلك أن $d \in J$ وبذلك d' تقسم d كما افترضنا. يبقى أن نبين أن d وحيدة. إذا كانت d_1 قاسم مشترك أعظم (وواحدية المعامل الرئيسي) لـ f و g، فإن d تقسم d_1 و d_1 تقسم d. يقتضي هذا أن $d = d_1$، لأن d و d_1 واحديتا المعاملين الرئيسيين. يستكمل هذا البرهان.

ملاحظة: الحدودية d أعلاه تسمى «القاسم المشترك الأعظم» لـ f و g. إذا $d = 1$، إذن نقول أن f و g أوليتان نسبياً.

نتيجة 10.15: لتكن d القاسم المشترك الأعظم للحدوديتين f و g. إذن، توجد حدوديتان m و n بحيث أن $d = mf + ng$. إذا كانت f و g أوليتين نسبياً، فإنه توجد حدوديتان m و n بحيث أن $mf + ng = 1$.

23.15 أثبت نتيجة 10.15.

■ نجد، من إثبات مبرهنة 9.15، أن d تولّد المثالي $I = \{mf + ng : m,n \in K[t]\}$. وبذلك، توجد $m,n \in K(t)$ بحيث أن $d = mf + ng$.

24.15 عرّف حدودية غير ـ خزولة.

■ نقول عن حدودية $p \in K[t]$ أنها غير ـ خزولة، إذا كانت درجة p موجبة [أي أن p ليست ثابتة] وإذا $p = fg$ يقتضي أن f أو g عدد سلّمي.

توطئة 11.15: لنفترض أن $P \in K[t]$ غير ـ خزولة إذا كانت p تقسم جداء fg للحدوديتين $f,g \in K[t]$، فإن p تقسم f أو p تقسم g. بعمومية أكبر، إذا كانت p تقسم جداء عدد n من الحدوديات $f_1 f_2 \ldots f_n$، فإن p تقسم واحدة من هذه الحدوديات.

25.15 أثبت توطئة 11.15.

■ لنفترض أن p تقسم fg ولكنها لا تقسم f. بما أن p غير خزولة، فيجب أن تكون الحدوديتان f و p أوليتين نسبياً، إذن، توجد حدوديتان $m,n \in K[t]$ بحيث أن $mf + np = 1$. بضرب طرفي هذه المعادلة في g، نحصل على $mfg + npg = g$. ولكن p تقسم fg وبالتالي mfg. إذن، p تقسم npg، وبالتالي، تقسم p المجموع $g = mfg + npg$.

لنفترض الآن أن p تقسم $f_1 f_2 \ldots f_n$. إذا كانت p تقسم f_1، نكون قد انتهينا. وإذا كان الامر غير ذلك، فإن p وبسبب النتيجة أعلاه ـ تقسم الجداء $f_2 \ldots f_n$. نجد، بالاستقراء على n، أن p تقسم واحدة من الحدوديات $f_2, \ldots, f_n$. هذا يكمل برهان التوطئة.

مبرهنة 12.15(مبرهنة التحليل الوحيد): لتكن f حدودية غير صفرية في K[t]. إذن، يمكن كتابة f وبشكل وحيد [باستثناء الترتيب] كجداء $f = kp_1 p_2 \ldots p_r$ حيث $k \in K$، و pi حدودية واحدية المعامل الرئيسي وغير خزولة في K[t].

26.15 أثبت مبرهنة 12.15.

■ نثبت أولاً وجود جداء مثل هذا. إذا كانت f غير خزولة أو كانت $f \in K$، فمن الواضح وجود مثل هذا الجداء. لنفترض، من جهة أخرى، أن $f = gh$ حيث f و g غير سلّميتين. إذن، يكون لـ g و h درجتان أقل من درجة f. يمكننا أن نفترض، بالاستقراء، أن $g = k_1 g_1 g_2 \ldots g_r$ و $h = k_2 h_1 h_2 \ldots h_s$ حيث $k_1, k_2 \in K$، وحيث g_i و h_j حدوديات واحدية المعامل الرئيسي وغير خزولة. ينتج عن ذلك أن $f = (k_1 k_2) g_1 g_2 \ldots g_r h_1 h_2 \ldots h_s$ وهي التمثيل المطلوب.

نثبت الآن وحدانية مثل هذا الجداء [باستثناء الترتيب] من أجل f. لنفترض أن $f = kp_1 p_1 \ldots p_n = k' q_1 q_2 \ldots q_m$ حيث $k, k' \in K$، وحيث $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$ حدوديات واحدية المعامل الرئيسي وغير ـ خزولة. الآن، p تقسم $k' q_1 \ldots q_m$. بما أن p_1 غير خزولة فيجب أن تقسم واحدة من الـ q_i (بسبب التوطئة أعلاه). لنقل مثلاً أن p_1 تقسم q_1. بما أن p_1 و q_1 غير

خزولتين وواحديتا المعاملين الرئيسيين، إذن $p_1 = q_1$. ينتج عن ذلك أن $kp_2 \ldots p_n = k'q_2 \ldots q_m$. ويكون لدينا، بالاستقراء، أن $n = m$ وأن $p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_m$ من أجل ترتيب معين للـ q_i. يكون لدينا أيضاً أن $k = k'$. وبذلك، يكتمل إثبات المبرهنة.

27.15 أذكر منطوق المبرهنة الأساسية للجبر. [البرهان يقع خارج نطاق هذا النص].

■ **المبرهنة الأساسية للجبر:** إن الحقل العقدي $\mathbf{C}$ مغلق. أي أن أي حدودية غير صفرية $f(t)$ فوق $\mathbf{C}$ يكون لها جذر في $\mathbf{C}$. ويمكن بالتالي كتابتها وبشكل وحيد [باستثناء الترتيب] كجداء $f(t) = k(t - r_1)(t - r_2) \ldots (t - r_n)$ حيث $k, r_i \in \mathbf{C}$، أي كجداء لحدوديات خطية.

مبرهنة 13.15: لتكن $f(t)$ حدودية غير صفرية فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$. إذن، يمكن كتابة $f(t)$ وبشكل وحيد [باستثناء الترتيب] كجداء $f(t) = kp_1(t)p_2(t) \ldots p_m(t)$ وحيث الـ $p_i(t)$ و $k \in \mathbf{R}$ حدوديات واحدية المعامل الرئيسي وغير خزولة من الدرجتين الأولى أو الثانية.

28.15 أثبت مبرهنة 13.15.

■ نجد، من المبرهنة الأساسية للجبر، أن $f(t) = k(t - r_1)(t - r_2) \ldots (t - r_n)$ حيث $k, r_i \in \mathbf{C}$. بما أن k هو المعامل الرئيسي لـ $f(t)$، فإن $k \in \mathbf{R}$. أيضاً، إذا كان $r_i = a + bi$ جذراً غير حقيقي، فإنه يوجد جذرٌ $r_j = a - bi$. كما أن $p(t) = (t - r_i)(t - r_j) = t^2 - 2at + a^2 + b^2$ حدودية فوق $\mathbf{R}$، و $p(t)$ هي واحدية المعامل الرئيسي، خزولة كذلك فوق $\mathbf{R}$ لان جذريها غير حقيقيين. المبرهنة تتبع من ذلك.

4.15 حدوديات لمصفوفات ومؤثرات خطية

يعالج هذا القسم حدوديات المصفوفات. وتحديداً، إذا كانت $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ حدودية فوق حقلٍ K، و A مصفوفة مربعة n- فوق k، فإننا نعرّف $f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I$، حيث المصفوفة المتطابقة. ونقول، على الخصوص، بأن A «جذر» أو «صفر» للحدودية $f(t)$ إذا $f(A) = 0$.

المسائل 29.15-32.15 تتعلق بالمصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

29.15 أوجد $f(A)$ حيث $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$. هل A جذر لـ $f(t)$؟

■
$$f(A) = 2A^2 - 3A + 7I = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

A ليست جذراً لـ $f(t)$ لأن $f(A)$ ليست المصفوفة الصفرية.

30.15 أوجد $g(A)$ حيث $g(t) = t^2 - 5t - 2$. هل A جذر لـ $g(t)$؟

■
$$g(A) = A^2 - 5A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A تساوي صفراً لأن $g(t)$ مصفوفة صفرية.

31.15 أوجد $f(B)$ حيث $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$.

■
$$f(B) = 2B^2 - 3B + 7I = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -14 & -24 \\ 48 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -12 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 36 & 26 \end{pmatrix}$$

32.15 أوجد h(B) حيث $h(t) = t^2 - 6t + 13$.

■ $$h(B) = B^2 - 6B + 13I = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -24 & -30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[وبذلك، تكون B جذراً لـ h(t)].

33.15 بيّن أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ جذرٌ صفري لـ $f(t) = t^2 - 4t - 5$.

■ $$f(A) = A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

34.15 لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ أوجد A^2، A^3، A^n.

■ $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سوف نفترض أن $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. النتيجة صحيحة من أجل $n = 1, 2, 3$. بافتراض أنها صحيحة من أجل $n-1$، يكون لدينا

$$A^n = AA^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مبرهنة 14.15: لتكن f و g حدوديتين فوق K، و A مصفوفة مربعة -n فوق K. إذن

(i) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.

(ii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

(iii) $(kf)(A) = kf(A)$ حيث $k \in K$.

35.15 أثبت (i) في مبرهنة 14.15.

■ لنفترض أن $f = a_nt^n + ... + a_1t + a_0$ و $g = b_mt^m + ... + b_1t + b_0$. إذن يكون لدينا، تعريفاً، أن $f(A) = a_nA^n + ... + a_1A + a_0I$ و $g(A) = b_mA^m + ... + b_1A + b_0I$. لنفترض $m \leq n$، ولتكن $b_i = 0$ إذا $i > m$. إذن، $f + g = (a_n + b_n)t^n + ... + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$. وبالتالي،

$(f + g) = (a_n + b_n)A^n + ... + (a_1 + b_1)A + (a_0 + b_0)I = a_nA^n + b_nA^n + ... + a_1A + b_1A + a_0I + b_0I = f(A) + g(A)$.

36.15 أثبت (ii) في مبرهنة 14.15.

■ لدينا من التعريف، $fg = c_{n+m}t^{n+m} + \cdots + c_1t + c_0 = \sum_{k=0}^{n+m} c_kt^k$ حيث $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$، وبالتالي، $(fg)(A) = \sum_{k=0}^{n+m} c_kA^k$ و

$$f(A)g(A) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_iA^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_jA^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_jA^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} c_kA^k = (fg)(A)$$

37.15 أثبت (iii) في مبرهنة 14.15.

■ لدينا، من التعريف، $kf = ka_nt^n + ... + ka_1t + ka_0$، وبذلك،

$(kf)(A) = ka_nA^n + ... + ka_1A + ka_0I = k(a_nA^n + ... + a_1A + a_0I) = kf(A)$.

38.15 بيّن أن أي حدوديتين في مصفوفة A تتبادلان، أي أن $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ من أجل أي حدوديتين f(t) و g(t).

■ بما أن $f(t)g(t) = g(t)f(t)$، فإن مبرهنة 14.15 تخبرنا أن $f(A)f(A) = g(A)f(A)$.

ملاحظة: لنفترض أن $T: V \to V$ مؤثر خطي على فضاء متجهي V فوق K، ولنفترض أن $f(t) = a_nt^n + ... + a_1t + a_0$. إذن، نعرّف f(A) بنفس الأسلوب الذي إتبعناه من أجل المصفوفات: $f(T) = a_nT^n + ... + a_1T + a_0I$، حيث I هو

الآن التطبيق المحايد. نقول أيضاً أن T «صفرٌ» أو «جذرٌ» لـ f(t) إذا $f(T) = 0$. كما أن مبرهنة 14.15 تظل صالحة من أجل المؤثرات، كما هي من أجل المصفوفات. وبذلك، وعلى الخصوص، يكون أي حدوديتين في T تبديليتان.

39.15 ليكن V الفضاء المتجهي لدوال، وبحيث تكون $\{\sin\theta, \cos\theta\}$ قاعدة له، وليكن D المؤثر الاشتقاقي على V. بيِّن أن D صفرٌ لـ $f(t) = t^2 + 1$.

■ نطبق f(D) على كل متجه في القاعدة:

$$f(D)(\sin\theta) = (D^2 + I)(\sin\theta) = D^2(\sin\theta) + I(\sin\theta) = -\sin\theta + \sin\theta = 0$$
$$f(D)(\cos\theta) = (D^2 + I)(\cos\theta) = D^2(\cos\theta) + I(\cos\theta) = -\cos\theta + \cos\theta = 0$$

بما أن كل متجه في القاعدة يُطبَّق إلى 0، فإن كل متجه $v \in V$ يُطبق أيضاً بواسطة f(D) إلى 0 وبذلك، $f(D) = 0$.

40.15 لتكن A تمثيلاً مصفوفياً لمؤثر T. بيِّن أن f(A) تمثيل مصفوفي لـ f(T)، من أجل أي حدودية f(t).

■ ليكن ϕ التطبيق $T \mapsto A$، أي الذي يرسل المؤثر T إلى تمثيله المصفوفي A. نحتاج إلى إثبات أن $\phi(f(T)) = f(A)$ لنفترض أن $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ يكون الإثبات بالاستقراء على n، درجة f(t).

لنفترض أن $n = 0$. تذكر أن $\phi(I') = I$، حيث I' التطبيق المحايد و I المصفوفة المتطابقة. إذن، $\phi(f(T)) = \phi(a_0 I') = a_0\phi(I') = a_0 I = f(A)$، وتكون المبرهنة متحققة من أجل $n = 0$.

لنفترض الآن المبرهنة صالحة من أجل حدوديات ذات درجات أقل من n. إذن، وبما أن ϕ تشاكل تقابلي على جبر، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\phi(f(T)) &= \phi(a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I') = a_n\phi(T)\phi(T^{n-1}) + \phi(a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I') \\ &= a_n A A^{n-1} + (a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I) = f(A)\end{aligned}$$

وبذلك تكون المبرهنة قد أثبتت.

41.15 لتكن A أي مصفوفة مربعة، ولتكن P مصفوفة غير شاذة من نفس المرتبة. بيِّن أن (أ) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$، من أجل أي عدد موجب n، و (ب) $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$، من أجل أي حدودية f(t).

■ (أ) الشرط يتحقق بديهياً من أجل $n = 1$. إذن، وبالإستقراء $n > 1$،

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^{n-1} = (P^{-1}AP)(P^{-1}A^{n-1}P) = P^{-1}A^nP^{-1}$$

(ب) لنفترض $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$. إذن

$$\begin{aligned}f(P^{-1}AP) &= a_n(P^{-1}AP)^n + a_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1} + \ldots + a_1(P^{-1}AP) + a_0 I \\ &= a_n(P^{-1}A^nP) + a_{n-1}(P^{-1}A^{n-1}P) + \ldots + a_1(P^{-1}AP) + a_0(P^{-1}IP) \\ &= P^{-1}(a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I)P = P^{-1}f(A)P\end{aligned}$$

42.15 لنفترض أن B مصفوفة مشابهة لـ A. بيِّن أن f(B) مشابهة لـ f(A) من أجل أي حدودية f(t).

■ بما أن B مشابهة لـ A، فإنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن $B = P^{-1}AP$. إذن، وبواسطة المسالة 41.15، $f(B) = f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$. وبذلك، تكون f(B) مشابهة لـ f(A).

43.15 لتكن A أي مصفوفة مربعة. بيِّن أن (أ) $(A^T)^n = (A^n)^T$ من أجل أي عدد موجب n، و (ب) $f(A^T) = [f(A)]^T$ من أجل أي حدودية f(t).

■ (أ) يتحقق الشرط بديهياً من أجل $n = 1$. إذن، بالاستقراء ومن أجل $n > 1$،

$$(A^T)^n = A^T(A^T)^{n-1} = A^T(A^{n-1})^T = (A^{n-1}A)^T = (A^n)^T$$

(ب) نفترض أن $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$. إذن، باستخدام حقيقة أن $(P + Q)^T = P^T + Q^T$ و $(kP)^T = kP^T$، يكون لدينا

$$f(A^T) = a_n (A^T)^n + a_{n-1} (A^T)^{n-1} + ... + a_1 A^T + a_0 I$$
$$= a_n (A^n)^T + a_{n-1} (A^{n-1})^T + ... + a_1 A^T + a_0 I^T$$
$$= [a_n A^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I]^T = [f(A)]^T$$

44.15 إفترض أن A متناظرة. بيِّن أن $f(A)$ متناظرة من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ بما أن A متناظرة، $A^T = A$. إذن، وبالمسألة 43.15، $[f(A)]^T = f(A^T) = f(A)$. وبالتالي، تكون $f(A)$ متناظرة.

45.15 لتكن A مصفوفة مربعة -n. بيِّن أن A صفرٌ لحدودية غير ـ صفرية.

■ لتكن $N = n^2$. ولننظر المصفوفات الـ $N + 1$ التالية: $I, A, A^2, ..., A^N$. تذكر أن الفضاء المتجهي V للمصفوفات المربعة -n يكون بُعْدُه $N = n^2$. وبذلك، فإن المصفوفات الـ $N + 1$ أعلاه تكون مترابطة خطياً. وبالتالي، توجد سلّميات $a_0, a_1, ..., a_N$ بحيث أن $a_N A^N + ... + a_1 A + a_0 I = 0$. ينتج عن ذلك أن A صفرٌ للحدودية $f(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$.

ملاحظة: أن النتيجة السابقة إثبات وجود؛ فهي لا تخبرنا كيف نجد حدودية تكون A جذراً لها الفصل التالي يعطينا حدودية مثل هذه الحدودية المميزة لـ A.

46.15 لتكن مصفوفة قطرية مركبة

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

صف $f(M)$ من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ بما أن المصفوفات الجزئية (للمصفوفة القطرية المركبة) تجمّع وتُضرب باستقلالية، فإنه يكون لـ $f(M)$ الشكل التالي، حيث المصفوفات الجزئية القطرية هي $f(A_1), ..., f(A_n)$:

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_n) \end{pmatrix}$$

47.15 لتكن المصفوفة القطرية المركبة

$$N = \begin{pmatrix} A_1 & B & \cdots & C \\ 0 & A_2 & \cdots & D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

حيث A_i مصفوفات مربعة. صف $f(N)$ من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ بما أن مجموع وجداء المصفوفات القطرية المركبة هي أيضاً مصفوفات قطرية مركبة، وبما العناصر القطرية تجمع وتضرب بشكل مستقل، فإنه يكون لـ $f(N)$ الشكل التالي، حيث $f(A_1), ..., f(A_n)$ المصفوفات الجزئية القطرية:

$$f(N) = \begin{pmatrix} f(A_1) & X & \cdots & Y \\ 0 & f(A_2) & \cdots & Z \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_n) \end{pmatrix}$$

الفصل 16
القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، التقطير(*)

ندرس في هذه الفصل الشروط لكي تكون مصفوفة A مشابهة لمصفوفة قطرية ولكي يكون مؤثر خطي T، وهو أمر مكافىء، ممثلاً بواسطة مصفوفة قطرية. إن هذا الموضوع مرتبط جداً بجذور حدودية معينة ذات علاقة بـ A و T). كما أن الحقل K، وهو حقل التعريف، يلعب أيضاً دوراً مهماً في هذه النظرية لأن وجود جذور حدودية يعتمد على K.

1.16 الحدودية المميزة، مبرهنة كايلي ـ هاملتون

1.16 لتكن A مصفوفة مربعة -n فوق حقل K:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

عرِّف الحدودية المميزة لـ A.

■ يطلق على المصفوفة $tI_n - A$، حيث I_n المصفوفة المتطابقة المربعة -n وحيث t متغير غير معين، إسم «المصفوفة المميزة» لـ A:

$$tI_n - A=\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

أما محددتها $\Delta_A(t)=\det(tI_n - A)$، وهي حدودية في t، فتسمى «الحدودية المميزة» لـ A. ونطلق على $\Delta_A(t)=\det(tI_n - A)=0$ المعادلة المميزة لـ A.

إن مبرهنة 1.16، التي سوف تبرهن في المسألة 16,20 وتستخدم في المسائل التالية، تعتبر واحدة من أهم المبرهنات في الجبر الخطي.

مبرهنة 1.16 (كايلي ـ هاملتون): إن كل مصفوفة مربعة A صفرٌ لحدوديتها المميزة.

2.16 أوجد الحدودية المميزة لـ $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

■ نكوِّن المصفوفة المميزة tI-A:

$$tI-A=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-2 & 3 \\ -5 & t-1 \end{pmatrix}$$

والحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A هي محددتها:

$$\Delta(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ -5 & t-1 \end{vmatrix}=(t-2)(t-1)+15=t^2-3t+17$$

3.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

■ $$\Delta(t)=|tI-B|=\begin{vmatrix} t-1 & -3 & 0 \\ 2 & t-2 & 1 \\ -4 & 0 & t+2 \end{vmatrix}=(t-1)(t-2)(t+2)+12+6(t+2)=t^3-t^2+2t+28$$

* تعريب اخترناه من أجل diagonalization ـ المعرِّب.

4.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

$$\Delta(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -2\\ -3 & t-2\end{vmatrix}=(t-1)(t-2)-6=t^2-3t-4$$

5.16 حقق مبرهنة كايلي ـ هاملتون من أجل المصفوفة A في المسألة 4.16، أي حقق أن A جذر لحدوديتها المميزة.

■ أُعطينا $\Delta(t)=t^2-3t-4$ ، إذن

$$\Delta(A)=A^2-3A-4I=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -6\\ -9 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

6.16 لتكن مصفوفة $A=(a_{ij})$ مربعة n· [كما في مسألة 1.16]. حدِّد الحدّين الأول والثاني والحد الثابت في الحدودية المميزة $\Delta_A(t)$ لـ A.

■ كل حد في المحددة يحتوي على مدخل واحد فقط من كل صف وكل عمود؛ وبالتالي، تكون الحدودية المميزة أعلاه في الشكل

$\Delta_A(t)=(t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn})+$ حدود تحتوي على عدد $(n-2)$ على الأكثر من عوامل في الشكل $t-a_{ii}$

ينتج عن ذلك أن

$$\Delta_A(t)=t^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})t^{n-1}+\text{حدود من درجات أقل}$$

تذكر أن أثر A هو مجموع حدودها القطرية. وبذلك، تكون الحدودية المميزة $\Delta_A(t)=\det(tI_n-A)$ لـ A حدودية واحدية المعامل الرئيسي من الدرجة n، أما معامل t^{n-1} فهو سالب أثر A. [تكون حدودية واحدية المعامل الرئيسي إذا كان معاملها الرئيسي 1].

بالاضافة إلى ذلك، إذا وضعنا $t=0$ في $\Delta_A(t)$ ، نحصل على $\Delta_A(0)=|-A|=(-1)^n|A|$. ولكن $\Delta_A(0)$ هو الحد الثابت في الحدودية $\Delta_A(t)$. وبذلك، فإن الحد الثابت للحدودية المميزة للمصفوفة A يكون $(-1)^n|A|$ حيث n مرتبة A.

7.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ $A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 4 & 9\end{pmatrix}$.

■ لدينا هنا $\operatorname{tr}(A)=-2+9=7$ و $\det(A)=-18+24=6$، وبالتالي، $\Delta(t)=t^2-7t+6$.

8.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & -7\end{pmatrix}$.

■ لدينا هنا $\operatorname{tr}(B)=4+(-7)=-3$ و $\det(B)=-28+15=-13$، وبالتالي، $\Delta(t)=t^2+3t-13$. [نؤكد على أن هذا هو سالب الأثر والذي هو معامل t^{n-1}].

9.16 لنفترض أن $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. ما يلي صيغة من أجل الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A:

$$\Delta(t)=t^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2+\left(\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)t-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=t^3-\operatorname{tr}(A)t^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})t-\det(A)$$

[نرمز A_{11}، A_{22}، A_{33} هنا، على الترتيب، لمتماملات العناصر القطرية a_{11}، a_{22}، a_{33}]. أوجد $\Delta(t)$ عندما

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\\ 2 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

■ هنا $\operatorname{tr}(A) = 1 + 4 + 2 = 7$، $A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1$، $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$، $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6$، $A_{11} + A_{22} + A_{33} = -9$

وكذلك

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 105 - 24 - 7 - 20 = 66$$

إذن $\Delta(t) = t^3 - 7t^2 - 9t - 66$.

المسائل 10.16-12.16 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

10.16 أوجد حدودية f(t) تكون A جذراً لها.

■ نعرف، من مبرهنة كايْلي ـ هاملتون، أن كل مصفوفة هي جذر لحدوديتها المميزة ولذلك، لتكن f(t) الحدودية المميزة لـ A:

$$f(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -5 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = t^2 + t - 11$$

11.16 أوجد حدودية g(t) تكون B صفراً لها.

■ لتكن g(t) الحدودية المميزة لـ B:

$$g(t) = |tI - B| = \begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ -7 & t+4 \end{vmatrix} = t^2 + 2t + 13$$

12.16 أوجد حدودية h(t) تكون C جذراً لها.

■
$$h(t) = |tI - C| = \begin{vmatrix} t-1 & -4 & 3 \\ 0 & t-3 & -1 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2 - 2t - 5)$$

13.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لمصفوفة مثلثية

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ بما أن A مثلثية و tI قطرية، فإن $tI - A$ تكون أيضاً مثلثية بعناصر قطرية $t - a_{ii}$:

$$tI - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ إذن، تكون $\Delta(t) = |tI - A|$ جداء العناصر القطرية $t - a_{ii}$: $\Delta(t) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn})$.

14.16 بين أن مصفوفة A ومنقولتها A^T يكون لهما نفس الحدودية المميزة.

■ نجد، من عملية إيجاد المنقولة، أن $(tI - A)^T = tI - A^T$. بما أن مصفوفة ومنقولتها لهما نفس المحددة، إذن $|tI - A| = |(tI - A)^T| = |tI - A^T|$. وبذلك، يكون لـ A و A^T نفس الحدودية المميزة.

15.16 لنفترض أن $M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ حيث A_1 و A_2 مصفوفتان مربعتان. بيِّن أن الحدودية المميزة لـ M تساوي جداء الحدوديتين المميزتين لـ A_1 و A_2.

■ هنا، $tI - M = \begin{pmatrix} tI - A_1 & -B \\ 0 & tI - A_2 \end{pmatrix}$. ولكن محددة مصفوفة مركبة تساوي جداء محددات المصفوفات الجزئية القطرية.

وبذلك، $|tI - M| = \begin{vmatrix} tI - A_1 & -B \\ 0 & tI - A_2 \end{vmatrix} = |tI - A||tI - B|$ ، كما هو مطلوب.

16.16 عمم النتيجة في المسألة 15.16.

■ إن الحدودية المميزة $\Delta_M(t)$ للمصفوفة المركبة المثلثية

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B & \cdots & C \\ 0 & A_2 & \cdots & D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

تساوي جداء الحدوديات المميزة للمصفوفات الجزئية القطرية A_i، أي أن $\Delta_M(t) = \Delta_{A_1}(t)\Delta_{A_2}(t) \cdots \Delta_{A_n}(t)$.

المسائل 19.16-17.16 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

17.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ R.

■ بما أن R مثلثية، إذن $\Delta(t) = (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$.

18.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ S.

■ لاحظ أن S مصفوفة مركبة مثلثية وأن المصفوفتان الجزئيتان القطريتان: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ و $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
وبذلك، $\Delta(t) = \Delta_{A_1}(t)\Delta_{A_2}(t) = (t^2 - 6t + 3)(t^2 - 9t + 28)$.

19.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ T.

■ لاحظ أن T مصفوفة مركبة مثلثية بمصفوفات جزئية قطرية (5)، $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ، و (7).
وبذلك، $\Delta(t) = (t-5)(t^2 - 8t + 33)(t-7)$.

20.16 اثبت مبرهنة كايلي ـ هاملتون 1.16.

■ لتكن A مصفوفة مربعة -n إختيارية، ولتكن $\Delta(t)$ حدوديتها المميزة، أي $\Delta(t) = |tI - A| = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. لتكن الآن B المصفوفة القرينة الكلاسيكية للمصفوفة $tI - A$. إن عناصر B(t) هي متعاملات المصفوفة $tI - A$؛ وبالتالي، فهي حدودية في t من درجة لا تتجاوز $n - 1$. إذن، $B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0$ ، حيث B_i مصفوفات مربعة -n فوق K ومستقلة عن t. تأسيساً على الخاصية الأساسية للمصفوفة القرينة [مبرهنة 11.8]، نجد أن

$$(tI - A)B(t) = |tI - A|I$$

أو

$$(tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0) = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)I$$

بحذف الأقواس ومساواة معاملات القوى المتقابلة لـ t، نحصل على

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_{n-1}I \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= a_{n-2}I \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ B_0 - AB_1 &= a_1 I \\ -AB_0 &= a_0 I \end{aligned}$$

نضرب المعادلات المصفوفية أعلاه في A^n، A^{n-1}،...، A، I على الترتيب، فنجد أن

$$\begin{aligned} A^n B_{n-1} &= A^n \\ A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} &= a_{n-2}A^{n-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ AB_0 - A^2 B_1 &= a_1 A \\ -AB_0 &= a_0 I \end{aligned}$$

نجمع المعادلات المصفوفية أعلاه: $0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$. بتعبير آخر، $\Delta(A) = 0$ ، أي أن A صفرٌ لحدوديتها المميزة.

مبرهنة 2.16: يكون للمصفوفات المتشابهة نفس الحدودية المميزة.

21.16 أثبت مبرهنة 2.16.

■ لنفترض أن A و B مصفوفتان متشابهتان، أي $B = P^{-1}AP$ حيث P مصفوفة عكوسة. باستخدام $tI = P^{-1}tIP$، يكون لدينا $|tI - B| = |tI - P^{-1}AP| = |P^{-1}tIP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tI - A)P| = |P^{-1}||tI - A||P|$. بما أن المحددات أعداد سلّمية وتبديلية، وبما أن $|P^{-1}||P| = 1$ ، فإننا نتحصل في النهاية على $|tI - B| = |tI - A|$. أي أن A و B لهما الحدودية المميزة نفسها.

22.16 لنفترض أن $L: V \to V$ مؤثر خطي على فضاء متجهي منته البعد V. عرِّف الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ L.

■ لتكن A التمثيل المصفوفي للمؤثر L بالنسبة لقاعدة ما في V. إذن، نعرِّف $\Delta(t)$ بأنها الحدودية المميزة لـ A.

23.16 بما أنه قد يكون لتطبيق خطي $L: V \to V$ تمثيلات مصفوفية عديدة، فهل من الممكن أن يكون للتطبيق L أكثر من حدودية مميزة واحدة؟

■ لا: فكل التمثيلات المصفوفية لـ L مصفوفات متشابهة، ويكون للمصفوفات المتشابهة نفس الحدودية المميزة (وفقاً المبرهنة 2.16). بتعبير آخر، الحدودية المميزة $\Delta(t)$ للتطبيق L وحيدة.

24.16 ليكن $L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $L(x,y,z) = (2x + 3y - 2z, 5y + 4z, x - z)$. أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ L.

■ نوجد تمثيلاً مصفوفياً لـ L. نستخدم القاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^3$، فنحصل على

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وبذلك،

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -3 & 2 \\ 0 & t-5 & -4 \\ -1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 5t - 12$$

25.16 ليكن V الفضاء المتجهي لدوال، بقاعدة $B = (\sin\theta, \cos\theta)$، وليكن D المؤثر الاشتقاقي على V. أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ D.

■ نوجد أولاً المصفوفة A التي تمثل D في القاعدة B:

$$D(\sin\theta) = \cos\theta = 0(\sin\theta) + 1(\cos\theta)$$

$$D(\cos\theta) = -\sin\theta = -1(\sin\theta) + 0(\cos\theta)$$

إذن، $[D] = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$. ينتج عن ذلك أن $\Delta(t) = t^2 + 1$ هي الحدودية المميزة لـ D.

2.16 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

سوف نستخدم في هذا القسم التعريفات التالية. ويكون لكل تعريف شكلان، أحدهما من أجل المصفوفات والثاني من أجل المؤثرات الخطية.

تعريفات (أ): لتكن A مصفوفة مربعة n- فوق حقل K. نقول عن سلّمي $\lambda \in K$ أنه قيمة ذاتية لـ A، إذا كان يوجد متجه (عمودي) غير صفري $v \in K^n$ بحيث أن $Av = \lambda v$. ويسمى كل متجه، يحقق هذه العلاقة، متجها ذاتياً لـ A مقرناً بالقيمة الذاتية λ. أما المجموعة E_λ، لكل المتجهات الذاتية المقرنة بـ λ، فهي فضاء جزئي في K^n يسمى «الفضاء الذاتي» لـ λ.

تستخدم كثيراً المصطلحات القيمة المميزة والمتجه المميز [أو القيمة الفعلية والمتجه الفعلي]، بدلاً من مصطلحي القيمة الذاتية والمتجه الذاتي.

تعريفات (ب): ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً على فضاء متجهي V فوق حقل K. نقول عن سلّمي $\lambda \in K$ أنه «قيمة ذاتية» لـ T، إذا كان يوجد متجه $v \in V$ يحقق $T(v) = \lambda v$. كل متجه يحقق هذه العلاقة يسمى عندئذ «متجهاً ذاتياً» لـ T مقرناً بـ λ. وتسمى المجموعة E_λ لكل مثل هذه المتجهات، وهي فضاء جزئي في V، بـ «الفضاء الذاتي» لـ λ.

نستخدم فيما يلي المبرهنة 3.16، التي سوف تبرهن في المسألة 37.16.

مبرهنة 3.16: إن المتجهات الذاتية غير الصفرية المقرنة بقيم ذاتية مختلفة تكوّن مجموعة مستقلة خطياً.

26.16 ليكن $I: V \to V$ التطبيق المحايد على أي فضاء متجهي غير صفري V، بيّن أن $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـ I. ما هو الفضاء الذاتي E_1 لـ $\lambda = 1$؟

■ لدينا $I(v) = v = 1v$، من أجل كل $v \in V$. هذه الـ $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـ I. كما أن $E_1 = v$ لأن كل متجه في V هو متجه ذاتي مقرن بـ 1.

27.16 ليكن $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ التطبيق الخطي الذي يدير كل متجه $v \in V$ بزاوية $\theta = \pi/2 = 90°$. بيّن هندسياً أن L ليس له قيم ذاتية، وبالتالي ليس له متجهات ذاتية.

■ لاحظ أنه لا يوجد متجه غير صفري يكون مضاعفاً لنفسه، وهو الشرط التعريفي لقيمة ذاتية. وبذلك، لا يكون لـ L قيم ذاتية، وبالتالي لا يملك متجهات ذاتية.

28.16 لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. بيّن أن (أ) $v_1 = (2,3)^T$ متجه ذاتي لـ A مقرنٌ بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 4$ لـ A؛ (ب) $v_2 = (1,1)^T$ متجه ذاتي لـ A مقرن بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$ لـ A.

■ (أ)

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1$$

وبذلك يكون v_1 متجها ذاتياً لـ A مقرناً بـ $\lambda_1 = 4$.

(ب)

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)v_2$$

وبذلك، يكون v_2 متجهاً ذاتياً لـ A مقرناً بـ $\lambda_2 = -1$.

29.16 ليكن V الفضاء المتجهي للدوال الإشتقاقية على $\mathbb{R}$، وليكن $D: V \to V$ المؤثر الاشتقاقي.

بيّن أن الدوال $e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \ldots, e^{a_n t}$، حيث $a_1, \ldots, a_n$ سلّميات غير صفرية مختلفة، هي متجهات ذاتية لـ D. بأي قيمة ذاتية λ_i تقرن $e^{a_i t}$؟ بيّن أن هذه الدوال مستقلة خطياً.

■ لدينا $D(e^{a_i t}) = a_i e^{a_i t}$؛ وبالتالي، يكون $e^{a_i t}$ متجهاً ذاتياً مقرناً بالقيمة الذاتية $\lambda_i = a_i$. نعرف، من مبرهنة 3.16 أن هذه الدوال مستقلة خطياً، لانها متجهات ذاتية غير صفرية مقرنة بقيم ذاتية مختلفة.

30.16 لتكن λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي $T: V \to V$. وليكن E_λ الفضاء الذاتي لـ λ ، أي مجموعة كل المتجهات الذاتية لـ T المقرنة بـ λ . بيّن أن E_λ فضاء جزئي في V، أي بيّن أن:

(أ) إذا $v \in E_\lambda$، إذن $kv \in E_\lambda$، من أجل أي سلّمي $k \in K$.

(ب) إذا $u, v \in E_\lambda$، إذن $u + v \in E_\lambda$.

■ (أ) بما أن $v \in E_\lambda$، إذن $T(v) = \lambda v$. وبالتالي، $T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$. وبذلك، $kv \in E_\lambda$.

(ب) بما أن $u, v \in E_\lambda$، يكون لدينا $T(u) = \lambda u$ و $T(v) = \lambda v$. إذن، $T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$. وبذلك $u + v \in E_\lambda$.

مبرهنة 4.16: ليكن $T: V \to V$ مؤثر خطياً على فضاء متجهي فوق K. إذن، تكون $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لـ T إذا وفقط إذا كان المؤثر $\lambda I - T$ شاذاً. ويكون نواة $\lambda I - T$ هي الفضاء الذاتي لـ λ .

31.16 أثبت مبرهنة 4.16 والتي تقدم تمييزاً مهماً للقيم الذاتية يستخدم كثيراً كتعريف لها.

■ يكون السلّمي λ قيمة ذاتية لـ T إذا وفقط إذا كان يوجد متجه غير صفري v بحيث أن $T(v) = \lambda v$ أو $(\lambda I)(v) - T(v) = 0$ أو $(\lambda I - T)(v) = 0$، أي يكون $\lambda I - T$ شاذاً. لدينا أيضاً أن v يكون في الفضاء الذاتي لـ λ إذا وفقط إذا تحققت العلاقة أعلاه، وبالتالي، يكون v في نواة $\lambda I - T$.

مبرهنة 5.16: يمكن أن يمثل مؤثر خطي $T: V \to V$ بواسطة مصفوفة قطرية B إذا وفقط إذا كان لـ V قاعدة متكونة من متجهات ذاتية لـ T. وفي هذه الحالة، تكون العناصر القطرية لـ B القيم الذاتية المقابلة.

32.16 أثبت مبرهنة 5.16.

■ يمكن تمثيل T بواسطة المصفوفة القطرية

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

إذا وفقط إذا كانت توجد قاعدة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ لـ V تحقق

$$\begin{aligned} T(v_1) &= k_1 v_1 \\ T(v_2) &= \qquad k_2 v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ T(v_n) &= \qquad\qquad k_n v_n \end{aligned}$$

أي أن تكون المتجهات $v_1, \ldots, v_n$ متجهات ذاتية لـ T مقرنة بـ القيم الذاتية $k_1, \ldots, k_n$ على الترتيب.

مبرهنة 6.16: تكون مصفوفة مربعة A -n مشابهة لمصفوفة قطرية B إذا وفقط إذا كان لـ A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً. في هذه الحالة، تكون العناصر القطرية لـ B هي القيم الذاتية المقابلة، وتكون $B = P^{-1}AB$ حيث P المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية.

33.16 الجزء الأول من المبرهنة إعادة صياغة للمبرهنة 5.16 من أجل المصفوفات. نحتاج فقط إلى أن نبين أن أعمدة P هي المتجهات الذاتية. الآن، يمكن النظر إلى A على أنها مصفوفة تطبيق خطي T على K^n نسبة للقاعدة المعتادة $\{e_i\}$ لـ K^n، والنظر إلى B على أنها مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\{v_i\}$ للمتجهات الذاتية، و P على أنها مصفوفة تغيير القاعدة من $\{e_i\}$ إلى $\{v_i\}$. ولكن P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات v_i، لأن $\{e_i\}$ هي القاعدة المعتادة. وهذا يكمل إثبات المبرهنة.

34.16 حقق مبرهنة 6.16 من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ في المسألة 28.16.

■ نجد من المسألة 28.16، أن A تمتلك متجهين ذاتيين مستقلين خطياً $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. نضع $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}$

إذن $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$. إذن، تكون A مشابهة للمصفوفة القطرية

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

وكما هو متوقع، يكون العنصران القطريان 4 و -1 في المصفوفة القطرية B هما القيمتين الذاتيتين المقابلتين للمتجهين الذاتيين.

مبرهنة 7.16: لتكن A مصفوفة مربعة -n فوق حقلٍ K. يكون العدد السلّمي $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا كان λ جذراً للحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

35.16 أثبت مبرهنة 7.16، والتي تستخدم كخوارزمية للتقطير في قسم 3.16.

■ الآن، يكون λ قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا كانت المصفوفة $\lambda I - A$ شاذة. علماً بأن $\lambda I - A$ تكون شاذة إذا وفقط إذا كان $\det(\lambda I - A)=0$. ولكن $\det(\lambda I - A)=0$ إذا وفقط إذا كان λ جذراً لـ $\Delta(t)$. وبذلك، تكون المبرهنة قد أثبتت.

نتيجة 8.16: لنفترض أن الحدودية المميزة $\Delta(t)$، لمصفوفة A مربعة -n، جداء لعدد n من العوامل المختلفة، لتكن $\Delta(t)=(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_n)$. إذن، تكون A مشابهة لمصفوفة قطرية تكون الـ a_i عناصرها القطرية.

36.16 أثبت نتيجة 8.16؛ والتي تعطينا شرطاً كافياً لكي تكون مصفوفةٌ قابلة ـ للتقطير.

■ نعرف، من مبرهنة 7.16، أن الـ a_i هي القيم الذاتية لـ A. لتكن v_i المتجهات الذاتية المقابلة. من مبرهنة 3.16، نجد أن المتجهات v_i مستقلة خطياً وتشكل بالتالي قاعدة لـ K^n. إذن، تكون A قابلة للتقطير (بواسطة مبرهنة 6.16).

37.16 أثبت مبرهنة 3.16: لتكن $v_1,\ldots,v_n$ متجهات ذاتية غير صفرية، لمؤثرٍ $T: V \to V$، مقرنة بقيم ذاتية مختلفة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. إذن، تكون $v_1,\ldots,v_n$ مستقلة خطياً.

■ يكون البرهان بالإستقراء على n. إذا $n=1$، إذن يكون v_1 مستقلاً خطياً لأن $v_1 \neq 0$. لتكن $n>1$، ولنفترض أن

$$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n=0 \qquad (1)$$

حيث الـ a_i أعداد سلّمية. نطبق T على العلاقة أعلاه، فنحصل بسبب الخطية على $a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+\ldots+a_nT(v_n)=T(0)=0$. ولكن $T(v_i)=\lambda_i v_i$ فرضياً؛ وبالتالي

$$a_1\lambda_1v_1+a_2\lambda_2v_2+\ldots+a_n\lambda_nv_n=0 \qquad (2)$$

لدينا من جهة أخرى، وبضرب (1) في λ_n، أن

$$a_1\lambda_nv_1+a_2\lambda_nv_2+\ldots+a_n\lambda_nv_n=0 \qquad (3)$$

الآن، نطرح (3) من (2): $a_1(\lambda_1-\lambda_n)v_1+a_2(\lambda_2-\lambda_n)v_2+\ldots+a_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)v_{n-1}=0$. ونجد، بالاستقراء، أن $v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}$ مستقلة خطياً؛ وبالتالي، يكون كل واحد من المعاملات أعلاه 0. بما أن الـ λ_i مختلفة، إذن $\lambda_i-\lambda_n \neq 0$، من أجل $i \neq n$. إذن، $a_1=\ldots=a_{n-1}=0$. نعوض بهذا في (1)، نحصل على $a_nv_n=0$، وبالتالي $a_n=0$. وهكذا تكون الـ v_i مستقلة خطياً.

38.16 لتكن λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي $T: V \to V$. عرّف «التكرار الجبري» و «التكرار الهندسي» لـ λ.

■ يعرَّف التكرار الجبري لـ A بأنه تكرار λ كجذر للحدودية المميزة لـ T؛ أما التكرار الهندسي فيعرّف بأنه بُعْد فضائها الذاتي.

مبرهنة 9.16: لتكن A قيمة ذاتية لمؤثر خطي $T: V \to V$. إذن، التكرار الهندسي لـ λ لا يتجاوز تكرارها الجبري.

39.16 اثبت مبرهنة 9.16.

■ لنفترض أن التكرار الهندسي لـ λ يكون r. إذن، يكون لـ λ عدد r من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً $v_1,\ldots,v_r$. نوسع المجموعة $\{v_i\}$ إلى قاعدة لـ V: $\{v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s\}$. يكون لدينا

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda v_1 \\
T(v_2) &= \qquad \lambda v_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(v_r) &= \qquad\qquad \lambda v_r \\
T(w_1) &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \cdots + b_{1s}w_s \\
T(w_2) &= a_{21}v_1 + \cdots + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + \cdots + b_{2s}w_s \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(w_s) &= a_{s1}v_1 + \cdots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \cdots + b_{ss}w_s
\end{aligned}$$

وتكون مصفوفة T في القاعدة أعلاه هي

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\
0 & \lambda & \cdots & 0 & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{sr} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1} & b_{2s} & \cdots & b_{ss}
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

حيث $A = (a_{ij})^T$ و $B = (b_{ij})^T$.

بما أن M مصفوفة مركبة مثلثية، فإن الحدودية المميزة لـ λI_r، وهي $(t-\lambda)^r$، لا بد أن تقسم الحدودية المميزة لـ M وبالتالي T. وبذلك، يكون التكرار الجبري لـ λ من أجل المؤثر T مساوٍ على الأقل لـ r، كما هو مطلوب.

40.16 بيِّن أن 0 يكون قيمة ذاتية لـ T إذا وفقط إذا كان T شاذاً.

■ لدينا أن 0 قيمة ذاتية لـ T إذا وفقط إذا كان يوجد متجه غير صفري v بحيث أن $T(v) = 0v = 0$، أي أن T تطبيق شاذ.

41.16 لتكن A و B مصفوفتين مربعتين -n. بيِّن أن AB و BA يكون لهما نفس القيم الذاتية.

■ بما أن جداء المصفوفات غير الشاذة يكون مصفوفة غير شاذة، فإن القضايا التالية تكون متكافئة: (i) يكون 0 قيمة ذاتية لـ AB (ii) AB شاذة، (iii) A (أو B) شاذة، (iv) BA شاذة، (v) 0 قيمة ذاتية لـ BA.

لنفترض الآن أن λ قيمة غير صفرية لـ AB. إذن، يوجد متجه غير صفري v بحيث أن $ABv = \lambda v$. نضع $w = Bv$. بما أن $\lambda \neq 0$ و $v \neq 0$، إذن $Aw = ABv = \lambda v \neq 0$، وبذلك $w \neq 0$. ولكن w متجه ذاتي لـ BA مقرن بالقيمة الذاتية λ، لأن $BAw = BABv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$. وبالتالي، تكون λ قيمة ذاتية لـ BA. بالمثل، أي قيمة ذاتية لـ BA هي أيضاً قيمة ذاتية لـ AB. وبذلك، يكون لـ AB و BA نفس القيم الذاتية.

3.16 حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، تقطير المصفوفات

نحسب في هذا القسم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية من أجل مصفوفة مربعة معطاة A، ونحدِّد وجود أو عدم وجود مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية. تحديداً، سوف نطبق الخوارزمية التالية على المصفوفة A.

خوارزمية التقطير:

خطوة 1. نوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

خطوة 2. نحسب جذور $\Delta(t)$ لنحصل على القيم الذاتية لـ A.

خطوة 3. نكرر (أ) و (ب) من أجل كل قيمة ذاتية λ لـ A:

(أ) نكوّن $M = A - \lambda I$ بطرح λ من عناصر A القطرية، أو نكوّن $M' = \lambda I - A$ بالتعويض بـ $t = \lambda$ في $tI - A$.

(ب) نوجد قاعدة للفضاء الحلّي للمنظومة المتجانسة $MX = 0$. [متجهات هذه القاعدة هي متجهات ذاتية لـ A مستقلة خطياً، مقرنة بـ λ.]

خطوة 4: ننظر في التجميع $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ لكل المتجهات الذاتية التي تحصلنا عليها في خطوة 3:

(أ) إذا $m \neq n$، تكون A قابلة للتقطير.

(ب) إذا $m = n$، نكوّن المصفوفة P التي أعمدتها المتجهات الذاتية $v_1, v_2, \ldots, v_n$. إذن

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

حيث λ_i القيمة الذاتية المقابلة للمنجه v_i.

المسائل 42.16-46.16 تتعلق بتطبيق خوارزمية التقطير على $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

42.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■ نكوّن المصفوفة المميزة $tI - A$ لـ A:

$$tI - A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix}$$

الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A تكون حدودبنها:

$$\Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1)$$

أو، بشكل بديل، $tr(A) = 1 + 3 = 4$ و $|A| = 3 - 8 = -5$، وبذلك، $\Delta(t) = t^2 - 4t - 5$.

43.16 أوجد قيم A الذاتية.

■ إن الجذرين $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -1$ للحدودية المميزة $\Delta(t)$ هما القيمتان الذاتيتان لـ A.

44.16 أوجد المتجه v_1 لـ A المقرن بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 5$.

■ نعوض بـ $t = 5$ في المصفوفة $tI - A$ لنحصل على المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. تشكل المتجهات الذاتية المقرنة بـ $\lambda_1 = 5$ حل المنظومة المتجانسة $MX = 0$، أي أن

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad x - y = 0$$

للمنظومة حلّ مستقل واحد؛ مثلا $y = 1$، $x = 1$. وبذلك، يكون $v_1 = (1,1)$ متجها ذاتياً يُوَلِّدُ الفضاء الذاتي لـ $\lambda_1 = 5$.

45.16 أوجد متجهاً ذاتياً v_2 لـ A مقرناً بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$.

■ نعوض بـ $t = -1$ في $tI - A$ لنحصل على $M = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ والتي تقود إلى المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad x + 2y = 0$$

للمنظومة حلّ مستقل واحد: مثلاً، $x = 2$، $y = -1$. وبذلك، يكون $v_2 = (2,-1)$ متجهاً ذاتياً يولّد الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2 = -1$.

46.16 أوجد مصفوفة عكوسة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية.

■ لتكن P المصفوفة التي عموديها المتجهين الذاتيين أعلاه: $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. إذن، تكون $B=P^{-1}AP$ المصفوفة القطرية التي مدخليها القطريين القيمتين الذاتيين المقابلتين:

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

[**ملاحظة:** هنا، P هي مصفوفة الانتقال من القاعدة المعتادة لـ R^2 إلى القاعدة $\{v_1,v_2\}$. وبالتالي، تكون B التمثيل المصفوفي للمؤثر A في هذه القاعدة الجديدة].

47.16 أوجد كل القيم الذاتية ومجموعة عظمى المتجهات ذاتية مستقلة ذاتياً للمصفوفة $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

■ نوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)=t^2+3t-10=(t+5)(t-2)$. ثم القيمتين الذاتيتين $\lambda_1=-5$ و $\lambda_2=2$.

(i) نطرح $\lambda_1=-5$ (أو نضيف 5) من عنصري قطر B لنحصل على $M=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ والتي تقابل المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}6x+3y=0\\ 2x+\ \ y=0\end{matrix} \quad \text{أو} \quad 2x+y=0$$

هنا، $v_1=(1,-2)$ حلٌ غير - صفري للمنظومة. وبالتالي، يكون v_2 متجهاً ذاتياً لـ B مقرناً بـ $\lambda_1=-5$.

(ii) نطرح $\lambda_2=2$ من عنصري قطر B لنحصل على $M=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ والتي تقابل المنظومة المتجانسة $x-3y=0$.

هنا، $v_2=(3,1)$ حلّ غير صفري للمنظومة، وبالتالي يكون v_2 متجهاً ذاتياً مقرناً بـ $\lambda_2=2$.

هنا $v_2=(3,1)$ الحل غير الصفري للمنظومة وبالتالي v_2 متجه ذاتي ينتمي إلى $\lambda_2=2$. المجموعة $\{v_1=(1,-2),v_2=(3,1)\}$ هي المجموعة القصوى للمتجهات الذاتية المستقلة للمصفوفة B.

48.16 هل المصفوفة B أعلاه قابلة - للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث أن $P^{-1}BP$ قطرية.

■ بما أن المتجهين الذاتيين $v_1=(1,-2)$ و $v_2=(3,1)$ يشكلان قاعدة لـ R^2، فإن B تكون قابلة للتقطير. لتكن P المصفوفة التي عموديها v_1 و v_2، أي $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. إذن، $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

49.16 أوجد كل القيم الذاتية ومجموعة قصوى من متجهات ذاتية مستقلة ذاتية للمصفوفة $C=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

■ نوجد $\Delta(t)=t^2-8t+16=(t-4)^2$. وبذلك، تكون $\lambda=4$ القيمة الذاتية الوحيدة. نطرح $\lambda=4$ من قطر C، فنحصل على $M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة المتجانسة $x+y=0$. هنا، $v=(1,1)$ حلّ غير - صفري للمنظومة، وبالتالي يكون v متجهاً ذاتياً لـ C مقرناً بـ $\lambda=4$. بما أنه لا توجد قيمة ذاتية أخرى، فإن $\{v=(1,1)\}$ هي المجموعة القصوى للمتجهات الذاتية المستقلة خطياً.

50.16 هل المصفوفة C أعلاه قابلة للتقطير؟ إذا نعم، أوجد P بحيث أن $P^{-1}CP$ قطرية.

■ C ليست قابلة للتقطير، لأن عدد المتجهات الذاتية المستقلة خطياً لا يساعد بعد $V=R^2$. وبذلك، لا توجد مصفوفة P مثل هذه.

51.16 أوجد كل القيم الذاتية ومجموعة قصوى من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً للمصفوفة $D=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

■ لدينا، هنا، $\Delta(t)=|tI-D|=t^2-3t-28=(t-7)(t+4)$. وبذلك، القيمتان الذاتيتان لـ D هما $\lambda_1=7$ و $\lambda_2=-4$.

(i) نطرح $\lambda_1=7$ من قطر D، فنحصل على $M=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة

$$-2x + 6y = 0 \quad\quad x - 3y = 0 \text{ أو }$$
$$3x - 9y = 0$$

هنا، $v_1 = (3,1)$ هو المتجه الذاتي لـ $\lambda_1 = 7$.

(ii) نطرح $\lambda_2 = -4$ [أو نضيف 4] من قطر D فنحصل على $M = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة $3x + 2y = 0$.
هنا، $v_2 = (2,-3)$ حلٌ وبالتالي يكون متجهاً ذاتياً لـ $\lambda_2 = -4$. وبذلك، تكون $\{v_1 = (3,1), v_2 = (2,-3)\}$ المجموعة القصوى من متجهين ذاتيين مستقلين ذاتياً لـ D.

المسائل 52.16-55.16 تتعلق بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

52.16 أوجد كل القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها لـ A بافتراض أن A مصفوفة حقيقية.

■ هنا $\Delta(t) = |tI - A| = t^2 + 1$. بما أنه ليس لـ $t^2 + 1$ حلول في R، فإن A لا تمتلك أي قيم ذاتية وبالتالي ليس لها متجهات ذاتية.

53.16 هل A قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث أن $P^{-1}AP$ تكون قطرية.

■ بالنظر إليها على أنها مصفوفة حقيقية، لا يكون لـ A متجهات ذاتية، وبالتالي لا تكون A قابلة ـ للتقطير.

54.16 أوجد كل القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقرنة بها لـ A، بافتراض أن A مصفوفة عقدية.

■ هنا أيضاً $\Delta(t) = |tI - A| = t^2 + 1$. الآن، $\lambda_1 = i$ و $\lambda_2 = -i$ قيمتان ذاتيتان لـ A.

(i) نضع $t = i$ في $tI - B$ فنحصل على المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ -2 & i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أو } \begin{cases} (i-1)x + \quad\quad y = 0 \\ -2x + (i+1)y = 0 \end{cases} \text{ أو } (i-1)x + y = 0$$

يكون للمنظومة حلّ مستقل واحد فقط، هو $x = 1$، $y = 1 - i$. وبذلك، يكون $v_1 = (1, 1-i)$ متجهاً ذاتياً يولّد الفضاء الذاتي لـ $\lambda_1 = i$.

(ii) نعوض بـ $t = -i$ في $tI - B$ فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix} -i-1 & 1 \\ -2 & -i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أو } \begin{cases} (-i-1)x + \quad\quad y = 0 \\ -2x + (-i-1)y = 0 \end{cases} \text{ أو } (-i-1)x + y = 0$$

يكون للمنظومة حلّ مستقل واحد فقط، وهو $y = 1 + i$، $x = 1$. وبذلك، يكون $v_2 = (1, 1+i)$ متجهاً ذاتياً لـ A يولّد الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2 = -1$.

55.16 هل A قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث تكون $P^{-1}AD$ قطرية.

■ A، بكونها مصفوفة عقدية، تكون قابلة ـ للتقطير. لتكن P المصفوفة التي عموديها v_1 و v_2، أي $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$.
إذن، $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

ملاحظة: تشير المسائل 52.16-55.16 إلى أن موضوع القيم والمتجهات الذاتية وقابلية ـ التقطير لمصفوفة A يعتمد على الحقل K، تحت الدراسة؛ لأن جذور الحدودية المميزة $\Delta(t)$ تعتمد على الحقل K.

المسائل 56.16-60.16 تتعلق بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

56.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■

$$\Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - 12t - 16$$

أو، بشكل بديل، $\Delta(t)=t^3-\text{tr}(A)t^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})t-|A|=t^3-12t-16$. [هنا، A_{ii} متعامل a_{ii} في المصفوفة A].

57.16 أوجد القيم الذاتية لـ A.

■ بافتراض أن $\Delta(t)$ لها جذور منطقة، فإنها يجب أن تكون ضمن ± 1 ، ± 2 ، ± 4 ، ± 16 . نجرب، فنحصل على

$$\begin{array}{r|l} -2 & 1+0-12-16 \\ & \quad -2+\;\;4+16 \\ \hline & 1-2-\;\;8+\;\;0 \end{array}$$

وبذلك، يكون $t=-2$ جذراً لـ $\Delta(t)$ ، وبالتالي $\Delta(t)=(t+2)(t^2-2t-8)=(t+2)(t-4)(t+2)=(t+2)^2(t-4)$.
ينتج عن ذلك أن $\lambda_1=-2$ و $\lambda_2=4$ هما القيمتان الذاتيتان لـ A.

58.16 أوجد قاعدة للفضاء الذاتي لـ $\lambda_1=-2$.

■ نعوض بـ $t=-2$ في $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}-3x+3y-3z=0\\-3x+3y-3z=0\\-6x+6y-6z=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad x-y+z=0$$

يكون للمنظومة حلّان مستقلان، وهما $x=1$ ، $y=1$ ، $z=0$ و $x=1$ ، $y=0$ ، $z=-1$. وبذلك، يكون $u=(1,1,0)$ و $v=(1,0,-1)$ متجهين ذاتيين مستقلين يولّدان الفضاء الذاتي لـ $\lambda_1=-2$ ؛ أي أن u و v يشكلان قاعدة للفضاء الذاتي لـ $\lambda_1=-2$. يعني هذا أن كل متجه ذاتي آخر مقرن بـ $\lambda_1=-2$ يكون تركيبة خطية في u و v.

59.16 ما هو التكرار الجبري والتكرار الهندسي للقيمة الذاتية $\lambda_1=-2$ ؟

■ بما أن $t+2$ تظهر مرتين في الحدودية المميزة $\Delta(t)=(t+2)^2(t-4)$ ، فإن التكرار الجبري لـ λ_1 يكون 2. التكرار الهندسي لـ λ_1 يكون إثنين أيضاً، لأن $\dim E_{\lambda_1}=2$ ، حيث E_{λ_1} الفضاء الذاتي لـ λ_1 . [قارن بالمسألة 64.16].

60.16 أوجد قاعدة من أجل الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2=4$.

■ نعوض بـ $t=4$ في $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix}3&3&-3\\-3&9&-3\\-6&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}3x+3y-3z=0\\-3x+9y-3z=0\\-6x+6y\qquad\;=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}x+\;\;y-z=0\\ \qquad 2y-z=0\end{cases}$$

يكون للمنظومة متغير حرّ واحد، وبالتالي، فإن أي حلّ خاص غير صفري، مثلاً $x=1$ ، $y=1$ ، $z=2$ ، يُولّد الفضاء الحلّي. وبذلك، يكون $w=(1,1,2)$ متجهاً ذاتياً لـ A يولّد الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2=4$ ، ويشكل قاعدة له.

61.16 هل A قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية.

■ بما أن A لها ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة خطياً، فإن A تكون قابلة للتقطير. لتكن P المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة:

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

وكما هو متوقع، فإن عناصر $P^{-1}AP$ القطرية هي القيم الذاتية لـ A المقابلة لأعمدة P.

المسائل 62.16-66.16 تتعلق بالمصفوفة $B=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}$

62.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والقيم الذاتية لـ B.

■ $$\Delta(t) = |tI - B| = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{vmatrix} = t^3 - 12t - 16$$

نجد، من المسألة 57.16، أن $\Delta(t) = (t+2)^2(t-4)$. وبذلك، تكون $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_2 = 4$ القيمتين الذاتيتين لـ B.

63.16 أوجد قاعدة من أجل الفضاء الذاتي لـ $\lambda_1 = -2$.

■ نعوض بـ $t = -2$ في $tI - B$ فنحصل على المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 7x - 7y + z = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

يكون للمنظومة حلّ مستقل واحد فقط، وهو $x = 1$، $y = 1$، $z = 0$. وبذلك، يشكل $u = (1,1,0)$ قاعدة للفضاء الذاتي لـ $\lambda_1 = 2$.

64.16 ما هو التكرار الجبري والتكرار الهندسي لـ $\lambda_1 = -2$.

■ التكرار الجبري لـ λ_1 يكون إثنين لأن $t + 2$ تظهر مرتين في الحدودية المميزة $\Delta(t) = (t+2)^2(t-4)$. ولكن التكرار الهندسي لـ λ_1 يساوي واحداً لأن $\dim E_{\lambda_1} = 1$ ، حيث E_{λ_1} الفضاء الذاتي لـ λ_1 . [قارن بالمسألة 59.16]

65.16 أوجد قاعدة من أجل الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2 = 4$.

■ نعوض بـ $t = 4$ في $tI - B$ فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 7x - y + z = 0 \\ 7x - y + z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 7x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ويكون للمنظومة حلٌّ مستقل واحد فقط، وهو $x = 0$، $y = 1$، $z = 1$. وبذلك، يشكل $v = (0,1,1)$ قاعدة لفضاء $\lambda_2 = 4$ الذاتي.

66.16 هل B قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث أن $P^{-1}BP$ تكون قطرية.

■ بما B تمتلك متجهين ذاتيين مستقلين كحد أقصى، فإنها لا تكون مشابهة لمصفوفة قطرية، أي أن B ليست قابلة للتقطير.

67.16 هل المصفوفتان A و B أعلاه متشابهتان.

■ بما أنه يمكن تقطير A، ولا يمكن ذلك في حالة B، فإنهما ليستا متشابهتين، رغم أن لهما نفس الحدودية المميزة.

68.16 بيِّن أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ليست قابلة للتقطير.

■ إن الحدودية المميزة لـ A هي $\Delta(t) = (t-1)^2$ ؛ وبذلك، فإن 1 هي قيمتها الذاتية الوحيدة. نبحث عن قاعدة للفضاء الذاتي للقيمة الذاتية 1. نعوض بـ $t = 1$ في $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة.

69.16 لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. هل A قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث أن $P^{-1}AP$ تكون قطرية.

■ هنا، $\Delta(t) = t^2 - \text{tr}(A)t + |A| = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$. وبالتالي، تكون $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 4$ قيمتين ذاتيتين لـ A. نحسب المتجهات الذاتية المقابلة:

(i) نطرح $\lambda_1 = 1$ من قطر A فنحصل على $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة المتجانسة $x + 2y = 0$. هنا، $v_1 = (2,-1)$ حلٌّ غير صفري للمنظومة وبالتالي يكون متجهاً ذاتياً لـ A مقرناً بـ $\lambda_1 = 1$.

(ii) نطرح $\lambda_2 = 4$ من قطر A فنحصل على $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة المتجانسة $x - y = 0$. هنا، $v_2 = (1,1)$ حلٌّ غير صفري وبذلك يكون متجهاً ذاتياً لـ مقرناً لـ $\lambda_2 = 4$.

لتكن P المصفوفة التي عموديها v_1 و v_2، أي $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. إذن $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

70.16 لنفترض، في المسألة 69.16، أننا وضعنا $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (بمبادلة العمودين). هل تظل P تحول A إلى الشكل القطري؟

■ نعم، ولكن لدينا الآن $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. بتعبير آخر، إن ترتيب القيم الذاتية في $P^{-1}AP$ يقابل ترتيب المتجهات الذاتية في P.

71.16 لتكن $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. هل B قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث تكون $P^{-1}BP$ قطرية.

■ هنا، $\Delta(t) = t^2 - \mathrm{tr}(B)t + |B| = t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2)$. وبذلك، تكون $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -2$ قيمتين ذاتيتين لـ B:

(i) نطرح $\lambda_1 = 5$ من قطر B، فنحصل على $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة المتجانسة $3x - 4y = 0$. هنا، $v_1 = (4,3)$ حلّ غير صفري.

(ii) نطرح $\lambda_2 = -2$ [أو نضيف 2] من قطر B فنحصل على $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ التي تقابل المنظومة $x + y = 0$، والتي لها حلّ غير صفري $v_2 = (1,-1)$.

بما أن لـ B متجهين ذاتيين مستقلين، فإنها تكون قابلة ـ للتقطير. نضع $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. إذن، $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

المسائل 76.16-72.16 تتعلق بالمصفوفة $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

72.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ C.

■
$$\Delta(t) = |tI - C| = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 1 \\ -2 & t-5 & 2 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 11t^2 + 39t - 45$$

أو، بشكل بديل، $\Delta(t) = t^3 - \mathrm{tr}(C)t^2 + (C_{11} + C_{22} + C_{33})t - |C| = t^3 - 11t^2 - 39t - 45$. [هنا C_{ii} هو متعامل c_{ii} في C. أنظر المسألة 9.16].

73.16 أوجد القيم الذاتية لـ C.

■ بافتراض أن $\Delta(t)$ تمتلك جذراً منطقاً، فإنه يجب أن يكون ضمن ± 1 ، ± 3 ، ± 5 ، ± 9 ، ± 45 . نجرّب، فنحصل على

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 - 11 + 39 - 45 \\ & \quad\; 3 - 24 + 45 \\ \hline & 1 - \;\, 8 + 15 + \;\, 0 \end{array}$$

وبذلك، يكون $t = 3$ جذراً لـ $\Delta(t)$ ، ويكون لدينا $\Delta(t) = (t-3)(t^2 - 8t + 15) = (t-3)^2(t-5)$. ينتج عن ذلك أن $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 5$ هما القيمتان الذاتيتان لـ C.

74.16 أوجد المجموعة القصوى للمتجهات الذاتية المستقلة خطياً لـ C.

■ نحسب المتجهات الذاتية المستقلة لكل قيمة ذاتية لـ C:

(i) نطرح $\lambda_1 = 3$ من قطر C فنحصل على المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

والتي تقابل المنظومة المتجانسة $x+y-z=0$. هنا، $u=(1,-1,0)$ و $v=(1,0,1)$ حلاّن مستقلان.

(ii) نطرح $\lambda_2=5$ من قطر C فنحصل على

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

والتي تقابل المنظومة المتجانسة

$$\begin{aligned}-x+y-\ z&=0\\ 2x\quad\ -2z&=0\\ x+y-3z&=0\end{aligned}\qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned}x\qquad -z&=0\\ y-2z&=0\end{aligned}$$

حيث z وحده متغير حر. هنا، يكون $w=(1,2,1)$ حلاً. وبذلك، تكون $\{u=(1,-1,0),v=(1,0,1),w=(1,2,1)\}$ مجموعة قصوى لمتجهات ذاتية مستقلة خطياً لـ C.

75.16 هل يمكنك معرفة أن u، v، w مستقلة خطياً؟

■ إخترنا u و v لكي يكونا حلّين مستقلين للمنظومة المتجانسة $x+y-z=0$. من جهة أخرى، w مستقلة ذاتياً عن u و v لأنها مقرنة بقيمة ذاتية مختلفة لـ C.

76.16 هل C قابلة للتقطير؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد P بحيث تكون $P^{-1}CP$ قطرية.

■ C قابلة للتقطير، لأن لها ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة خطياً. لتكن P المصفوفة التي أعمدتها u، v، w على الترتيب؛ أي

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \text{إذن} \qquad P^{-1}CP=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

المسائل 77.16-81.16 تتعلق بالمؤثر الخطي $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ المعرّف بواسطة $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

77.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ T.

■ نبحث أولاً عن تمثيل مصفوفي لـ T، وليكن بالنسبة للقاعدة المعتادة لـ $\mathbf{R}^3$:

$$A=[T]=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

وبذلك تكون الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ T:

$$\Delta(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-2 & -1 & 0\\ 0 & t-1 & 1\\ 0 & -2 & t-4\end{vmatrix}=t^3-7t^2+16t-12$$

78.16 أوجد القيم الذاتية لـ T.

■ بافتراض أن لـ$\Delta(t)$ جذراً منطقاً، فإنه يجب أن يكون ضمن ±1، ±2، ±3، ±4، ±6، ±12. نجرب، فنحصل على

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1-7+16-12\\ & \quad\ \ 2-10+12\\ \hline & 1-5+\ \ 6+\ \ 0\end{array}$$

وبذلك، يكون $t=2$ جذراً لـ $\Delta(t)$، وتكون $\Delta(t)=(t-2)(t^2-5t+6)=(t-2)^2(t-3)$. ينتج عن ذلك أن $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=3$ هما القيمتان الذاتيتان لـ T.

79.16 أوجد قاعدة لفضاء $\lambda_1 = 2$ الذاتي.

■ نعوض بـ $t = 2$ في $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} -y = 0 \\ y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

ويكون للمنظومة حل مستقل واحد فقط، هو $x = 1$، $y = 0$، $z = 0$. وبذلك، يشكل $u = (1,0,0)$ قاعدة من أجل فضاء $\lambda_1 = 2$ الذاتي.

80.16 أوجد قاعدة من أجل الفضاء الذاتي لـ $\lambda_2 = 3$.

■ نعوض بـ $t = 3$ في $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

يكون للمنظومة حل مستقل واحد فقط، هو $x = 1$، $y = 1$، $z = -2$. وبذلك، يشكل $v = (1,1,-2)$ قاعدة للفضاء الذاتي لـ $\lambda_2 = 3$.

81.16 هل T قابلة للتقطير، أي هل يمكن تمثيل T بواسطة مصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة ما في $\mathbf{R}^3$؟

■ T ليست قابلة للتقطير، لأن لها فقط متجهين ذاتيين مستقلين خطياً، ولكن $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

المسائل 84.16-82.16 تتعلق بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

82.16 أوجد الحدودية المميزة لـ A.

■ $$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 5 \\ 9 & -1 & t+2 \end{vmatrix} = (t-3)(t^2+1)$$

83.16 بافتراض أن A مصفوفة فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$، هل تكون قابلة للتقطير؟

■ لا يكون لـ A، بكونها مصفوفة حقيقية، إلا قيمة ذاتية واحدة $\lambda_1 = 3$ بتكرار جبري 1. وبذلك، يكون لـ $\lambda_1 = 3$ متجه ذاتي مستقل واحد فقط، وبالتالي لا تكون A قابلة للتقطير فوق الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$.

84.16 بافتراض أن A مصفوفة فوق الحقل العقدي $\mathbf{C}$، هل تكون A قابلة للتقطير؟

■ الآن، A تمتلك ثلاث قيم ذاتية مختلفة 3، i، $-i$، وتقابلها ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة خطياً. وبذلك، توجد مصفوفة عكوسة P فوق الحقل العقدي $\mathbf{C}$، بحيث أن

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

أي أن A قابلة للتقطير.

85.16 تبين المسألة 52.16 أنه ليس للمصفوفة الحقيقية $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ قيم ذاتية ولا متجهات ذاتية حقيقية. أثبت أن كل مصفوفة M حقيقية 3×3 تمتلك على الأقل قيمة ذاتية واحدة ومتجها ذاتياً واحداً. عَمِّم.

■ إن الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ M ذات درجة 3، ونحن نعرف أن لكل حدودية حقيقية من الدرجة 3 جذر حقيقي، لأن الجذور العقدية تأتي في أزواج مترافقة. وبذلك، يكون لـ M قيمة ذاتية λ والتي يكون لها، تعريفاً، متجه ذاتي. بالمثل، كل مصفوفة حقيقية ذات مرتبة فردية يجب أن يكون لها قيمة ذاتية (حقيقية)، وبالتالي متجه ذاتي.

86.16 هل توجد نتيجة مشابهة للمصفوفات العقدية؟

■ من النظرية الرئيسية للجبر [كل حدودية في C لها جذر]، الحدودية المميزة $\Delta(t)$ يجب أن يكون لها جذر. [أنظر المبرهنة 10.16].

4.16 الحدودية الأصغرية

تعريف: لتكن A مصفوفة مربعة -n فوق حقلٍ K، ولنرمز بـ J(A) إلى تجميع كل الحدوديات f(t) التي تحقق f(A) = 0. [لاحظ أن J(A) ليس مجموعة خالية لأن الحدودية المميزة $\Delta_A(t)$ لـ A تنتمي لهذا التجميع]. لتكن m(t) الحدودية واحدية المعامل الرئيسي وذات الدرجة الأدنى في J(A). إذن، تسمى m(t) «الحدودية الأصغرية» لـ A.

سوف نستخدم في هذا القسم المبرهنات التالية، والتي سوف تتم البرهنة عليها لاحقاً:

مبرهنة 11.16: إن الحدودية الأصغرية m(t) لـ A تقسم كل حدودية تكون A جذراً لها. وعلى الخصوص، فإن m(t) تقسم الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

مبرهنة 12.16: يكون للحدوديتين المميزة والأصغرية لمصفوفة A نفس العوامل غير الخزولة.

إن هذه المبرهنة لا تقول بأن $m(t) = \Delta(t)$ ؛ ولكنها تقول فقط أن أي عامل غير خزول في إحداهما لا بد أن يقسم الأخرى. وعلى الخصوص، وبما أن أي عامل خطي يكون غير خزول، فإنه يكون لـ m(t) و $\Delta(t)$ نفس العوامل الخطية؛ وبالتالي، يكون لهما نفس الجذور.

مبرهنة 13.16: إن سلَمياً λ يكون قيمة ذاتية لـ A إذا وفقط إذا كان λ جذراً للحدودية الأصغرية لـ A.

مبرهنة 14.16: لتكن المصفوفة المركبة القطرية:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

إذن، الحدودية الأصغرية m(t) لـ M تكون المضاعف المشترك الأصغر للحدوديات الأصغرية للـ A_i.

المسألتان 87.16-88.16 تتعلقان بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

87.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■
$$\Delta(t) = |tI - A| = \begin{pmatrix} t-4 & 2 & -2 \\ -6 & t+3 & -4 \\ -3 & 2 & t-3 \end{pmatrix} = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$$

أو، بشكل بديل، $\Delta(t) = t^3 - \mathrm{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A| = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$. (هنا، A_{ii} هو متعامل a_{ii} في A. أنظر المسألة 9.16).

88.16 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) لـ A.

■ الحدودية الأصغرية m(t) يجب أن تقسم $\Delta(t)$. أيضاً، كل عامل غير خزول في $\Delta(t)$ ، أي t − 2 و t − 1، يجب أن يكون عاملاً في m(t). إذن، يجب أن تكون m(t) واحدة من الحدوديتين التاليتين: f(t) = (t − 2)(t − 1) أو $g(t) = (t-2)(t-1)^2$. نجرب f(t)، فنجد أن

$$f(A) = (A-2I)(A-I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون $f(t) = m(t) = (t-2)(t-1) = t^2 - 3t + 2$ الحدودية الأصغرية لـ A.

المسألتان 89.16-90.16 تتعلقان بالمصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

89.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■
$$\Delta(t) = |tI - B| = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & -2 \\ -4 & t+4 & -6 \\ -2 & 3 & t-5 \end{vmatrix} = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$$

90.16 أوجد الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ B.

■ الحدودية الأصغرية $m(t)$ تكون واحدة من الحدوديتين التاليتين: $f(t) = (t-2)(t-1)$ أو $g(t) = (t-2)(t-1)^2$.
نختبر $f(t)$، فنجد أن

$$f(B) = (B-2I)(B-I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

وبذلك، $m(t) \neq f(t)$. ينتج عن ذلك أن $m(t) = g(t) = (t-2)(t-1)^2$ هي الحدودية الأصغرية لـ B. [لسنا في حاجة لحساب $g(B)$؛ ونحن نعرف، من مبرهنة كايلي ـ هاملتون، أن $g(B) = 0$].

المسائل 91.16-93.16 تتعلق بالمصفوفات التالية [حيث $a \neq 0$]:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

91.16 أوجد الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ A.

■ الحدودية المميزة لـ A تكون $\Delta(t) = (t-\lambda)^2$. نجد أن $A - \lambda I \neq 0$؛ وبالتالي، $m(t) = \Delta(t) = (t-\lambda)^2$.

92.16 أوجد الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ B.

■ الحدودية المميزة لـ B تكون $\Delta(t) = (t-\lambda)^3$. [لاحظ أن $m(t)$ تكون واحدة من الحدوديات $t-\lambda$، $(t-\lambda)^2$، أو $(t-\lambda)^3$]. نجد أن $(B-\lambda I)^2 \neq 0$؛ وبذلك، $m(t) = \Delta(t) = (t-\lambda)^3$.

93.16 أوجد الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ C.

■ الحدودية المميزة لـ C تكون $\Delta(t) = (t-\lambda)^4$. نجد أن $(C-\lambda I)^3 \neq 0$؛ وبالتالي، $m(t) = \Delta(t) = (t-\lambda)^4$.

94.16 عمّم النتيجة في المسائل 91.16-93.16.

■ لتكن المصفوفة M المربعة -n حيث عناصرها القطرية تساوي λ، وعناصرها على القطر الثانوي العلوي تساوي a حيث $a \neq 0$:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

إذن، تكون $f(t) = (t-\lambda)^n$ الحدوديتين المميزة والأصغرية في آن معاً لـ M.

95.16 لتكن $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$، حيث A و B مصفوفتين مربعتين. بيِّن أن الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ M تساوي المضاعف المشترك

الأصغر للحدوديتين g(t) و h(t) لـ A و B على الترتيب. [إن مبرهنة 14.16، التي تعمم هذه النتيجة، تتبع مباشرة من هذه النتيجة وذلك بواسطة الإستقراء].

■ بما أن m(t) الحدودية الأصغرية لـ M؛ إذن $m(M) = \begin{pmatrix} m(A) & 0 \\ 0 & m(B) \end{pmatrix} = 0$ وبالتالي، $m(A) = 0$ و $m(B) = 0$. بما أن g(t) الحدودية الأصغرية لـ A، فإن g(t) تقسم m(t) وبالمثل h(t) تقسم m(t). وبذلك، تكون m(t) مضاعفاً لـ g(t) و h(t).
لتكن الآن f(t) مضاعفاً آخر لـ g(t) و h(t)؛ إذن، $f(M) = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. ولكن m(t) الحدودية الأصغرية لـ M؛ وبالتالي، m(t) تقسم f(t). إذن، تكون m(t) المضاعف المشترك الأصغر لـ g(t) و h(t).

96.16 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) المصفوفة.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

■ لاحظ أن $M = \begin{pmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & C & \\ & & & D \end{pmatrix}$، حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$، $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$، $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، $D = (5)$

وبذلك، تكون m(t) المضاعف المشترك الأصغر للحدوديات الأصغرية لـ A، B، C، D. نستخدم المسألة 94.16، فنجد أن الحدوديات الأصغرية لـ A، C، D تكون $(t-2)^2$، t^2، $t-5$ على الترتيب. وتكون الحدودية المميزة لـ B:

$$|tI - B| = \begin{vmatrix} t-4 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = t^2 - 7t + 10 = (t-2)(t-5)$$

وهي كذلك الحدودية الأصغرية لـ B، لأن عامليهما مختلفان. وبذلك، تكون m(t) المضاعف المشترك الأصغر لـ $(t-2)^2$، t^2، $t-5$، $(t-2)(t-5)$. ينتج عن ذلك أن $m(t) = t^2(t-2)^2(t-5)$.

المسائل 97.16-100.16 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

97.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■ لاحظ أن A مصفوفة مركبة قطرية، بمصفوفات جزئية قطرية.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_3 = (7)$$

إذن، تكون $\Delta(t)$ جداء الحدوديات المميزة $\Delta_1(t)$، $\Delta_2(t)$، $\Delta_3(t)$ لـ A_1، A_2، A_3، على الترتيب. بما أن A_1 و A_3 مثلثيتان، فإن $\Delta_1(t) = (t-2)^2$ و $\Delta_3(t) = (t-7)$. أيضاً، $\Delta_2(t) = t^2 - 9t + 14 = (t-2)(t-7)$. وبذلك، $\Delta(t) = (t-2)^4(t-7)^2$. [$\deg m(t) = 5$ كما هو متوقع].

98.16 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) لـ A.

■ لاحظ أن الحدوديات الأصغرية $m_1(t)$، $m_2(t)$، $m_3(t)$ للمصفوفات الجزئية القطرية A_1، A_2، A_3، على الترتيب، مساوية للحدوديات المميزة؛ أي أن $m_1(t) = (t-2)^2$، $m_2(t) = (t-2)(t-7)$، $m_3(t) = t-7$. ولكن m(t) تساوي المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(t)$، $m_2(t)$، $m_3(t)$. إذن، $m(t) = (t-2)^2(t-7)$.

99.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والحدودية الاصغرية m(t) لـ B.

■ B مصفوفة مركبة قطرية بمصفوفتين جزئيتين قطريتين

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

نجد، من المسألة 94.16، أن الحدودية المميزة والأصغرية لـ B_1 تكون $f(t) = (t-3)^2$، والحدودية المميزة والأصغرية لـ B_2 تكون $g(t) = (t-3)^3$. وبذلك، $\Delta(t) = f(t)g(t) = (t-3)^5$، ولكن $m(t) = \gcd(f(t), g(t)) = (t-3)^3$ (وهو حجم أكبر مصفوفة جزئية).

100.16 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والحدودية الاصغرية m(t) لـ C. [لاحظ أن C مصفوفة سلّمية، أي أن $C = \lambda I$].

■ بما أن C مثلثية، إذن $\Delta(t) = (t-\lambda)^5$. لدينا، من جهة أخرى، أن $m(t) = t - \lambda$ لأن $C - \lambda I = 0$.

101.16 لتكن A أي مصفوفة مربعة. لنفترض أن $m_1(t)$ و $m_2(t)$ حدوديتين واحدتي المعاملين الرئيسيين، بدرجتين أصغريتين، وتكون A جذراً لهما. بيّن أن $m_1(t) = m_2(t)$.

■ لتكن $n = \deg m_1 = \deg m_2$. ولنفترض أن $m_1(t) \neq m_2(t)$. إذن، يكون الفرق $f(t) = m_1(t) - m_2(t)$ حدودية، تكون A جذراً لها، وبحيث أن $\deg f < n$. نقسم f على معاملها الرئيسي، فنحصل على حدودية واحدية المعامل الرئيسي f'، تكون A جذراً لها، وبحيث أن $\deg f' = \deg f < n$. يناقض هذا أصغرية m_1 و m_2. وبذلك، $m_1(t) = m_2(t)$.

102.16 أثبت مبرهنة 11.6.

■ لنفترض أن f(t) حدودية تحقق $f(A) = 0$. نعرف، بواسطة خوارزمية القسمة، أنّه توجد حدوديتان q(t) و r(t) تحققان $f(t) = m(t)q(t) + r(t)$، بحيث أن $r(t) = 0$ أو $\deg r(t) < \deg m(t)$. نعوض بـ $t = A$ في هذه المعادلة، ونستخدم $f(A) = 0$ و $m(A) = 0$، فنحصل على $r(A) = 0$. إذا $r(t) \neq 0$، إذن، تكون r(t) حدودية، درجتها أقل من درجة m(t)، وتكون A صفراً لها. يناقض هذا تعريف الحدودية الأصغرية. وبذلك، $r(t) = 0$؛ وبالتالي، $f(t) = m(t)q(t)$، أي أن m(t) تقسم f(t).

103.16 لتكن m(t) الحدودية الأصغرية لمصفوفة A مربعة -n بيّن أن الحدودية المميزة لـ A تقسم $(m(t))^n$.

■ لنفترض أن $m(t) = t^r + c_1 t^{r-1} + \ldots + c_{r-1}t + c_r$. ولننظر في المصفوفات التالية:

$$\begin{aligned} B_0 &= I \\ B_1 &= A + c_1 I \\ B_2 &= A^2 + c_1 A + c_2 I \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{r-1} &= A^{r-1} + c_1 A^{r-2} + \cdots + c_{r-1} I \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} B_0 &= I \\ B_1 - AB_0 &= c_1 I \\ B_2 - AB_1 &= c_2 I \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{r-1} - AB_{r-2} &= c_{r-1} I \end{aligned}$$

أيضاً

$$\begin{aligned} -AB_{r-1} &= c_r I - (A^r + c_1 A^{r-1} + \cdots + c_{r-1}A + c_r I) \\ &= c_r I - m(A) \\ &= c_r I \end{aligned}$$

نضع

$$B(t) = t^{r-1}B_0 + t^{r-2}B_1 + \cdots + tB_{r-2} + B_{r-1}$$

إذن
$$(tI - A)\cdot B(t) = (t^rB_0 + t^{r-1}B_1 + \cdots + tB_{r-1}) - (t^{r-1}AB_0 + t^{r-2}AB_1 + \cdots + AB_{r-1})$$
$$= t^rB_0 + t^{r-1}(B_1 - AB_0) + t^{r-2}(B_2 - AB_1) + \cdots + t(B_{r-1} - AB_{r-2}) - AB_{r-1}$$
$$= t^rI + c_1t^{r-1}I + c_2t^{r-2}I + \cdots + c_{r-1}tI + c_rI$$
$$= m(t)_I$$

المحددة الطرفية تعطينا $|tI - A|\,|B(t)| = |m(t)I| = (m(t))^n$. بما أن $|B(t)|$ حدودية؛ إذن، $|tI - A|$ تقسم $(m(t))^n$؛ أي أن الحدودية المميزة لـ A تقسم $(m(t))^n$.

104.16 أثبت مبرهنة 12.16.

■ لنفترض أن f(t) حدودية غير خزولة. إذا f(t) تقسم m(t)، إذن f(t) تقسم $\Delta(t)$ ، لأن m(t) تقسم $\Delta(t)$. من جهة أخرى، إذا f(t) تقسم $\Delta(t)$ ، فإن f(t) تقسم $(m(t))^n$، وذلك بواسطة المسألة السابقة. ولكن f(t) غير خزولة، وبالتالي f(t) تقسم m(t) أيضاً. وبذلك، يكون لـ m(t) و $\Delta(t)$ نفس العوامل غير الخزولة.

105.16 ليكن T مؤثراً خطياً على فضاء متجهي V منته البعد. بيّن أن T يكون عكوساً إذا وفقط إذا كان الحد الثابت في الحدودية الأصغرية (المميزة) لـ T مختلفاً عن الصفر.

■ لنفترض أن الحدودية الأصغرية (المميزة) لـ T هي $f(t) = t^r + a_{n-1}t^{r-1} + \dots + a_1t + a_0$. إن كل واحدة من القضايا التالية مكافئة للتي تليها، بسبب نتائج سابقة: (i) T عكوسة؛ (ii) T غير شاذة؛ (iii) 0 ليس قيمة ذاتية لـ T؛ (iv) 0 ليس جذراً لـ m(t)؛ (v) الحد الثابت a_0 ليس صفراً. وبذلك، يتم إثبات النتيجة.

106.16 لنفترض أن $\dim V = n$. وليكن $T: V \to V$ مؤثراً عكوساً. بيّن أن T^{-1} يساوي حدودية في T لا تتجاوز درجتها n.

■ لتكن m(t) الحدودية المميزة لـ T. إذن، $m(t) = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_1t + a_0$، حيث $r \leqslant n$. بما أن T عكوسة، إذن $a_0 \neq 0$. ويكون لدينا $m(T) = T^r + a_{r-1}T^{r-1} + \cdots + a_1T + a_0I = 0$. وبالتالي

$$-\frac{1}{a_0}(T^{r-1} + a_{r-1}T^{r-2} + \cdots + a_1I)T = I \quad \text{و} \quad T^{-1} = -\frac{1}{a_0}(T^{r-1} + a_{r-1}T^{r-2} + \cdots + a_1I)$$

107.16 ليكن F توسيعاً لحقل K. ولتكن A مصفوفة مربعة n فوق K. لاحظ أنه يمكن أيضاً إعتبار A كمصفوفة $\hat{A}$ فوق F. من الواضح أن $|tI - A| = |tI - \hat{A}|$ ، أي أنه يكون لـ A و $\hat{A}$ نفس الحدودية المميزة. بيّن أنه يكون لـ A و $\hat{A}$ نفس الحدودية الأصغرية أيضاً.

■ لتكن m(t) و m′(t) الحدوديتين المميزتين لـ A و $\hat{A}$، على الترتيب الآن، تقسم m′(t) كل حدودية فوق F تكون A صفراً لها. بما أن A صفر لـ m(t)، وبما أنه يمكن النظر إلى m(t) كحدودية فوق F، فإن m′(t) تقسم m(t). سوف نبين أن m(t) تقسم m′(t).

بما أن m′(t) حدودية فوق F (وهو توسيع لـ K)، فإنه يمكننا كتابة $m'(t) = f_1(t)b_1 + + f_2(t)b_2 + \dots + f_n(t)b_n$، حيث $f_i(t)$ حدوديات فوق K، وحيث $b_1,\dots,b_n$ تنتمي إلى F وتكون مستقلة خطياً فوق K. لدينا

$$m'(A) = f_1(A)b_1 + f_2(A)b_2 + \cdots + f_n(A)b_n = 0 \qquad (1)$$

ليكن $a_{ij}^{(k)}$ المدخل ij في $f_k(A)$. إن المعادلة المصفوفية أعلاه تقتضي أن $a_{ij}^{(1)}b_1 + a_{ij}^{(2)}b_2 + \cdots + a_{ij}^{(n)}b_n = 0$ ، من أجل كل زوج (i,j) بما أن الـ b_i مستقلة خطياً فوق K، وبما أن الـ $a_{ij}^{(k)} \in K$ ، فإن كل $a_{ij}^{(k)} = 0$. إذن، $f_1(A) = 0, f_2(A) = 0, \dots, f_n(A) = 0$ بما أن A صفر للحدوديات $f_i(t)$ فوق K ، وبما أن m(t) هي الحدودية الأصغرية لـ A بصفتها مصفوفة فوق K. فإن m(t) تقسم كل واحدة من الـ $f_i(t)$. ينتج عن ذلك، ومن (1)، أن m(t) يجب أن تقسم m′(t) أيضاً. ولكن كل حدوديتين واحدتي العاملين الرئيسيين، وتقسم كل واحدة منهما الأخرى، يجب أن تكونا متساويتين وبذلك، $m(t) = m'(t)$، كما هو مطلوب.

108.16 لتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ قاعدة لـ V. وليكن $T: V \to V$ مؤثراً يحقق $T(v_1) = 0$، $T(v_2) = a_{21}v_1$، $T(v_3) = a_{31}v_1 + a_{32}v_2, \dots, T(v_n) = a_{n1}v_1 + \cdots + a_{n,n-1}v_{n-1}$

بيِّن أن $T^n = 0$. وبذلك، تكون حدودية T الأصغرية في الشكل $m(t) = t^r$، حيث $r \leqslant n$.

■ يكفي أن نبين أن

$$T^j(v_j) = 0 \qquad (1)$$

من أجل $j = 1,\ldots,n$. لأنه ينتج عندئذ أن $T^n(v_j) = T^{n-j}(T^j(v_j)) = T^{n-j}(0) = 0$ ، من أجل $j = 1,\ldots,n$ وأن $T^n = 0$ لأن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ قاعدة.

نثبت (1) بالاستقراء على j. الحالة $j = 1$ صحيحة فرضياً. وتتبّع الخطوة الاستقرائية [من أجل $j = 2,\ldots,n$] من

$$\begin{aligned} T^j(v_j) &= T^{j-1}(T(v_j)) = T^{j-1}(a_{j1}v_1 + \cdots + a_{j,j-1}v_{j-1}) \\ &= a_{j1}T^{j-1}(v_1) + \cdots + a_{j,j-1}T^{j-1}(v_{j-1}) \\ &= a_{j1}0 + \cdots + a_{j,j-1}0 = 0 \end{aligned}$$

ملاحظة: لاحظ أن التمثيل المصفوفي لـ T في القاعدة أعلاه مصفوفة مثلثية بعناصر قطرية صفرية:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 0 & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

5.16 خواص أخرى للقيم والمتجهات الذاتية

109.16 لنفترض أن λ قيمة مطلقة لمؤثر عكوس T. بيِّن أن λ^{-1} قيمة ذاتية لـ T^{-1}.

■ بما أن T عكوس، فهو غير شاذ أيضاً؛ وبالتالي $\lambda \neq 0$. يوجد، من تعريف القيم الذاتية، متجه غير صفري v يحقق $T(v) = \lambda v$. نطبق T^{-1} على الطرفين، فنحصل على $v = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}(v)$. وبالتالي، $T^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$؛ أي أن λ^{-1} قيمة ذاتية لـ T^{-1}.

110.16 لنفترض أن v متجه ذاتي غير صفري لتطبيقين خطيين S و T. أثبت أن v متجه ذاتي لـ $S + T$.

■ لنفترض أن $S(v) = \lambda_1(v)$ و $T(v) = \lambda_2(v)$. إذن، $(S + T)(v) = S(v) + T(v) = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v$. وبذلك، يكون v متجهاً ذاتياً لـ $S + T$ مقرناً بالقيمة الذاتية $\lambda_1 + \lambda_2$.

111.16 لنفترض أن v متجه ذاتي غير صفري لـ T. بيِّن أن v متجه ذاتي لـ k^T، من أجل أي $k \in K$.

■ ليكن $T(v) = \lambda v$. إذن، $(kT)(v) = kT(v) = k(\lambda v) = (k\lambda)v$. وبذلك يكون v متجهاً ذاتياً لـ kT مقرناً بالقيمة الذاتية $k\lambda$.

112.16 لنفترض أن λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي T. (أ) بيِّن أن λ^2 قيمة ذاتية لـ T^2. (ب) بعمومية أكبر، بيِّن أن λ^n قيمة ذاتية لـ T^n، من أجل $n \geqslant 1$.

■ بما أن λ قيمة ذاتية لـ T، فإنه يوجد متجه ذاتي غير ـ صفري v بحيث أن $T(v) = \lambda v$.

(أ) لدينا $T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda(T(v)) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. وبذلك، تكون λ^2 قيمة ذاتية لـ T^2.

(ب) لنفترض أن $n>1$، وأن النتيجة صالحة من أجل $n-1$. إذن، $T^n(v) = T(T^{n-1}(v)) = T(\lambda^{n-1}v) = \lambda^{n-1}(T(v)) = \lambda^{n-1}(\lambda v) = \lambda^n v$. وبذلك تكون λ^n قيمة ذاتية لـ T^n.

113.16 لنفترض أن λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي لـ T. بيِّن أن $f(\lambda)$ قيمة ذاتية لـ $f(T)$، من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ يوجد متجه غير صفري بحيث أن $T(v) = \lambda v$. لنفترض أن $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$. إذن،

$$f(T)(v) = (a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I)(v) = a_n T^n(v) + \cdots + a_1 T(v) + a_0 I(v)$$
$$= a_n \lambda^n v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v = (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0)(v)$$
$$= f(\lambda) v$$

وبذلك، تكون $f(\lambda)$ قيمة ذاتية لـ $f(T)$.

114.16 لتكن A مصفوفة مربعة -n بحيث أن $A^k = 0$، من أجل بعض $k > n$. بيِّن أن $A^n = 0$.

■ هنا، A جذر لـ $f(t) = t^k$. بما أن الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ A يجب أن تقسم $f(t)$، يكون لدينا $m(t) = t^r$، من أجل $r \leqslant k$. ومع ذلك، فإن درجة $m(t)$ لا يمكن أن تتجاوز درجة الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A والتي درجتها n. وبالتالي، تكون A جذراً لـ $m(t) = t^r$ من أجل $r \leqslant n$. وبذلك، تكون A جذراً لـ t^n.

115.16 ليكن $E: V \to V$ مؤثر إسقاط، أي أن $E^2 = E$. بيِّن أن E قابلة للتقطير ويمكن تمثيله بمصفوفة قطرية $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

■ بما أن $E^2 = E$، فإن مؤثر الإسقاط E يكون جذراً $f(t) = t^2 - t = t(t-1)$. الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ E تقسم $f(t)$. وبذلك يكون لـ $m(t)$ جذران مختلفان، وتكون E قابلة للتقطير. القيمتان الذاتيتان يجب أن تكونا 0 أو 1، أو 0 و 1 معاً. وبذلك، يكون للمصفوفة القطرية A الممثلة لـ E العدد 1 و/أو العدد 0 على القطر. بوضع المتجهات الذاتية للقيمة الذاتية 1 أولاً، سوف يكون لـ A الشكل المطلوب.

116.16 لتكن حدودية إختيارية واحدية المعامل الرئيسي $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. عرِّف المصفوفة المصاحبة A لـ $f(t)$.

■ A مصفوفة مربعة -n تكون مداخلها التي على القطر الثانوي السفلي 1، وسَوَالب المعامل على عمودها الأخير، أما بقية المداخل فتكون صفرية:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

إن الحدوديتين الأصغرية $m(t)$ والمميزة $\Delta(t)$ تساويان كلاهما الحدودية $f(t)$.

117.16 أوجد مصفوفة A تكون حدوديتها الأصغرية $t^3 - 5t^2 + 6t + 8$.

■ لتكن A المصفوفة المصاحبة، أي $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

118.16 أوجد مصفوفةً B تكون حدوديتها الأصغرية $t^4 - 5t^3 - 2t^2 + 7t + 4$.

■ لتكن B المصفوفة المصاحبة، أي

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

الفصل 17
الأشكال القانونية

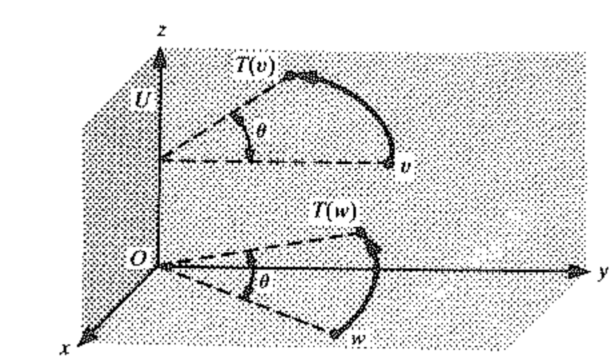
ليكن T مؤثراً خطياً على فضاء متجهي منته البعد. وكما رأينا في الفصل السابق، قد لا يكون لـ T تمثيل مصفوفي قطري. ومع ذلك، فإنه يظل ممكناً «تبسيط» التمثيل المصفوفي بعدد من الطرق. وهذا هو الموضع الرئيسي لهذا الفصل. وسوف نحصل، بوجه خاص، على «مبرهنة التحليل الأولي»، وعلى الشكل «المثلثي»، وشكل «جوردان»، والشكل «المنطق».

1.17 الفضاءات الجزئية اللامتغيرة

1.17 عرّف فضاءً جزئياً لا متغيراً لمؤثر خطي.

■ ليكن $T: V \to V$ خطياً. نقول عن فضاء جزئي W لـ V بأنّه «لا متغير» تحت T، أو «لا متغير -T»، إذا كان T يطبق W على نفسه، أي إذا كان $v \in W$ يقتضي $T(v) \in W$. وفي هذه الحالة، تعرّف T (بعد تقييدها على W) مؤثراً خطياً على W، أي أن T تدخل مؤثراً خطياً $\hat{T}: W \to W$ معرَّفاً بواسطة $\hat{T}(w) = T(w)$ ، من أجل كل $w \in W$.

المسائل 2.17-5.17 تتعلق بالتطبيق الخطي $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ الذي يدير كل متجه حول محور -z بزاوية θ (كما موضح بالشكل 17-1)، أي أن $T(x,y,z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$.



شكل 17-1

2.17 ليكن W المستوى -xy في $\mathbf{R}^3$. هل W لا متغير تحت T؟

■ كل متجه $w = (a,b,0)$ في المستوى -xy (أي W) يبقى تحت التطبيق T في W كما يوضح ذلك الشكل 17-1. وبذلك، يكون W لا متغيراً تحت T. تقييد T على W يدير كل متجه في W حول نقطة الأصل O.

3.17 ليكن W′ المستوى -yz في $\mathbf{R}^3$. هل W′ لا متغير تحت T؟

■ إن متجهاً غير صفري $w = (0,b,c)$ في W′ لا يبقى في W′ تحت T (إلا إذا $\theta = \pi$ أو مضاعفاً لـ π). وبذلك، W′ لا يكون لا متغيراً -T.

4.17 ليكن U محور -z في $\mathbf{R}^3$. هل يكون U لا متغيراً تحت T؟

■ يكون لدينا $T(u) = u$، من أجل أي $u = (0,0,z)$ في U. وبذلك، يكون U لا متغيراً تحت T. في الحقيقة، يكون تقييد T على U هو التطبيق المحايد على U.

5.17 ليكن U′ محور -x في $\mathbf{R}^3$. هل U′ لا متغير تحت T؟

■ إن متجهاً غير صفري $u'(a,0,0)$ في U′ لا يبقى في U′ تحت T (إلا إذا $\theta = \pi$ أو مضاعفاً لـ π). وبذلك، لا يكون U′ لا متغيراً تحت T.

6.17 ما هي العلاقة (إن وجدت) بين المتجهات الذاتية لمؤثر خطي T وفضاءاته الجزئية؟

■ إذا كان v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T، فإن span (v) فضاء جزئي لا متغير أحادي ـ البعد لـ T، وبالعكس، إذا كان W فضاء جزئي لا متغير أحادي البعد لـ T، فإن أي متجه غير صفري في W يكون متجهاً ذاتياً لـ T.

المسائل 7.17-10.17 تتعلق بأي مؤثر خطي $T: V \to V$.

7.17 بيِّن أن $\{0\}$ لا متغير تحت T.

■ لدينا $T(0) = 0 \in \{0\}$؛ وبالتالي، يكون $\{0\}$ لا متغيراً تحت T.

8.17 بيِّن أن V لا متغير تحت T.

■ لدينا $T(v) \in V$، من أجل كل $v \in V$. إذن، يكون V لا متغيراً تحت T.

9.17 بيِّن أن نواة T لا متغيرة تحت T.

■ ليكن $u \in \text{Ker } T$. إذن، $T(u) = 0 \in \text{Ker } T$ لأن نواة T فضاء جزئي في V. وبذلك، تكون Ker T لا متغيرة تحت T.

10.17 بيِّن أن صورة T لا متغيرة تحت T.

■ بما أن $T(v) \in \text{Im } T$، من أجل كل $v \in V$، فهي بالتأكيد صحيحة إذا $v \in \text{Im } T$. وبالتالي، تكون صورة T لا متغيرة تحت T.

11.17 أوجد كل الفضاءات الجزئية اللأمتغيرة لـ $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ باعتبارها مؤثراً على $\mathbf{R}^2$.

■ لدينا، أولاً، أن $\mathbf{R}^2$ و $\{0\}$ فضاءان لا متغيران تحت A. الآن، إذا كان لـ A أي فضاءات جزئية لا متغيرة أخرى، فهي يجب أن تكون أحادية البعد. ولكن الحدودية المميزة لـ A تكون

$$\Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 5 \\ -1 & t+2 \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

وبالتالي، ليس لـ A قيم ذاتية (في $\mathbf{R}$)؛ وبذلك لا يكون لها متجهات ذاتية. وبما أن الفضاءات الجزئية اللامتغيرة أحادية ـ البعد تتعلق بمتجهات ذاتية، فإن $\mathbf{R}^2$ و $\{0\}$ هما الفضاءان الجزئيان اللامتغيران الوحيدان تحت A.

12.17 لنفترض أن $\{W_i\}$ تجميع لفضاءات جزئية لا متغيرة -T في فضاء متجهي V. بيِّن أن التقاطع: $W = \cap_i W_i$ يكون أيضاً لا متغيراً -T.

■ ليكن $v \in W$؛ إذن $v \in W_i$، من أجل كل i. بما أن W_i لا متغير -T، فإن $T(v) \in W_i$ من أجل كل i. إذن $T(v) \in W = \cap_i W_i$، وبذلك يكون T لا متغيراً -T.

مبرهنة 1.17: ليكن $T: V \to V$ خطياً، وليكن f(t) أي حدودية. إذن، تكون نواة f(T) لا متغيرة تحت T.

13.17 أثبت مبرهنة 1.17.

■ لنفترض أن $v \in \text{Ker } f(T)$، أي أن $f(T)(v) = 0$. يلزمنا أن نبين أن T(v) تنتمي أيضاً إلى نواة f(T)، أي أن $f(T)(T(v)) = 0$. بما أن $f(t)t = tf(t)$، فيكون لدينا $f(T)T = Tf(T)$. وبذلك، $f(T)T(v) = Tf(T)v = T(0) = 0$، كما هو مطلوب.

مبرهنة 2.17: لنفترض أن W فضاء جزئي لا متغير لـ $T: V \to V$. إذن، يكون لـ T تمثيل مصفوفي مركب $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ حيث A تمثيل مصفوفي لـ $\hat{T}$ ،T تقييد على W.

14.17 أثبت مبرهنة 13.17

■ نختار قاعدة $\{w_1,\ldots,w_r\}$ لـ W، ونوسعها إلى قاعدة $\{w_1,\ldots,w_r,v_1,\ldots,v_s\}$ لـ V. إذن

$$\begin{aligned}
\hat{T}(w_1) &= T(w_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{1r}w_r \\
\hat{T}(w_2) &= T(w_2) = a_{21}w_1 + \cdots + a_{2w_r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{T}(w_r) &= T(w_r) = a_{r1}w_1 + \cdots + a_{rr}w_r \\
T(v_1) &= b_{11}w_1 + \cdots + b_{1r}w_r + c_{11}v_1 + \cdots + c_{1s}v_s \\
T(v_2) &= b_{21}w_1 + \cdots + b_{2r}w_r + c_{21}v_1 + \cdots + c_{2s}v_s \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(v_s) &= b_{s1}w_1 + \cdots + b_{sr}w_r + c_{s1}v_1 + \cdots + c_{ss}v_s
\end{aligned}$$

ولكن مصفوفة T في هذه القاعدة هي منقولة مصفوفة المعاملات في منظومة المعادلات أعلاه. ولذلك، يكون لها الشكل $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ حيث A منقولة مصفوفة المعاملات للمنظومة الجزئية الواضحة نجد، بنفس الحجة، أن A مصفوفة $\hat{T}$ بالنسبة للقاعدة $\{W_i\}$ لـ W.

المسألتان 15.17-16.17 تتعلقان بالتقييد $\hat{T}$ لمؤثر خطي T على فضاء جزئي لا متغير W؛ أي أن $\hat{T}(w) = T(w)$، من أجل كل $w \in W$.

15.17 أثبت أن: $f(\hat{T})(w) = f(T)(w)$، من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ إذا $f(t) = 0$، أو إذا $f(t)$ ثابتة، أي درجتها 1، فإنه من الواضح أن النتيجة تكون صحيحة. لنفترض أن $\deg f = n > 1$، وأن النتيجة تتحقق من أجل حدوديات درجاتها أقل من n. لنفترض أن $f(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$. إذن

$$\begin{aligned}
f(\hat{T})(w) &= (a_n\hat{T}^n + a_{n-1}\hat{T}^{n-1} + \cdots + a_0I)(w) \\
&= (a_n\hat{T}^{n-1})(\hat{T}(w)) + (a_{n-1}\hat{T}^{n-1} + \cdots + a_0I)(w) \\
&= (a_nT^{n-1})(T(w)) + (a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0I)(w) \\
&= f(T)(w)
\end{aligned}$$

16.17 أثبت أن: الحدودية الأصغرية لـ $\hat{T}$ تقسم الحدودية الأصغرية لـ T.

■ لتكن $m(t)$ الحدودية الأصغرية لـ T. إذن، ومن المسألة 15.17، يكون لدينا $m(\hat{T})(w) = m(T)(w) = 0(w) = 0$، من أجل كل $w \in W$؛ أي أن $\hat{T}$ صفر للحدودية $m(t)$. وبالتالي، فإن الحدودية الأصغرية لـ $\hat{T}$ تقسم $m(t)$.

17.17 بين أن كل فضاء جزئي لـ V يكون لا متغيراً تحت I و 0، أي المؤثرين المحايد والصفري.

■ لنفترض أن W فضاء جزئي في V، وأن $w \in W$. إذن، $I(w) = w \in W$ و $0(w) = 0 \in W$. وبذلك، يكون W لا متغيراً تحت I و 0.

18.17 حدد الفضاء الجزئية اللامتغيرة $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ باعتبارها مؤثراً خطياً على $\mathbf{R}^2$.

■ هنا، $\Delta(t) = t^2 + 16$ هي الحدودية المميزة لـ A. لا توجد قيم ذاتية (في $\mathbf{R}^2$)، وبالتالي لا توجد متجهات ذاتية. وبذلك، لا توجد فضاءات جزئية لا متغيرة أحادية ـ البعد. ينتج عن ذلك أن $\{0\}$ و $\mathbf{R}^2$ هما الفضاءات الجزئيان اللامتغيران T- الوحيدان.

19.17 حدّد الفضاءات الجزئية اللامتغيرة للمصفوفة A أعلاه منظوراً إليها بأنها مؤثر خطي على $\mathbf{C}^2$.

■ بما أن $\Delta(t) = t^2 + 16 = (t+4i)(t-4i)$، فإنه توجد قيمتان ذاتيتان $\lambda_1 = 4i$ و $\lambda_2 = -4i$. بوضع $\lambda_1I - A = 0$، نحصل على حل غير صفري $v_1 = (2, 1-2i)$ وبوضع $(\lambda_1I - A)v_1 = 0$، نحصل على حلُ غير صفري $v_1 = (2, 1-2i)$، وبوضع $(\lambda_2I - A)v_2 = 0$ نحصل على حل غير صفري $v_2 = (2, 1+2i)$. وبذلك، فإن الفضاءات الجزئية اللامتغيرة الوحيدة هي: $\{0\}$، $\mathbf{C}^2$، $W_1 = \text{span}(2, 1-2i)$، $W_2 = \text{span}(2, 1+2i)$.

المسائل 20.17-23.17 تتعلق بفضاء جزئي W يكون لا متغيراً تحت $S: V \to V$ و $T: V \to V$.

20.17 بيِّن أن W لا متغير تحت $S + T$.

■ ليكن $w \in W$. إذن، $S(w) \in W$ و $T(w) \in W$. بما أن W فضاء جزئي، فإن $S(w) + T(w) \in W$. لذلك، فإن $(S+T)(w) = S(w) + T(w)$ ينتمي إلى W. إذن، يكون W لا متغيراً تحت $S + T$.

21.17 بيِّن أن W لا متغير تحت $S^\circ T$.

■ ليكن $w \in W$. إذن، $T(w) \in W$ وبالتالي $(S^\circ T)(w) = S(T(w)) \in W$. إذن، يكون W لا متغيراً تحت $S^\circ T$.

22.17 بيِّن أن W لا متغير تحت kT، من أجل كل $k \in K$.

■ ليكن $w \in W$. إذن $T(w) \in W$. بما أن W فضاء جزئي، إذن $kT(w) \in W$. وبذلك، $(kT)(w) = kT(w)$ ينتمي إلى W. إذن، يكون W لا متغيراً تحت kT.

23.17 بيِّن أن W لا متغير تحت $f(T)$، من أجل أي حدودية $f(t)$.

■ نجد، من المسألة 21.17، أن W لا متغير تحت T^2، ونجد بالاستقراء أي W لا متغير تحت T^k، من أجل أي $k \geqslant 1$. ونجد، من المسألة 22.17، أن W لا متغير تحت a_kT^k من أجل أي سلّمي a_k. أيضاً، يكون W لا متغيراً تحت I، حيث I التطبيق المحايد (وذلك بسبب المسألة 17.17). أخيراً، ومن المسألة 20.17، يكون W لا متغيراً تحت $a_nT^n + \ldots + a_1T + a_0I$. بتعبير آخر، يكون W لا متغيراً تحت $f(T)$ من أجل أي حدودية $f(t)$.

2.17 المجاميع المباشرة، المساقط

24.17 عرّف المجموع المباشر لفضاءات جزئية والمساقط المقابلة لها.

■ يصطلح على أن فضاء متجهياً V «مجموع مباشر» لفضاءاته الجزئية $W_1, \ldots, W_r$، ونكتبه $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$، إذا كان في الإمكان كتابة كل متجه $v \in V$ في الشكل الوحيد $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_r$، حيث $w_i \in W_i$. في مثل هذه الحالة، يكون مسقط V على فضاءه الجزئي W_i هو التطبيق $E: V \to V$ المعرّف بواسطة $E(v) = w_i$. [إن المسقط E معرّف جيداً لأن المجموع من أجل v وحيد، وهناك تطبيق إسقاط من أجل كل فضاء جزئي W_i].

المسائل 25.17-28.17 تتعلق بالفضاءات الجزئية التالية لـ $\mathbf{R}^3$: U = المستوى -xy، W = المستوى -yz، Z= محور -z، $L = \{(k,k,k): k \in \mathbf{R}\}$.

25.17 هل $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$؟

■ $\mathbf{R}^3 = U + W$ لأن كل متجه في $\mathbf{R}^3$ مجموعٌ لمتجه في U ومتجه في W. ومع ذلك، فإن $\mathbf{R}^3$ لا يكون المجموع المباشر لـ U و W بسبب عدم وحدانية مثل هذا المجموع: مثلاً، $(1,2,3) = (1,1,0) + (0,1,1) = (1,3,0) + (0,-1,3)$.

26.17 هل $\mathbf{R}^3 = U \oplus Z$؟

■ يمكن كتابة أي متجه $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ كمجموع لمتجه في U ومتجه في Z، وذلك بطريقة واحدة فقط: $(a,b,c) = (a,b,0) = (0,0,c)$. وبذلك، يكون $\mathbf{R}^3 = U \oplus Z$.

27.17 أعطينا $\mathbf{R}^3 = U \oplus L$. أوجد المسقطين E_U و E_L لـ V على U و L، على الترتيب.

■ من أجل أي متجه $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$، يكون التمثيل الوحيد كما يلي: $(a,b,c) = (a-c, b-c, 0) + (c,c,c)$. وبذلك، يكون E_U و E_L معرفين بواسطة $E_v(a,b,c) = (a-c, b-c, 0)$ و $E_L(a,b,c) = (c,c,c)$.

مبرهنة 3.17: لنفترض أن $W_1, \ldots, W_r$ فضاءات جزئية لـ V، وأن $B_i = \{w_{i1}, \ldots, w_{in_i}\}$ قاعدة لـ W_i من أجل $i = 1, \ldots, r$. ولتكن B إتحاد كل متجهات هذه القواعد:

(i) إذا كانت B قاعدة لـ V، إذن $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$.

(ii) إذا $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$، إذن تكون B قاعدة لـ V.

28.17 أعطينا $\mathbf{R}^3 = W \oplus L$. أوجد المسقطين E_W و E_L في W و L على الترتيب.

■ التمثيل الوحيد هو $(a,b,c) = (0,b-a,c-a) + (a,a,a)$، وبالتالي $E_w = (a,b,c) = (0,b-a,c-a)$ و $E_L(a,b,c) = (a,a,a)$.

29.17 أثبت (i) في مبرهنة 3.17.

■ ليكن $v \in V$. بما أن B قاعدة من أجل V، إذن

$$v = a_{11}w_{11} + \cdots + a_{1n_1}w_{1n_1} + \cdots + a_{r1}w_{r1} + \cdots + a_{rn_r}w_{rn_r} = w_1 + w_2 + \cdots + w_r$$

حيث $w_i = a_{i1}w_{i1} + \cdots + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. نبين بعد ذلك أن مجموعاً مثل هذا يكون وحيداً لنفترض أن $v = w_1' + w_2' + \cdots + w_r'$ حيث $w_i' \in W_i$. بما أن $\{w_{i1}, \ldots, w_{in_i}\}$ قاعدة لـ W_i، إذن $w_i' = b_{1n_i}w_{1n_1} + \cdots + b_{in_i}w_{in_i}$، وبذلك يكون $v = b_{11}w_{11} + \cdots + b_{1n_1}w_{1n_1} + \cdots + b_{r1}w_{r1} + \cdots + b_{rn_r}w_{rn_r}$. بما أن B قاعدة لـ V، فإن $a_{ij} = b_{ij}$ من أجل كل i وكل j. وبالتالي، $w_i = w_i'$؛ أي أن المجموع من أجل v وحيد. ينتج عن ذلك أن V هو المجموع المباشر للـ W_i.

30.17 أثبت (ii) في مبرهنة 3.17.

■ ليكن $v \in V$. بما أن V مجموع مباشر للـ W_i، فيكون لدينا $v = w_1 + \ldots + w_r$، حيث $w_i \in W_i$. وبما أن (w_{ij}) قاعدة لـ W_i، فإن كل w_i يكون تركيبة خطية للـ w_{ij}، وبذلك يكون v تركيبة خطية لعناصر B. وبذلك، فإن B تولّد V. نبين الآن أن B مستقلة خطياً. لنفترض أن $a_{11}w_{11} + \ldots + a_{1n'}w_{1n'} + \ldots + a_{r1}w_{r1} + \ldots + a_{rn'}w_{rn'} = 0$. لاحظ أن $a_{i1}w_{i1} + \ldots + a_{ini}w_{ini} \in W_i$. يكون لدينا أيضاً $0 + 0 + \ldots + 0$ حيث $0 \in W_i$. بما أن مثل هذا المجموع من أجل 0 وحيد، فإن $a_{i1}w_{i1} + \ldots + a_{in'}w_{in'} = 0$ من أجل $i = 1,\ldots,r$. استقلال القواعد $\{w_{ij}\}$ يقتضي أن كل الـ a تكون 0. وبذلك، تكون B مستقلة خطياً، وتكون بذلك قاعدة لـ V.

31.17 ليكن $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$، وليكن $E: V \to V$ تطبيق الإسقاط المعرّف بواسطة $E(v) = w_k$، حيث $v = w_1 + \ldots + w_r$، $w_i \in W_i$. بين أن E خطيٌّ.

■ لنفترض أنه من أجل $u \in V$، $W'_1 + \ldots + w'_r$، $w'_i \in W_i$. $v + u = (w_1 + w'_1) + \ldots + (w_r + w'_r)$ و $kv = kw_1 + \ldots + kw_r$، $kw_i, w_i + w'_i \in W_i$، مجاميعا وحيدة مقابلة لـ v+u و kv. وبالتالي، $E(v+u) = w_k + w'_k = E(v) + E(u)$ و $E(kv) = kw_k = kE(v)$. إذن، يكون E خطياً.

32.17 بيِّن أن $E^2 = E$ من أجل تطبيق الإسقاط E أعلاه.

■ لدينا أولاً أن $w_k = 0 + \ldots + 0 + w_k + 0 + + \ldots + 0$ هو المجموع الوحيد المقابل لـ $w_k \in W_k$؛ وبالتالي $E(w_k) = w_k$. إذن، $E^2(v) = E(E(v)) = E(w_k) = w_k = E(v)$ من أجل أي $v \in V$. وبذلك، $E^2 = E$ كما هو مطلوب.

مبرهنة 4.17: لنفترض أن $E: V \to V$ خطيٌّ وأن $E^2 = E$. إذن:

(i) $E(u) = u$ من أجل أي $u \in \text{Im}\, E$.

(ii) $V = \text{Im}\, E \oplus \text{Ker}\, E$.

(iii) يكون E مسقط V على $\text{Im}\, E$.

ملاحظة: انطلاقاً من هذه المبرهنة والمسألتين 31.17 و 32.17، يكون التطبيق الخطي $T: V \to V$ إسقاطاً إذا وفقط إذا $T^2 = T$. وغالباً ما يستخدم هذا التوصيف للإسقاط بمثابة تعريف له.

33.17 أثبت (i) في مبرهنة 4.17.

■ إذا $u \in \text{Im}\, E$، إذن يوجد $v \in V$ يحقق $E(v) = u$؛ وبالتالي $E(u) = E(E(v)) = E^2(v) = E(v) = u$، كما هو مطلوب.

34.17 أثبت (ii) في مبرهنة 4.17.

■ ليكن $v \in V$. يمكننا كتابة v في الشكل $v = E(v) + v - E(v)$. الآن، وبما أن $E(v - E(v)) = E(v) - E^2(v) = E(v) - E(v) = 0$، $v - E(v) \in \text{Ker}E$. ينتج عن ذلك أن $V = \text{Im}E + \text{Ker}\, E$.

نفترض الآن أن $w \in \text{Im } E \cap \text{Ker } E$. نجد، من (i) في مبرهنة 4.17، أن $E(w) = w$ لأن $w \in \text{Im } E$. لدينا، من جهة أخرى، $E(w) = 0$ لأن $w \in \text{Ker } E$. إذن $w = 0$ و $\text{I}_m E \cap \ker E = \{0\}$. هذان الشرطان يحققان أنّ V هو المجموع المباشر لصورة ونواة E.

35.17 أثبت (iii) في مبرهنة 4.17.

■ ليكن $v \in V$ ولنفترض أن $v = u + w$ حيث $u \in \text{I}_m E$ و $w \in \text{Ker} E$. لاحظ أن $E(u) = u$ من (i) في مبرهنة 4.17 و $E(w) = 0$ لأن $w \in \text{Ker} E$. وبالتالي $E(v) = E(u+w) = E(u) + E(w) = u + 0 = u$. أي أن E مسقط V على صورته.

36.17 ليكن $E: V \to V$ تطبيق إسقاط، أي أن $E^2 = E$. بيّن أن $I - E$ تطبيق إسقاط.

■ $(I - E)^2 = (I - 2E + E^2) = (I - 2E + E) = I - E$. وبذلك، يكون $I - E$ إسقاطاً.

3.17 تحليل مجموع ـ مباشر لا متغير

37.17 عرّف تحليل مجموع ـ مباشر لا متغير، لفضاء متجهي، بالنسبة لمؤثر خطي.

■ ليكن $T: V \to V$ خطّياً. ولنفترض أن V يكون المجموع المباشر للفضاءات الجزئية (غير الصفرية) اللاّمتغيرة -T $W_1, \ldots, W_r$، أي أن $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$ و $T(W_i) \subseteq W_i$، $i = 1, \ldots, r$. إذن، نقول عن الفضاءات الجزئية $W_1, \ldots, W_r$ أنها تختزل T أو أنها تشكل «تحليل مجموع ـ مباشر لا متغيراً -T» لـ V. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان T_i تقييد T على W_i، فإننا نقول أن T قابلة للتحليل إلى المؤثرات T_i أو أن T المجموع المباشر لـ T_i، ونكتب $T = T_1 \oplus \ldots \oplus T_r$.

38.17 ليكن $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ المؤثر الخطي الذي يدير كل متجه حول محور -z بزاوية θ [كما هو موضح في الشكل 17-1]؛ أي أن $T(x,y,z) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta, z)$. بيّن أن W (المستوى -xy) و U (محور -z) يشكلان تحليل مجموع مباشر لا متغيراً -T لـ $\mathbf{R}^3$.

■ لاحظ أن $\mathbf{R}^3 = W \oplus U$، لأن الطريقة الوحيدة، التي يمكن بها كتابة $v = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ كمجموع لمتجه في W ومتجه في U هي كما يلي: $(a,b,c) = (a,b,0) + (0,0,c)$. كما أن W و U لا متغيران تحت T. وبذلك، يشكل W و U تحليل مجموع ـ مباشر لا متغيراً -T لـ $\mathbf{R}^3$.

تتضمن المبرهنات الثلاث التالية [والتي ستتم البرهنة عليها في المسائل 39.17، 44.17، 45.17] المحتوى الرئيسي لهذا القسم.

مبرهنة 5.17: لنفترض أن $T: V \to V$ خطي، وأن V المجموع المباشر للفضاءات الجزئية اللاّمتغيرة -T: $W_1, \ldots, W_r$. إذا كانت A_i التمثيل المصفوفي لتقييد T على W_i، فإن T يمكن تمثيلها بواسطة المصفوفة المركبة القطرية

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

مبرهنة 6.17 **[مبرهنة التحليل الأولي]:** ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً بحدودية أصغرية $m(t) = f_1(t)^{n_1} f_2(t)^{n_2} \ldots f_r(t)^{n_r}$، حيث الـ $f_i(t)$ حدوديات واحدية المعامل الرئيسي مختلفة وغير خزولة. إذن، يكون V المجموع المباشر للفضاءات الجزئية اللامتغيرة -T، $W_1, \ldots, W_r$ وحيث W_i نواة $f_i(T)^{n_i}$. كما أن $f_i(t)^{n_i}$ هي الحدودية الاصغرية لتقييد T على W_i.

مبرهنة 7.17: يكون لمؤثر خطي $T: V \to V$ تمثيل مصفوفي قطري إذا وفقط إذا كانت حدوديته الأصغرية $m(t)$ جداء لحدوديات خطية مختلفة.

مبرهنة 8.17 **[شكل بديل لمبرهنة 7.17]:** تكون مصفوفةٌ A مشابهة لمصفوفة قطرية إذا وفقط إذا كانت حدوديتها الاصغرية جداءً لحدوديات خطية مختلفة.

ملاحظة: إن مبرهنة 8.17 تمييز مفيد للمؤثرات القابلة للتقطير؛ أنظر مثلاً المسألة 46.17.

39.17 لنفترض أن $T: V \to V$ خطي، وأن $V = U \oplus W$ تحليل مجموع ـ مباشر لا متغير -T لـ V. أثبت مبرهنة 5.17 في حالة أن $\dim U = 2$ و $\dim W = 3$.

■ لنفترض أن $\{u_1, u_2\}$ و $\{w_1, w_2, w_3\}$ قاعدتان لـ U و W، على الترتيب. إذا كان T_1 و T_2 يرمزان لتقييدي T على U و W على الترتيب، إذن

$$\begin{aligned} T_1(u_1) &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ T_1(u_2) &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T_2(w_1) &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 + b_{13}w_3 \\ T_2(w_2) &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 + b_{23}w_3 \\ T_2(w_3) &= b_{31}w_1 + b_{32}w_2 + b_{33}w_3 \end{aligned}$$

وبالتالي، يكون

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

تمثيلين مصفوفين لـ T_1 و T_2 على الترتيب. نجد، من مبرهنة 3.17، أن $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ قاعدة لـ V. بما أن $T(u_i) = T_1(u_i)$ و $T(w_j) = T_2(w_j)$، فإن التمثيل المصفوفي لـ T في هذه القاعدة يكون المصفوفة المركبة القطرية $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

ملاحظة: إن إثبات المبرهنة 5.17 يماثل تماماً البرهان السابق، لذلك فسوف يحذف.

40.17 لنفترض أن $T: V \to V$ خطي، وأن $T = T_1 \oplus T_2$ بالنسبة لتحليل مجموع ـ مباشر لا متغير -T: $V = U \oplus W$. ولتكن $m(t)$، $m_1(t)$، $m_2(t)$ الحدوديات الأصغرية لـ T، T_1، T_2 على الترتيب. بيِّن أن $m(t)$ هي المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(t)$ و $m_2(t)$.

■ نعرف، من المسألة 16.17، أن $m_1(t)$ و $m_2(t)$ تقسمان $m(t)$. لنفترض الآن أن $f(t)$ مضاعف لـ $m_1(t)$ و $m_2(t)$ معاً؛ إذن $f(T_1)(U) = 0$ و $f(T_2)(W) = 0$. ليكن $v \in V$؛ إذن، $v = u + w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. الآن، $f(T)v = f(T)u + f(T)w = f(T_1)u + f(T_2)w = 0 + 0 = 0$. أي أن T صفرٌ لـ $f(t)$. وبالتالي، فإن $m(t)$ تقسم $f(t)$. وبذلك، تكون $m(t)$ المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(t)$ و $m_2(t)$.

41.17 لتكن، في المسألة السابقة، $\Delta(t)$، $\Delta_1(t)$، و $\Delta_2(t)$ ترمز على الترتيب إلى الحدوديات المميزة لـ T، T_1، T_2. بيِّن أن $\Delta(t) = \Delta_1(t)\Delta_2(t)$.

■ نعرف، من مبرهنة 5.17، أن لـ T تمثيلاً مصفوفياً $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$، حيث A و B تمثيلان مصفوفيان لـ T_1 و T_2 على الترتيب. إذن

$$\Delta(t) = |tI - M| = \begin{vmatrix} tI - A & 0 \\ 0 & tI - B \end{vmatrix} = |tI - A|\,|tI - B| = \Delta_1(t)\Delta_2(t)$$

كما هو مطلوب.

مبرهنة 9.17: لنفترض أن $T: V \to V$ خطيّ، وأن $f(t) = g(t)h(t)$ حدوديات بحيث أن $f(T) = 0$، وأن $g(t)$ و $h(t)$ أوليتان نسبياً. إذن، يكون V المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين اللامتغيرين -T، U و W، حيث $U = \operatorname{Ker} g(T)$ و $W = \operatorname{Ker} H(T)$.

42.17 أثبت مبرهنة 9.17.

■ لاحظ أولاً أن U و W لا متغيران -T (بواسطة مبرهنة 1.17). بما أن $g(t)$ و $h(t)$ أوليان نسبياً، فإنه توجد حدوديتان $r(t)$ و $s(t)$ بحيث أن $r(t)g(t) + s(t)h(t) = 1$. وبالتالي، من أجل المؤثر T، يكون لدينا

$$r(T)g(T) + s(T)h(T) = I \tag{1}$$

ليكن $v \in V$؛ إذن نحصل، من (1)، على $v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v$. ولكن الحدّ الأول في هذا المجموع ينتمي إلى

$W = Ker\, h(T)$. لأن $h(T)r(T)g(T)v = r(T)g(T)h(T)v = r(T)f(T)v = r(T)0v = 0$. وبالمثل، ينتمي الحدّ الثاني إلى U. وبالتالي، يكون V مجموعاً لـ U و W.

لإثبات أن $V = U \oplus W$، يجب علينا تبيان أن مجموعاً $v = u + w$، حيث $u \in U$ و $w \in W$، يتحدد بشكل وحيد بواسطة v . نطبق المؤثر $r(T)g(T)$ على $v = u + w$ ونستخدم $g(T)u = 0$، فنحصل على $r(T)g(T)v = r(T)g(T)u + r(T)g(T)w = r(T)g(T)w$. أيضاً، بتطبيق (1) على w وحده وإستخدام $h(T)w = 0$، نحصل على $w = r(T)g(T)w + s(T)h(T)w = r(T)g(T)w$. تعطينا الصيغتان أعلاه معاً $w = r(T)g(T)v$، وبذلك يتحدد w بشكل وحيد بواسطة v. بالمثل، يتحدد u وبشكل وحيد بواسطة v. وبالتالي، $V = U \oplus W$ كما هو مطلوب.

مبرهنة 10.17: لنفترض، في مبرهنة 9.17، أن $f(t)$ الحدودية الأصغرية لـ T (وأن $g(t)$ و $h(r)$ واحديتا المعاملين الرئيسيين). إذن، تكون $g(t)$ و $h(t)$ الحدوديتين الأصغريتين لـ T_1 و T_2 على الترتيب [حيث T_1 تقييد T على U، و T_2 تقييد T على W].

43.17 أثبت مبرهنة 10.17.

▩ لتكن $m_1(t)$ و $m_2(t)$ الحدوديتين الأصغريتين لـ T_1 و T_2، على الترتيب. لاحظ أن $g(T_1) = 0$ و $h(T_2) = 0$، لأن $U = Ker\, g(t)$ و $W = Ker\, h(t)$. إذن،

$m_1(t)$ تقسم $g(t)$ و $m_2(t)$ تقسم $h(t)$ (1)

نجد، من المسألة 40.17، أن $f(t)$ هي المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(t)$ و $m_2(t)$. ولكن $m_1(t)$ و $m_2(t)$ أوليتان نسبياً، لأن $g(t)$ و $h(t)$ أوليتان نسبياً. ينتج عن ذلك أن $f(t) = m_1(t)m_2(t)$. لدينا أيضاً أن $f(t) = g(t)h(t)$. هاتان المعادلتان، معاً مع (1)، وحقيقة أن كل الحدوديات واحدية المعاملات الرئيسي، تقتضي أن $g(t) = m_1(t)$ و $h(t) = m_2(t)$؛ وهو المطلوب.

44.17 أثبت مبرهنة التحليل الأولي (مبرهنة 6.17).

▩ يكون الإثبات بالاستقراء على r. الحالة $r = 1$ بديهية. لنفترض أنه قد تم إثبات المبرهنة من أجل $r - 1$. يمكننا، بواسطة مبرهنة 9.17، كتابة V في شكل المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين اللاّمتغيرين -T W_1، V_1، حيث W_1 نواة $f_1(T)^{n1}$ و V_1 نواة $f_2(T)^{n2}...f_r(T)^{nr}$. نعرف، من مبرهنة 10.17، أن الحدوديتين الاصغريتين لتقييدي T على W_1 و V_1 هما، على الترتيب $f_1(t)^{n1}$ و $f_2(t)^{n2}...f_r(t)^{nr}$.

لنرمز لتقييد T على V_1 بـ T_1. نجد، بالفرضية الاستقرائية، أن V_1 هو المجموع المباشر للفضاءات الجزئية $W_2,...,W_r$ حيث W_i نواة $f_i(T_1)^{ni}$، وحيث $f_i(T)^{ni}$ الحدودية الأصغرية من أجل تقييد T_1 على W_i. ولكن نواة $f_i(T_1)^{ni}$، من أجل $i = 2,...,r$، تكون بالضرورة محتواه في V_1 لأن $f_i(t)^{ni}$ تقسم $f_2(t)^{n2}...f_r(t)^{nr}$. وبذلك، تكون نواة $f_i(T)^{ni}$ هي نفسها نواة $f_i(T_1)^{ni}$، وهي W_i. أيضاً، يكون تقييد T على W_i هو نفسه تقييد T_1 على W_i (من أجل $i = 2,...,r$)؛ وبالتالي، تكون $f_i(t)^{ni}$ الحدودية الأصغرية من أجل تقييد T على W_i. وبذلك، يكون $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_r$ التحليل المطلوب لـ T.

45.17 أثبت مبرهنة 7.17.

▩ لنفترض أن $m(t)$ جداءٌ لحدوديات خطية مختلفة؛ لتكن، $m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)...(t - \lambda_r)$، حيث الـ λ_i سلّميات مختلفة. نجد، من مبرهنة التحليل الأولي، أن V المجموع المباشر لفضاءات جزئية $W_1,...,W_r$ حيث $W_i = Ker(T - \lambda_i I)$. وبذلك، إذا $v \in W_i$، إذن $(T - \lambda_i I)(v) = 0$ أو $T(v) = \lambda_i v$. بتعبير آخر، يكون كل متجه في W_i متجهاً ذاتياً مقرناً بالقيمة الذاتية λ_i . نعرف، من مبرهنة 4.10، أن إتحاد قواعد $W_1,...,W_r$ يكون قاعدة لـ V. تتكون هذه القاعدة من متجهات ذاتية، وبذلك تكون T قابلة للتقطير.

بالعكس، لنفترض أن T قابلة للتقطير، أي أن لـ V قاعدة متكونة من متجهات ذاتية لـ T. لتكن $\lambda_1,...,\lambda_s$ القيم الذاتية المختلفة لـ T. إذن، المؤثر $f(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)...(T - \lambda_s I)$ يطبق كل متجه في القاعدة على 0. ينتج عن ذلك أن $m(t)$ جداءٌ لحدويات خطية مختلفة.

46.17 لنفترض أن $A \neq I$ مصفوفة مربعة تحقق $A^3 = I$. حدِّد مـا إذا كانت A (أو لم تكن) مشابهة لمصفوفة قطرية، إذا كانت A مصفوفة (i) فوق الحقل الحقيقي **R**. (ii) الحقل العقدي **C**.

■ بما أن $A^3 = I$، فإن A تكون صفراً للحدودية $f(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$. الحدودية الأصغرية $m(t)$ لا يمكـن أن تكـون $t-1$، لأن $A \neq I$. إذن، $m(t) = t^2+t+1$ أو $m(t) = t^3 - 1$. بمـا أن الحـدوديتيـن ليستـا جـداءيـن لحدوديات خطية فوق **R**، فإن A لا تكون قابلة للتقطير فوق **R**. من جهة أخرى، كل واحدة من الحدوديتين جداء لحدوديات خطية مختلفة فوق **C**. وبالتالي، تكون A قابلة ـ للتقطير فوق **C**.

4.17 مؤثرات ومصفوفات معدومة القوى

47.17 عرِّف مؤثراً معدوم القوى، ومصفوفة معدومة القوى.

■ يصطلح على أن مؤثراً خطياً $T: V \to V$ يكون «معدوم القوى» إذا $T^n = 0$ من أجل عدد صحيح موجب ما n؛ ونطلق على k اسم «دليل/index إنعدام القوى» لـ T إذا $T^K = 0$ ولكن $T^{k-1} \neq 0$. بالمثل، نقول عن مصفوفة مربعة A أنها «معدومة القوى» إذا $A^n = 0$، من أجل عدد صحيح موجب ما n، وأن «دليلها» k إذا $A^k = 0$ ولكن $A^{k-1} \neq 0$.

المسائل 48.17-51.17 تتعلق بمصفوفة مربعة n- معدومة القوى A، ذات دليل k.

48.17 ما هي الحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ A؟

■ بما أن $A^k = 0$ و $A^{k-1} \neq 0$، يكون لدينا $m(t) = t^k$.

49.17 أوجد القيم الذاتية لـ A.

■ بما أن $m(t) = t^k$ الحدودية الأصغرية لـ A، فإن 0 فقط يكون قيمة ذاتية لـ A.

50.17 بيِّن أن $k \leqslant n$، أي أن دليل A لا يتجاوز مرتبتها.

■ بما أن درجة الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A تكون n، إذن $k = \deg m(t) \leq \deg \Delta(t) = n$. وبذلك، $k \leqslant n$.

51.17 بيِّن أن A شاذة.

■ بما أن $A^k = 0$، يكون لدينا أن A^k شاذة. تذكر أن جداء مصفوفات غير شاذة يكون مصفوفة غير شاذة؛ وبالتالي، يجب أن تكون A شاذة.

المسائل 52.17-55.17 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

52.17 هل A معدمة القوى؟ إذا كان الجواب نعم، ما هو دليلها؟

■ نحسب
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = 0$$

وبذلك، تكون A معدومة القوى ودليلها 3.

53.17 هل B معدومة القوى؟ إذا كان الجواب نعم، ما هو دليلها؟

■ نحسب
$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \\ 4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

وبذلك، لا تكون B معدومة القوى. [لسنا في حاجة لاختيار قوى أعلى من مرتبة B].

54.17 هل C معدومة القوى؟ إذا كان الجواب نعم، ما هو دليلها؟

■ نحسب $C^2 = 0$. إذن، تكون C معدومة القوى بدليل 2.

55.17 عرّف مصفوفة معدومة القوى أساسية N ذات دليل k.

■ N هي مصفوفة مربعة -k، تكون مداخلها على القطر الثانوي العلوي مساوية لـ 1، وبقية مداخلها صفرية، أي

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[**ملاحظة:** سوف نثبت، في المسألة 67.17، حقيقة أن N معدومة القوى بدليل k].

56.17 اكتب المصفوفات معدومة ـ القوى الأساسية من المرتبات 1، 2، 3، 4.

■ المصفوفات هي:

$$(0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة معدومة القوى الأساسية من المرتبة 1 هي المصفوفة الصفرية 1×1.

أن المحتوى الرئيسي لهذا القسم هو المبرهنة الأساسية التالية حول المؤشرات معدومة ـ القوى [والتي سوف نبرهنها في المسألة 70.17].

مبرهنة 11.17: ليكن $T: V \longrightarrow V$ مؤشراً معدوم القوى بدليل k. إذن، يكون لـ T تمثيل مصفوفي مركب قطري في الشكل

$$M = \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & N_m \end{pmatrix}$$

بحيث أن كل مدخل قطري N_i يكون مصفوفة جزئية أساسية معدومة القوى أيضاً:

(i) توجد على الأقل مصفوفة جزئية واحدة N مرتبتها k، وتكون مرتبات كل الـ N الأخريات أقل من k أو تساويها.

(ii) يتحدد عدد الـ N لكل مرتبة ممكنة، وبشكل وحيد، بواسطة T.

(iii) أن العدد m للمصفوفات الجزئية N يساوي صفرية T.

مبرهنة 12.17 [**شكل بديل للمبرهنة 11.17**]: كل مصفوفة معدومة القوى A مشابهة لمصفوفة معدومة القوى M في الشكل أعلاه.

ملاحظة: تسمى المصفوفة M أعلاه «مصفوفة معدومة القوى قانونية»، وتسمى M «الشكل القانوني» لـ T ولـ A. يفترض أن مثل هاتين المصفوفتين القانونيتين M متساويتان إذا كان لهما نفس المجموعة من المصفوفات الجزئية القطرية. [قد تختلف مرتبات المصفوفات الجزئية].

57.17 صف كل المصفوفات معدومة ـ القوى القانونية من المرتبة 3.

■ هذه المصفوفات ذات الأدلة 1، 2، 3، وهي كما يلي:

دليل 1: $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ دليل 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ دليل 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

58.17 بيِّن أن هناك مصفوفتين معدومتي ـ القوى قانونيتين، وغير متشابهتين، من المرتبة 4 والدليل 2.

■ المصفوفتان هما:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

59.17 أوجد الشكل معدوم ـ القوى القانوني للمصفوفة A في المسألة 52.17.

■ بما أن دليل A هو 3، فإن شكلها القانوني كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

60.17 أوجد الشكل معدوم ـ القوى القانوني للمصفوفة B في المسألة 53.17.

■ B ليست معدومة القوى؛ وبالتالي فهي غير متشابهة مع أن مصفوفة معدومة ـ القوى قانونية.

61.17 أوجد الشكل معدوم ـ القوى القانوني للمصفوفة C في المسألة 54.17.

■ بما أن دليل C هو 2، فإن شكلها القانوني يكون كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

62.17 لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. هل A معدومة القوى؟ إذا كان الجواب نعم، ما هو دليلها؟

■ نحسب
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و $A^3 = 0$. إذن، A معدومة القوى بدليل 3.

63.17 أوجد الشكل القانوني M للمصفوفة A أعلاه.

■ بما أن A معدومة القوى بدليل 3، فإن M تحتوي على مصفوفة جزئية قطرية مرتبتها 3، ولا تحتوي على مصفوفات من مرتبات أعلى. هناك إمكانيتان من أجل المصفوفات الجزئية القطرية الأخرى: مصفوفة جزئية 2×2، أو مصفوفتان جزئيتان 1×1. بما أن رتبة $A = 2$، فإن صفرية $A = 5 - 2 = 3$. لذلك، فإن M يجب أن تحتوي على ثلاث مصفوفات جزئية على القطر الرئيسي. إذن، تتضمن M مصفوفة جزئية واحدة مرتبتها 3، ومصفوفتان من المرتبة 1؛ أي

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

توطئة 13.17: ليكن $T: V \to V$ خطياً. لنفترض، من أجل $v \in V$، أن $T^k(v) = 0$ و $T^{k-1}(v) \neq 0$. إذن

(i) المجموعة $S = \{v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ مستقلة خطياً.

(ii) الفضاء الجزئي W، المولَّد بواسطة S، يكون لا متغيراً -T.

(iii) التقييد $\hat{T}$ لـ T على W يكون معدوم ـ القوى بدليل k.

(iv) نسبة للقاعدة $\{T^{k-1}(v), \ldots, T(v), v\}$ لـ W، فإن مصفوفة $\hat{T}$ تكون المصفوفة القانونية N المربعة k-:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبذلك، تكون المصفوفة N المربعة k- معدومة القوى بدليل k.

64.17 أثبت (i) في توطئة 13.17.

■ لنفترض أن

$$av + a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + \cdots + a_{k-1} T^{k-1}(v) = 0 \qquad (1)$$

بتطبيق T^{k-1} على (1) واستخدام $T^k(v) = 0$، نحصل على $aT^{k-1}(v) = 0$؛ بما أن $T^{k-1}(v) \neq 0$، إذن $a = 0$. نطبق الآن T^{k-2} على (1) ونستخدام $T^k(v) = 0$ و $a = 0$، نجد أن $a_1 T^{k-1}(v) = 0$؛ وبالتالي، $a_1 = 0$. ثم نطبق T^{k-3} على (1) ونستخدم $T^k(v) = 0$ و $a = a_1 = 0$، نحصل على $a_2 T^{k-1}(v) = 0$؛ إذن $a_2 = 0$. نواصل هذا الأسلوب، فنجد أن كل الـ a تكون أصفاراً؛ وبذلك، تكون S مستقلة.

65.17 أثبت (ii) في توطئة 13.17.

■ ليكن $v \in W$. إذن، $v = bv + b_1 T(v) + b_2 T^2(v) + \ldots + b_{k-1} T^{k-1}(v)$. نحصل، باستخدام $T^k(v) = 0$، على $T(v) = bT(v) + b_1 T^2(v) + \ldots + b_{k-2} T^{k-1}(v) \in W$. وبذلك، يكون W لا متغيراً -T.

66.17 اثبت (iii) في توطئة 13.17.

■ لدينا $T^k(v) = 0$ فرضاً. إذن، $\hat{T}^k(T^i(v)) = T^{k+i}(v) = 0$. من أجل $i = 0,\ldots,k-1$، أي أن تطبيق $\hat{T}^k$ على كل مُوَلِّد لـ W، يعطينا 0 ؛ وبالتالي، $\hat{T}^k = 0$ ، ويكون $\hat{T}$ معدوم ـ القوى بدليل k على الأكثر . لدينا، من جهة أخرى ، أن $\hat{T}^{k-1}(v) = T^{k-1}(v) \neq 0$ ؛ وبذلك، يكون T معدوم ـ القوى بدليل يساوي k تماماً.

67.17 اثبت (iv) في توطئة 13.17.

■ لدينا، من أجل القاعدة $\{T^{k-1}(v), T^{k-2}(v), \ldots, T(v), v\}$ لـ W،

$$\begin{aligned} \hat{T}(T^{k-1}(v)) &= T^k(v) = 0 \\ \hat{T}(T^{k-2}(v)) &= T^{k-1}(v) \\ \hat{T}(T^{k-3}(v)) &= T^{k-2}(v) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \hat{T}(T(v)) &= T^2(v) \\ \hat{T}(v) &= T(v) \end{aligned}$$

وبذلك، فإن مصفوفة $\hat{T}$ في هذه القاعدة تكون N.

68.17 ليكن $T: V \to V$ خطياً، وليكن $U = \ker T^i$ و $W = \operatorname{Ker} T^{i+1}$. بيِّن أن (i) $U \subset W$، (ii) $T(W) \subset U$.

■ (i) نفترض أن $u \in U = \operatorname{Ker} T^i$. إذن، $T^i(u) = 0$ وبذلك $T^{i+1}(u) = T(T^i(u)) = T(0) = 0$. إذن، $u \in \operatorname{Ker} T^{i+1} = W$. ولكن هذا صحيح من أجل كل $u \in U$؛ وبالتالي، $U \subset W$.

(ii) بالمثل، إذا $w \in W = \operatorname{Ker} T^{i+1}$، إذن $T^{i+1}(w) = 0$. وبذلك، $T^{i+1}(W) = T^i(T(w)) = T^i(0) = 0$، ويكون لدينا $T(W) \subset U$.

69.17 ليكن $T: V \to V$ خطياً. وليكن $X = \text{Ker}\, T^{i-2}$، $Y = \text{Ker}\, T^{i-1}$، $Z = \text{Ker}\, T^{i}$. نعرف، من المسألة السابقة، أن $X \subset Y \subset Z$. لنفترض أن $\{u_1,...,u_r\}, \{u_1,...,u_r,v_1,...,v_s\}, \{u_1,...,u_r,v_1,...,v_s, w_1,...,w_t\}$ قواعد لـ X، Y، Z، على الترتيب. بيِّن أن $S = \{u_1,...,u_r,T(w_1),...,T(w_t)\}$ محتواة في Y وأنها مستقلة خطياً.

■ نعرف، من المسألة السابقة، أن $T(Z) \subset Y$ وبالتالي $S \subset Y$. نفترض الآن أن S مترابطة خطياً. يوجد إذن علاقة $a_1u_1 + ... + a_ru_r + b_1T(w_1) + ... + b_tT(w_t) = 0$، حيث يكون معامل واحد على الأقل مختلفاً عن الصفر. أيضاً، وبما أن $\{u_i\}$ مستقلة، فإن واحداً على الأقل من الـ b_k يجب أن يكون غير صفري. ينتج عن ذلك أن $b_1T(w_1) + ... + b_tT(w_t) = -a_1u_1 - ... - a_ru_r \in X = \text{Ker}\, T^{i-2}$، وبالتالي، $T^{i-2}(b_1T(w_1) + ... + b_tT(w_t)) = 0$. وهكذا، $T^{i-1}(b_1w_1 + ... + b_tw_t) = 0$ ومن ثم $b_1w_1 + ... + b_tw_t \in Y = \text{Ker}\, T^{i-1}$. بما أن $\{u_i, v_j\}$ تولِّد Y؛ إذن، نحصل على علاقة بين الـ u_i، v_j، w_k حيث يكون واحد من المعاملات، أي واحد من الـ b_k، مختلفاً عن الصفر. هذا يناقض حقيقة أن $\{u_i, v_j, w_k\}$ مستقلة. وبالتالي، يجب أن تكون S مستقلة أيضاً.

70.17 اثبت مبرهنة 11.17. ليكن $T: V \to V$ مؤثراً معدوم القوى دليله k. إذن، يكون لـ T تمثيل مصفوفي مركب قطري ذو مداخل قطرية في الشكل

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

توجد على الأقل N واحدة مرتبتها k، وتكون بقية الـ N بمرتبات لا تتجاوز k. ويتحدد عدد الـ N من كل مرتبة ممكنة، وبشكل وحيد، بواسطة T. كما أن العدد الكلّي للـ N، من كل المرتبات، يساوي صفرية T.

■ لنفترض أن $\dim V = n$. ولتكن $W_1 = \text{Ker}\, T$، $W_2 = \text{Ker}\, T^2, ...$، $W_k = \text{Ker}\, T^k$. نضع $m_i = \dim W_i$، من أجل $i = 1,...,k$. بما أن T ذو دليل k، إذن $W_k = V$ و $W_{k-1} \neq V$، وبذلك $m_{k-1} < m_k = n$. نعرف، من المسألة 17.10، أن $W_1 \subset W_2 \subset ... \subset W_k = V$. لذلك، وبالاستقراء، يمكننا، إختيار قاعدة $\{u_1,...,u_n\}$ لـ V بحيث تكون $\{u_1,...,u_{m_i}\}$ قاعدة لـ W_i.

نختار الآن قاعدة جديدة لـ V يكون لـ T من أجلها الشكل المرغوب. سوف يكون ملائماً عنونة أعضاء هذه القاعدة الجديدة بواسطة زوج من الأدلة. نبدأ بوضع $v(1, k) = u_{m_{k-1}+1}, v(2, k) = u_{m_{k-1}+2}, ..., v(m_k - m_{k-1}, k) = u_{m_k}$ ووضع $v(1, k-1) = Tv(1, k), v(2, k-1) = Tv(2, k), ..., v(m_k - m_{k-1}, k-1) = Tv(m_k - m_{k-1}, k)$. نجد من المسألة السابقة أن $S_1 = \{u_1, ..., u_{m_{k-2}}, v(1, k-1), ..., v(m_k - m_{k-1}, k-1)\}$ مجموعة جزئية في W_{k-1} مستقلة خطية. نوسع S_1 إلى قاعدة لـ W_{k-1} بإضافة عناصر جديدة (إذا دعت الضرورة) نرمز لها بـ $v(m_k - m_{k-1} + 1, k-1), v(m_k - m_{k-1} + 2, k-1), ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, k-1)$. نضع بعد ذلك، $v(1, k-2) = Tv(1, k-1), v(2, k-2) = Tv(2, k-1), ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, k-2) = Tv(m_{k-1} - m_{k-2}, k-1)$. لدينا، أيضاً من المسألة السابقة، $S_2 = \{u_1, ..., u_{m_{k-3}}, v(1, k-2), ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, k-2)\}$ مجموعة جزئية في W_{k-2} مستقلة خطياً، والتي نوسعها إلى قاعدة لـ W_{k-2} بإضافة العناصر $v(m_{k-1} - m_{k-2} + 1, k-2), v(m_{k-1} - m_{k-2} + 2, k-2), ..., v(m_{k-2} - m_{k-3}, k-2)$. نواصل بهذا الأسلوب حتى نحصل على قاعدة جديدة لـ V والتي نرتبها، للسهولة المرجعية، كما يلي:

$$\begin{array}{llll}
v(1, k), & ..., v(m_k - m_{k-1}, k) & & \\
v(1, k-1), & ..., v(m_k - m_{k-1}, k-1), & ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, k-1) & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
v(1, 2), & ..., v(m_k - m_{k-1}, 2), & ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, 2), ..., v(m_2 - m_1, 2) & \\
v(1, 1), & ..., v(m_k - m_{k-1}, 1), & ..., v(m_{k-1} - m_{k-2}, 1), ..., v(m_2 - m_1, 1), & ..., v(m_1, 1)
\end{array}$$

إن الصفر الأخير يشكل قاعدة لـ W_1، والصفين الأخيرين يشكلان قاعدة من أجل W_2، إلخ. ولكن ما يهمنا هنا، هو أن T يطبق كل متجه إلى المتجه الذي يقع تحته مباشرة في الجدول 1 أو إلى 0 إذا كان المتجه في الصف الأخير. أي أن

$$Tv(i,j)=\begin{cases} v(i,j-1) & j>1 \text{ من أجل} \\ 0 & j=1 \text{ من أجل} \end{cases}$$

من الواضح الآن أن T سوف يكون على الشكل المرغوب إذا رُتِّبت الـ $v(i,j)$ مُعَجَمياً؛ فيبدأ بـ $v(1,1)$ ونُصْعِد العمود الأول إلى $v(1,k)$، ثم نقفز مباشرة إلى $v(2,1)$ ونُصْعِد العمود الثاني إلى أقصى حد ممكن، الخ.

بالإضافة إلى ذلك، سوف يكون لدينا تماماً

$m_k - m_{k-1}$	مداخل قطرية مرتبتها k
$(m_{k-1}-m_{k-2})-(m_k-m_{k-1})=2m_{k-1}-m_k-m_{k-2}$	مداخل قطرية مرتبتها $k-1$
....	....
$2m_2-m_1-m_3$	مداخل قطرية مرتبتها 2
$2m_1-m_2$	مداخل قطرية مرتبتها 1

وهو ما يمكن قراءته مباشرة من الجدول. لدينا على الخصوص، وبما أن الأعداد $m_1,\dots,m_k$ محددة بشكل وحيد بواسطة T، أن عدد المداخل القطرية من كل مرتبة محددة بشكل وحيد بواسطة T. أخيراً، تبين المتطابقة $m_1=(m_k-m_{k-1})+(2m_{k-1}-m_k-m_{k-2})+\dots+(2m_2-m_1-m_3)+(2m_1-m_2)$ أن الصفرية m_1 لـ T تساوي العدد الكلي للمداخل القطرية لـ T.

71.17 لنفترض أن A معدومة القوى بدليل k. بيِّن أن A^T و cA، $c^k\neq 0$، معدومتا القوى بدليل k.

■ لدينا $A^k=0$ إذا وفقط إذا $(A^T)^k=(a^k)^T=0^T=0$. وبذلك، تكون A^T أيضاً معدومة القوى بدليل k. أيضاً، $A^k=0$ إذا وفقط إذا $(cA)^k=c^kA^k=0$. إذن، تكون cA معدومة القوى بدليل k.

72.17 لنفترض أن مصفوفتين معدومتي القوى A و B تبديليتان، أي أن $AB=BA$. بيِّن أن AB معدومة القوى.

■ لنفترض أن $A^m=0$ و $B^n=0$، ولتكن $m\leqslant n$. إذن، $(AB)^n=A^nB^n=A^n0=0$. وبذلك، تكون AB معدومة القوى.

73.17 لنفترض أن مصفوفتين معدومتي القوى A و B تبديليتان. بيِّن أن $A+B$ معدومة القوى.

■ لنفترض $A^m=0$ و $B^n=0$. بما أن A و B تبديليتان، إذن

$$(A+B)^{m+n}=\sum_{i+1}^{m+n}\binom{m+n}{i}A^iB^{m+n-i}$$

إذا $i\geqslant m$، إذن $A^i=0$. إذا $i<m$، إذن $m+n-i\geqslant n$، وبالتالي $B^{m+n-i}=0$. وبذلك، يكون كلُّ حد في مفكوك $(A+B)^{m+n}$ مساوٍ لـ 0. ينتج عن ذلك أن $(A+B)^{m+n}=0$، وتكون $(A+B)$ معدومة القوى.

74.17 لنفترض أن A معدومة القوى بدليل k. بيِّن أن A^n، $n>1$، معدومة القوى بدليل لا يتجاوز k.

■ بما أن $A^k=0$، يكون لدينا $(A^n)^k=(A^k)^n=0^n=0$. وبذلك، تكون A^n معدومة القوى بدليل أقل من k أو يساويه.

75.17 لنفترض أن A و B متشابهتان. بيِّن أن A معدومة القوى بدليل k إذا وفقط إذا كانت B معدومة القوى بدليل k.

■ لنفترض أن $B=P^{-1}AP$. إذا $A^r=0$، إذن $B^r=(P^{-1}AP)^r=P^{-1}A^rP=P^{-1}0P=0$. بالمثل، إذا $B^r=0$، فإن $A^r=0$. إذن، تكون A معدومة القوى إذا وفقط إذا كانت B معدومة القوى، ويكون لهما في هذه الحالة نفس الدليل.

5.17 شكل جوردان القانوني

76.17 عرِّف قالباً لجوردان J، مرتبته k، مقرناً بالقيمة الذاتية λ.

■ إن J هو المصفوفة المربعة $-k$، التي عناصرها القطرية تكون λ، وعناصر على القطر الثانوي العلوي تكون 1، وبقية عناصرها أصفاراً؛ أي

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

77.17 اكتب قوالب جوردان من المرتبات 1، 2، 3، 4 المقرنة بالقيمة الذاتية $\lambda = 7$.

■ المصفوفات كما يلي:

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

78.17 بيِّن كيف يمكن كتابة قالبٍ لجوردان كمجموع لمصفوفة سلّمية ومصفوفة جزئية معدومة القوى قانونية N.

■ لدينا $J = \lambda I + N$ كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المسائل 17.81-17.97 تتعلق بقالب جوردان A من المرتبة 4:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

79.17 ما هي الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والحدودية الأصغرية $m(t)$ لـ A؟
ما هي القيم الذاتية لـ A؟

■ الحدوديتان المميَّزة $\Delta(t)$ والأصغرية $m(t)$ تساويان كلاهما $(t-7)^4$؛ أي أن $\Delta(t) = m(t) = (t-7)^4$. وبذلك، تكون $\lambda = 7$ القيمة الذاتية الوحيدة.

80.17 أوجد قاعدة من أجل الفضاء الذاتي للقيمة الذاتية $\lambda = 7$.

■ نعوض بـ $t = 7$ في المعادلة المصفوفية $tI - A = 0$ فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{أو} \qquad \begin{aligned} -y \qquad\qquad &= 0 \\ -z \qquad &= 0 \\ -t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

هناك متغير حرّ واحد x؛ وبالتالي، يشكل $v = (1,0,0,0)$ قاعدة من أجل الفضاء الذاتي لـ $\lambda = 7$.

81.17 ما هو التكرار الجبري والتكرار الهندسي للقيمة الذاتية $\lambda = 7$؟

■ بما أن $\Delta(t) = (t-7)^4$، فإن التكرار الجبري يكون 4. أما التكرار الهندسي فيكون 1، لأن الفضاء الذاتي لـ $\lambda = 7$ أحادي ـ البعد.

82.17 عرف مصفوفة لجوردان M.

■ تكون M مصفوفة لجوردان إذا كانت M مصفوفة مركبة تكون قوالبها (مصفوفاتها الجزئية) القطرية، ولتكن $J_1, J_2, \ldots, J_r$ قوالب لجوردان.

83.17 عرّف مصفوفات جوردان المتكافئة.

■ تكون مصفوفة جوردان M_2 مكافئة لمصفوفة جوردان M_1 إذا كان يمكننا الحصول على M_2 من M_1 عن طريق إعادة ترتيب القوالب القطرية.

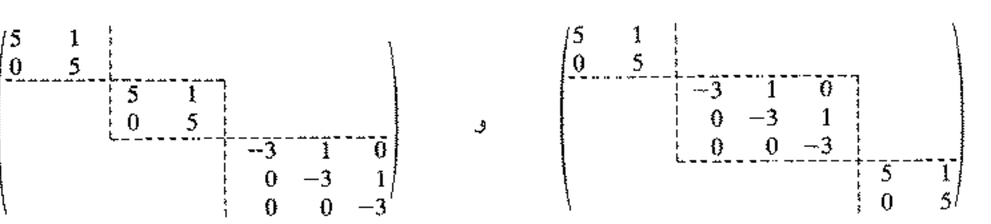
ملاحظة: نحن لا نميز عادة بين مصفوفات جوردان المتكافئة. وعلى الخصوص، فإن إصطلاح «شكل جوردان الوحيد» يعني أنه وحيدٌ مع أخذ التكافؤ في الاعتبار.

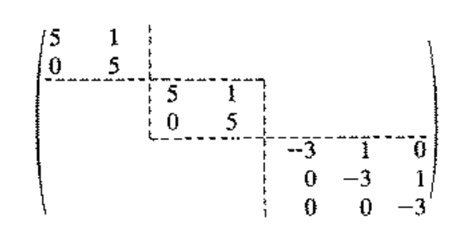
المسائل 84.17-87.17 تتعلق بمصفوفة جوردان التالية:

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & -3 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & -3 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & \\ & & & 0 & 5 & & \\ & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

84.17 أوجد كل مصفوفات جوردان المكافئة لـ M.

■ هناك طريقتان فقط لترتيب القوالب على القطر، كما يلي:





85.17 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والقيم الذاتية لـ M.

■ هنا، $\Delta(t) = (t+3)^3(t-5)^4$. الأس 3 يأتي من حقيقة أن هناك ثلاثة أعداد (−3) على القطر، أما الأس 4 فيأتي من حقيقة أن هناك خمسة أعداد 5 على القطر. وعلى الخصوص، لدينا القيم الذاتية $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 5$.

86.17 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) لـ M.

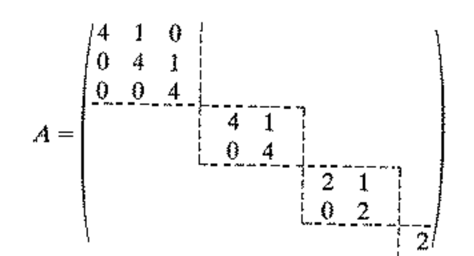
■ هنا، $m(t) = (t+3)^3(t-5)^2$. الأس 3 يأتي من حقيقة أن 3 هي مرتبة أكبر قالب (مجموعة جزئية) مقرن بـ $\lambda_1 = -3$، ويأتي الأس 2 من حقيقة أن 2 هي مرتبة أكبر مجموعة جزئية (قالب) مقرنة بـ $\lambda_2 = 5$. [بشكل بديل، تكون m(t) المضاعف المشترك الأصغر للحدوديات الأصغرية للقوالب (المصفوفات الجزئية).

87.17 أوجد مجموعة قصوى S لمتجهات ذاتية لـ M تكون مستقلة خطياً.

■ كل قالب يسهم بمتجه ذاتي في S. ثلاثة من مثل هذه المتجهات الذاتية هي $v_1 = (1,0,0,0,0,0,0)$، $v_2 = (0,0,0,1,0,0,0)$، $v_3 = (0,0,0,0,0,1,0)$، وهي تقابل القوالب الأول والثاني والثالث. ويكون المدخل 1 في كل متجه موضع المدخل الأول في القالب المقابل.

المسائل 88.17-96.17 تتعلق بمصفوفتي جوردان التاليتين:

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



88.17 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والقيم الذاتية لـ A.

■ هنا، $\Delta(t)=(t-4)^5(t-2)^3$ ، لأن هناك خمسة أعداد (4) وثلاثة أعداد (2) على القطر. وبذلك، تكون $\lambda_1=4$ و $\lambda_2=2$ القيمتين الذاتيتين لـ A.

89.17 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ والقيم الذاتية لـ B.

■ هنا، $\Delta(t)=(t-4)^5(t-2)^3$ ، لأنه توجد خمسة أربعات وثلاثة أعداد (2) على القطر. إذن، تكون $\lambda_1=4$ و $\lambda_2=2$ القيمتين الذاتيتين لـ B.

90.17 هل A و B مصفوفتان متكافئتان لجوردان؟

■ على الرغم من أن A و B يملكان نفس الحدودية المميزة ونفس القيم الذاتية، إلا أنهما ليستا متكافئتين لأن القوالب القطرية مختلفة.

91.17 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) لـ A.

■ هنا، $m(t)=(t-4)^3(t-2)^2$ لأن 3 هي مرتبة أكبر قالب في A مقرن بـ $\lambda_1=4$، و 2 مرتبة أكبر قالب في A مقرن بـ $\lambda_2=2$.

92.17 أوجد البعد d_1 للفضاء الذاتي E_1 لـ $\lambda_1=4$ في A. [بتعبير آخر، أوجد التكرار الهندسي لـ $\lambda_1=4$ في A]. أوجد أيضاً قاعدة للفضاء الذاتي E_1.

■ هنا $d_1=2$ لأنه يوجد قالبان مقرنان بـ $\lambda_1=4$. أيضاً، $v_1=(1,0,0,0,0,0,0,0)$ و $v_2=(0,0,0,1,0,0,0,0)$ يشكلان قاعدة من أجل E_1.

93.17 أوجد البعد d_2 للفضاء الذاتي E_2 لـ $\lambda_2=2$ في A. أوجد أيضاً قاعدة للفضاء الذاتي E_2.

■ يوجد قالبان (مصفوفتان جزئيتان) في A مقرنان بـ $\lambda_2=2$؛ بالتالي، $d_2=2$. أيضاً، $w_1=(0,0,0,0,0,1,0,0)$ و $w_2=(0,0,0,0,0,0,0,1)$ يشكلان قاعدة لـ E_2.

ملاحظة: إن المدخل 1 في كل واحد من المتجهين الذاتيين أعلاه هو موضع المدخل الأول في القالب المقابل.

94.17 أوجد الحدودية الأصغرية m(t) لـ B.

■ لاحظ أن 2 مرتبة أكبر قالب في B مقرن بـ $\lambda_1=4$، و 3 مرتبة أكبر قالب في B مقرن بـ $\lambda_2=2$؛ وبالتالي، $m(t)=(t-4)^2(t-2)^3$.

95.17 أوجد البعد d_1 للفضاء الذاتي E_1 المقرن بـ $\lambda_1=4$ في B. [لاحظ أن d_1 التكرار الهندسي لـ $\lambda_1=4$]. أوجد أيضاً قاعدة للفضاء الذاتي E_1.

■ توجد ثلاثة قوالب في B مقرنة بـ $\lambda_1 = 4$؛ وبالتالي، $d_1 = 3$. أيضاً، تشكل $v_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$، $v_2 = (0,0,1,0,0,0,0,0)$، $v_3 = (0,0,0,0,1,0,0,0)$ قاعدة لـ E_1.

96.17 أوجد البعد d_2 للفضاء الذاتي E_2 لـ $\lambda_2 = 2$ في B، وأوجد قاعدة لـ E_2.

■ يوجد قالب واحد فقط في B مقرن بـ $\lambda_2 = 2$؛ إذن، $d_2 = 1$. أيضاً، يشكل $w = (0,0,0,0,0,1,0,0)$ قاعدة لـ E_2.

97.17 أوجد كل مصفوفات جوردان (غير المتكافئة) ذات الحدودية المميزة $\Delta(t) = (t-7)^4$.

■ هناك خمس مصفوفات مثل هذه، هي:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & \\ 0 & 7 & 1 & \\ 0 & 0 & 7 & \\ & & & 7 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & \\ 0 & 7 & & \\ & & 7 & 1 \\ & & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & & \\ 0 & 7 & & \\ & & 7 & \\ & & & 7 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 7 & & & \\ & 7 & & \\ & & 7 & \\ & & & 7 \end{pmatrix}$$

بما أن $\deg \Delta(t) = 4$، فإن كل المصفوفات مرتبتها 4. أيضاً، العدد 7 وحده يظهر على القطر، لأن $\lambda = 7$ القيمة الذاتية الوحيدة.

98.17 أوجد الحدودية الأصغرية لكل واحدة من المصفوفات في المسألة 97.17.

■ لتكن $m_i(t)$ الحدودية الأصغرية لـ A_i. إذن، $m_i(t) = (t-7)^k$ حيث k مرتبة أكبر مصفوفة جزئية (قالب). وبذلك، $m_1(t) = (t-7)^4$، $m_2(t) = (t-7)^3$، $m_3(t) = m_4(t) = (t-7)^2$، $m_5(t) = t-7$.

99.17 أوجد التكرار الهندسي للقيمة الذاتية $\lambda = 7$ في كل واحدة من المصفوفات في مسألة 97.17.

■ ليكن d_i التكرار الهندسي لـ $\lambda = 7$ في A_i. إذن، d_i يساوي عدد القوالب في A_i (المقرنة بـ $\lambda = 7$). إذن، $d_1 = 1$، $d_2 = d_3 = 2$، $d_4 = 3$، $d_5 = 4$.

مبرهنة 14.17: ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً تكون حدوديتاه المميزة والاصغرية: $\Delta(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_r)^{n_r}$، و$m(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$ على الترتيب؛ حيث الـ λ_i سلميات مختلفة. إذن، يكون لـ T تمثيل مصفوفي لجوردان وحيد M [يُسَمَى شكل جوردان القانوني لـ T]. بالإضافة إلى ذلك، فإن القوالب J_{ij} في M، المقرنة بالقيمة الذاتية λ_i، تتصف بالخواص التالية:

(i) يوجد J_{ij} واحد على الأقل مرتبته m_i؛ أما الـ J_{ij} الباقية فمرتباتها لا تتجاوز m_i.

(ii) مجموع مرتبات الـ J_{ij} يساوي n_i.

(iii) عدد الـ J_{ij} يساوي التكرار الهندسي لـ λ_i.

(iv) عدد الـ J_{ij} من كل مرتبة ممكنة يتحدد، بشكل وحيد، بواسطة T.

مبرهنة 15.17 **[شكل بديل للمبرهنة 14.17]:** لتكن A مصفوفة تكون حدوديتها المميزة $\Delta(t)$ جداء لعوامل خطية. إذن، تكون A مشابهة لمصفوفة لجوردان وحيدة M تتمتع بالخواص أعلاه. [المصفوفة M تسمى «شكل جوردان القانوني» لـ A].

100.17 اثبت مبرهنة 14.17، والتي تمثل المحتوى الرئيسي لهذا القسم.

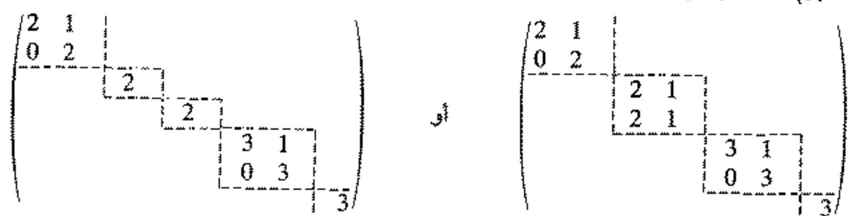
■ نعرف، من مبرهنة التحلل الأولى، أن T قابلة للتحلل إلى مؤثرات $T_1, \ldots, T_r$، أي أن $T = T_1 \oplus \ldots \oplus T_r$، حيث $(t-\lambda_i)^{m_i}$ الحدودية الأصغرية لـ T_i. بذلك، وبشكل خاص، يكون لدينا $(T_1 - \lambda_1 I)^{m_1} = 0, \ldots, (T_r - \lambda_r I)^{m_r} = 0$. نضع $N_i = T_i - \lambda_i I$. إذن $T_i = N_i + \lambda_i I$، من أجل $i = 1, \ldots, r$، حيث $N_i^{m_i} = 0$. أي أن T_i يكون مجموع المؤثر السلمي $\lambda_i I$ ومؤثر معدوم القوى N_i، واللذين دليلهما m_i لأن $(t-\lambda_i)^{m_i}$ هما الحدودية الأصغرية لـ T_i.

الآن، وبواسطة مبرهنة 11.17 حول المؤثرات معدومة القوى، يمكننا إختيار قاعدة بحيث تكون N_i في شكل قانوني. وتُمثل $T_i = N_i + \lambda_i I$، في هذه القاعدة بواسطة مصفوفة مركبة قطرية M_i تكون مداخلها القطرية المصفوفات J_{ij}. ويكون المجموع المباشر j للمصفوفات M_i في شكل جوردان القانوني؛ ويكون بسبب مبرهنة 5.17 تمثيلاً مصفوفياً لـ T.

أخيراً، يجب أن نبين أن القوالب J_{ij} تحقق الخواص المذكورة. تنتج الخاصية (i) من حقيقة أن N_i ذات دليل m_i. وتكون الخاصية (ii) صحيحة لأن T و J لهما نفس الحدودية المميزة. وتكون الخاصية (iii) صحيحة لأن صفرية $N_i = T_i - \lambda_i I$ تساوي التكرار الهندسي للقيمة الذاتية λ_i. أما الخاصية (iv) فتتبع من حقيقة أن الـ T_i، وبالتالي الـ N_i، تتحدد بشكل وحيد بواسطة T.

101.17 لنفترض أن الحدوديتين المميزة والأصغرية لمؤثر T هما على الترتيب $\Delta(t) = (t-2)^4(t-3)^3$ و $m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$. أوجد كل أشكال جوردان القانونية الممكنة.

■ بما أن $\Delta(t) = (t-2)^4(t-3)^3$، فإنه يجب أن يكون هناك أربعة أعداد (2) وثلاثة أعداد (3) على القطر. أيضاً، بما أن $m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$، فيجب أن يوجد قالب مرتبته (2) (ولا توجد قوالب أكبر) مقرنة بالقيمة الذاتية (2)؛ ويوجد قالب مرتبته (2) (يكون الأكبر) مقرن بالقيمة الذاتية (3). هناك إمكانيتان، هما:



تنشأ المصفوفة الأولى إذا كان لـ T متجهان ذاتيان مستقلان مقرنان بقيمتها الذاتية 2؛ أما المصفوفة الثانية فتنشأ عندما يكون لـ T ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة مقرنة بـ 2.

102.17 أوجد كل أشكال جوردان القانونية الممكنة من أجل تطبيق خطي $T: V \to V$ تكون حدوديته المميزة $\Delta(t) = (t-7)^5$ وحدوديته الأصغرية $m(t) = (t-7)^2$.

■ بما أن $\Delta(t) = (t-7)^5$ درجتها 5، فيجب أن تكون مرتبة المصفوفة 5 ويكون لها خمسة أعداد (7) على القطر. أيضاً، وبما أن $m(t) = (t-7)^2$، فلا بد من وجود قالب مرتبته 2 (وهو الأعلى). هناك إمكانيتان، هما:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$$

تنشأ الأولى عندما تكون $\lambda = 7$ ذات تكرار هندسي 3؛ وتنشأ الثانية عندما يكون التكرار الهندسي 4.

103.17 لنفترض أن $T: V \to V$ ذو حدودية مميزة $\Delta(t) = (t+8)^4(t-1)^3$ وحدودية أصغرية $m(t) = (t-8)^3(t-1)^2$. أوجد شكل جوردان القانوني M لـ T.

■ بما أن $\deg \Delta(t) = 7$، فإن مرتبة M تكون 7. بما أن $\Delta(t) = (t+8)^4(t-1)^3$، فإنه يكون لـ M أربعة أعداد (8−) وثلاثة أعداد 1 على القطر أيضاً، بما أن $m(t) = (t-8)^3(t-1)^2$، فلا بد من وجود قالب مرتبته 3 مقرن بـ (3−) وقالب مرتبته 2 مقرن بـ 1. توجد إمكانية واحدة فقط وهي:

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & -8 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & -8 & & & & \\ & & & 8 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

104.17 حدّد كل أشكال جوردان القانونية الممكنة من أجل مؤثر خطي $T: V \to V$ ذي حدودية مميزة $\Delta(t) = (t-2)^3(t-5)^2$.

■ بما أن أس $t-2$ في $\Delta(t)$ هو 3، فإن 2 يجب أن يظهر ثلاث مرات على القطر الرئيسي؛ ولذلك، لا بد من ظهور 5 مرتين. إذن، الأشكال القانونية لجوردان الممكنة هي كما يلي:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} \quad B_6 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

المسائل 110.17-105.17 تتعلق بالمصفوفات $B_1, B_2, \dots, B_6$ أعلاه. أيضاً، ترمز $m_i(t)$ للحدودية الأصغرية لـ B_i، وترمز E_i و F_i على الترتيب للفضاءين الذاتيين للقيمتين الذاتيتين 2 و 5 في B_i.

105.17 أوجد $m_1(t)$ وقاعديتين من أجل E_1 و F_1 في المصفوفة B_1.

■ هنا، $m_1(t) = (t-2)^3(t-5)^2$. أيضاً، بشكل $u = (1,0,0,0,0)$ قاعدة من أجل E_1، وبشكل $v = (0,0,0,1,0)$ قاعدة من أجل F_1.

106.17 أوجد $m_2(t)$، وبعدي E_2 و F_2، في المصفوفة B_2.

■ هنا، $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)^2$. أيضاً، $\dim(E_2) = 2$ و $\dim(F_2) = 2$.

107.17 أوجد $m_3(t)$، وقاعدتين من أجل E_3 و F_3، في المصفوفة B_3.

■ لدينا $m_3(t) = (t-2)(t-5)^2$. أيضاً، تشكل $u_1 = (1,0,0,0,0)$، $u_2 = (0,1,0,0,0)$، $u_3 = (0,0,1,0,0)$ قاعدة لـ E_3، ويشكل $v = (0,0,0,1,0)$ قاعدة من أجل F_3.

108.17 أوجد $m_4(t)$، وقاعدتين لـ E_4، F_4، في المصفوفة B_4.

■ هنا، $m_4(t) = (t-2)^3(t-5)$. أيضاً، بشكل $u = (1,0,0,0,0)$ قاعدة من أجل E_4؛ ويشكل $v_1 = (0,0,0,1,0)$ و $v_2 = (0,0,0,0,1)$ قاعدة من أجل F_4.

109.17 أوجد $m_5(t)$ وبعدي E_5 و F_5، في المصفوفة B_5.

■ هنا، $m_5(t) = (t-2)^2(t-5)$ و $\dim(E_5) = 2$ و $\dim(F_5) = 2$.

110.17 أوجد $m_6(t)$، وبعدي E_6 و F_6، في المصفوفة B_6.

■ هنا، $m_6(t) = (t-2)(t-5)$، كذلك، $\dim(E_6) = 3$ و $\dim(F_6) = 2$.

111.17 لنفترض أن A مصفوفة مربعة -5 ذات حدودية أصغرية $m(t) = (t-2)^2$. حدّد كل أشكال جوردان القانونية الممكنة M لـ A.

■ يجب أن يكون لـ M قالب واحد لجوردان مرتبته 2، أما بقية القوالب فيجب أن تكون مرتباتها 2 أو 1. وبذلك، فهناك إمكانيتان فقط:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن كل المداخل القطرية يجب أن تكون 2، لأن 2 القيمة الذاتية الوحيدة. تنشأ المصفوفة الأولى عندما يكون لـ A ثلاثة متجهات ذاتية مستقلة، وتنشأ الثانية عندما يكون لـ A أربعة متجهات ذاتية مستقلة.

112.17 لتكن A مصفوفة (مربعة) حقيقية. هل تكون A مشابهة لمصفوفة لجوردان؟ إذا كان الجواب لا، أعط مثالاً معاكساً.

■ لا تكون A مشابهة لمصفوفة لجوردان إلا إذا كانت الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A جداء لعوامل خطية. وهذا قد لا يكون صحيحاً أحياناً. مثلاً، إن الحدودية المميزة $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ هي $\Delta(t) = t^2 + 1$. وبالتالي، فإن هذه المصفوفة A لا تكون مشابهة لمصفوفة لجوردان.

113.17 لتكن B مصفوفة (مربعة) عقدية. هل B مشابهة لمصفوفة لجوردان؟ إذا كان الجواب لا، أعط مثالاً معاكساً.

■ لتكن $\Delta(t)$ الحدودية المميزة لـ B. نعرف، من المبرهنة الأساسية للجبر، أن $\Delta(t)$ تتحلل إلى حدوديات خطية فوق الحقل العقدي C. وبذلك، تكون كل مصفوفة عقدية B مشابهة لمصفوفة لجوردان.

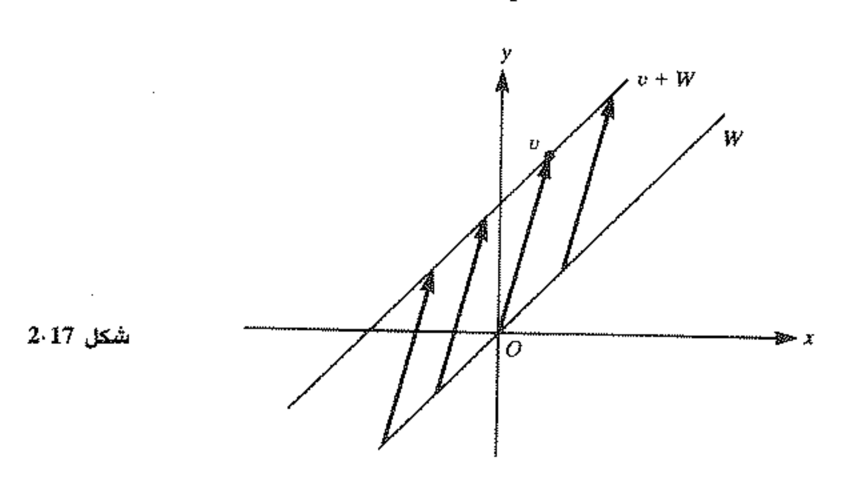
6.17 فضاءات خوارج القسمة والأشكال المثلثية

114.17 ليكن W فضاءً جزئياً في فضاء متجهي V. عرف المجموعات المصاحبة لـ W.

■ من أجل أي متجه $v \in V$، نكتب $v + W$ من أجل مجموعة المجاميع $v + w$ حيث $w \in W$؛ أي أن $v + W = \{v + w : w \in W\}$. هذه المجموعات تسمى «المجموعات المصاحبة» لـ W في V. ويعرّف بعد $v + W$ بأنه بُعْد W.

115.17 ليكن W الفضاء الجزئي في R^2 المعرف بواسطة $W = \{(a,b) : a=b\}$. صف المجموعات المصاحبة لـ W.

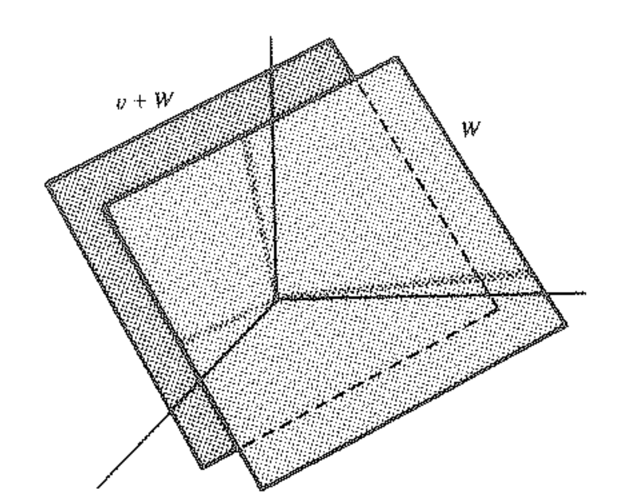
■ إن W هو المستقيم في R^2 الذي تعطيه المعادلة $x - y = 0$. يمكن النظر إلى $v + W$ على أنها إنسحاب للمستقيم نتحصل عليه بإضافة المتجه v إلى كل نقطة في W، كما موضح في الشكل 17-2. لاحظ أن $v + W$ هو أيضاً مستقيم، ويكون موازياً لـ W. وبذلك، فإن المجموعات المصاحبة لـ W في R^2 تكون جميع المستقيمات الموازية لـ W.



شكل 2-17

116.17 ليكن W الفضاء الحلّي للمعادلة المتجانسة $2x + 3y + 4z = 0$. صف المجموعات المصاحبة لـ W في R^3.

■ يكون W مستوىً يمر بنقطة الأصل $O = (0,0,0)$، وتكون المجموعات المصاحبة لـ W مستويات موازية لـ W. [أنظر شكل 17-3]. وبشكل مكافىء، تكون المجموعات المصاحبة لـ W المجموعات الحلّية للمعادلات $2x + 3y + 4z = k$، حيث $k \in R$. وتكون المجموعة المصاحبة $v + W$، حيث $v = (a,b,c)$، المجموعة الحلّية للمعادلة الخطية $2x + 3y + 4z = 2a + 3b + 4c$ أو $2(x - a) + 3(y - b) + 4(z - c) = 0$.



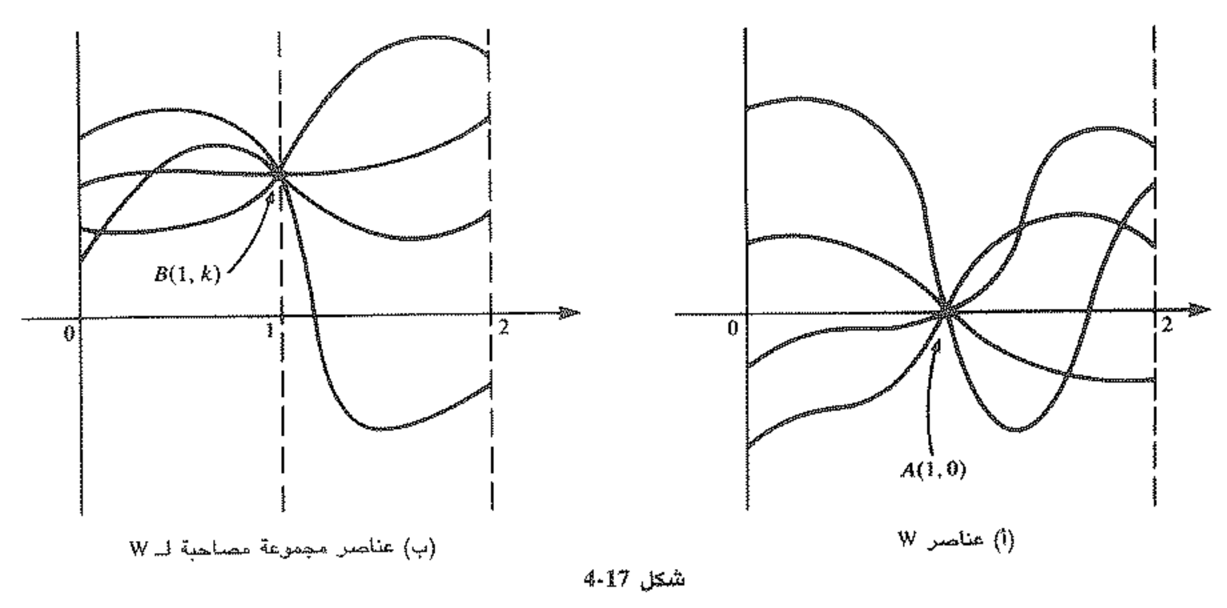
شكل 17-3

117.17 ليكن $V = C[0,2]$، الفضاء المتجهي للدوال المستمرة على الفترة $0 \leq t \leq 2$. لتكن W المجموعة الجزئية في V المتكونة من كل الدوال $F(t)$ التي تحقق $f(1) = 0$. بيّن أن W فضاء جزئي في V.

■ لدينا $0(1) = 0$؛ وبالتالي تنتمي الدالّة الصفرية **0** إلى W. لنفترض أن $f,g \in W$، إذن $f(1) = 0$ و $g(1) = 0$. وبذلك، $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ و $(kf)(1) = kf(1) = k.0 = 0$، من أجل أي سلّمي $k \in K$. إذن، $f + g \in W$ و $kf \in W$. ينتج عن ذلك أن W فضاء جزئي في V.

118.17 صف هندسياً المجموعات المصاحبة لـ W في V.

■ تتكون W من كل الدوال المستمرة المارة بالنقطة $A(1,0)$ في المستوى R^2 (كما موضح في الشكل 17-4 (أ)). تتكون أي مجموعة مصاحبة لـ W من كل الدوال المستمرة التي تمر عبر نقطة $B(1,k)$ من أجل عدد سلمي ما k [كما موضح في الشكل 17-4 (ب)].



(ب) عناصر مجموعة مصاحبة لـ W

(أ) عناصر W

شكل 17-4

مبرهنة 16.17: ليكن W فضاءً جزئياً في فضاء متجهي V فوق حقلٍ K. إذن، تشكل المجموعات المصاحبة لـ W في V فضاءً متجهياً فوق K، بالعمليتين التاليتين للجمع والضرب السلمي:

(i) $(u + W) + (v + W) = (u + v) + W$.

(ii) $k(u + W) = ku + W$، حيث $k \in K$.

ملاحظة: إنّ الفضاء المتجهي أعلاه، المتكون من كل المجموعات المصاحبة لـ W في V، يسمى «فضاء خوارج القسمة» لـ V بواسطة W، ويرمز له بـ V/W.

مبرهنة 17.17: لنفترض أن W فضاء جزئي لا متغير تحت مؤثر خطي $T: V \to V$. إذن، يدخل T مؤثراً خطياً $\bar{T}$ على V/W معرّفاً بواسطة $\bar{T}(v + W) = T(v) + W$. بالاضافة إلى ذلك، إذا كان T صفراً لأي حدودية، فإن $\bar{T}$ يكون كذلك أيضاً. إذن، تقسم الحدودية الأصغرية لـ $\bar{T}$ الحدودية الأصغرية لـ T.

119.17 ليكن W فضاء جزئياً لفضاء متجهي V. بيّن أن القضايا التالية متكافئة: (i) $u \in v + W$، (ii) $u - v \in W$، (iii) $v \in u + W$.

■ لنفترض أن $u \in v + W$. إذن، يوجد $w_0 \in W$ بحيث أن $u = v + w_0$. إذن $u - v = w_0 \in W$. وبالعكس، نفترض أن $u - v \in W$، إذن $u - v = w_0$ حيث $w_0 \in W$. وبالتالي، $u = v + w_0 \in v + W$. وبذلك، تكون (i) و (ii) متكافئتين.

لدينا أيضاً أن $u - v \in W$ إذا وفقط إذا $-(u - v) = v - u \in W$، إذا وفقط إذا $v \in u + W$. وبذلك، تكون (ii) و (iii) متكافئتين.

120.17 أثبت أن: المجموعات المصاحبة لـ W في V تجزيء V مجموعات منفصلة ثنائياً. أي أن (i) أي أن كل مجموعتين مصاحبتين $u + W$ و $v + w$ إما أن تكونا متطابقتين أو منفصلتين؛ و (ii) أن كل $v \in V$ ينتمي إلى مجموعة مصاحبة؛ في الحقيقة، $v \in v + W$. أيضاً، $u + W = v + W$ إذا وفقط إذا $u - v \in W$، وبذلك $(v + w) + W = v + W$ من أجل أي $w \in W$.

■ ليكن $v \in V$. بما أن $0 \in W$، يكون لدينا $v = v + 0 \in v + W$، وهذا يثبت (ii).

نفترض الآن أن المجموعتين المصاحبتين $u + W$ و $v + W$ غير منفصلتين؛ مثلاً، المتجه x ينتمي إلى $u + W$ و $v + W$ في آنٍ معاً. إذن، $u - x \in W$ و $x - v \in W$. ويكتمل برهان (i) إذا بيّنا أن $u + W = v + W$. ليكن $u + w_0$ أي عنصر في المجموعة المصاحبة $u + W$. بما أن $u - x$ و $x - v$ و w_0 تنتمي إلى W. فإن $(u + w_0) - v = (u - x) + (x - v) + w_0 \in W$. وبذلك، $u + w_0 \in v + W$؛ وبالتالي، تكون المجموعة المصاحبة $u + W$ محتواة في المجموعة $v + W$. بالمثل، تكون $v + W$ محتواة في $u + W$، وبذلك $u + W = v + W$.

القضية الأخيرة تتبع من حقيقة أن $u + W = v + W$ إذا وفقط إذا $u \in v + W$، وهذا يكون بالمسالة السابقة مكافئاً لـ $u - v \in W$.

121.17 بيّن أن العمليتين في مبرهنة 16.17 معرفتان جيداً؛ أي بيّن أنه إذا $u + W = u' + W$ و $v + W = v' + W$، إذن (i) $(u + v) + W = (u' + v') + W$ و (ii) $ku + W = ku' + W$، من أجل أي $k \in K$.

■ (i) بما أن $u + W = u' + W$ و $v + W = v' + W$، فإن $u - u'$ و $v - v'$ ينتميان إلى W. ولكن يكون لدينا عندئذ أن $(u + v) - (u' + v') = (u - u') + (v - v') \in W$. وبالتالي، $(u + v) + W = (u' + v') + W$.

(ii) أيضاً، وبما أن $u - u' \in W$ يقتضي $k(u - u') \in W$؛ إذن، $ku - ku' = k(u - u') \in W$. وبالتالي، $ku + W = ku' + W$.

122.17 ما هو العنصر الصفري في فضاء خوارج القسمة V/W؟

■ لدينا، من أجل كل $v \in V$، أن $(v + W) + W = v + W$. إذن، W نفسه هو العنصر الصفري في V/W.

123.17 ليكن V فضاءً متجهياً، و W فضاء جزئياً في V. بيّن أن التطبيق الطبيعي $\eta: V \to V/W$ المعرّف بواسطة $\eta(v) = v + W$ يكون خطياً.

■ لدينا، من أجل كل $u, v \in V$ وأي $k \in K$، أن $\eta(u + v) = u + v + W = u + W + v + W = \eta(u) + \eta(v)$ و $\eta(kv) = kv + W = k(v + W) = k\eta(v)$. ينتج عن ذلك أن η خطيّ.

124.17 ليكن W فضاءً جزئياً في فضاء متجهي V. لنفترض أن $\{w_1,\ldots,w_r\}$ قاعدة لـ W، وأن مجموعة المجموعات المصاحبة $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_s\}$ ، حيث $\bar{v}_j = v_j + W$ ، قاعدة لفضاء خوارج القسمة. بيّن أن $B = \{v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_r\}$ قاعدة لـ V. بذلك، $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$.

■ ليكن $u \in V$. بما أن $\{\bar{v}_j\}$ قاعدة لـ V/W، إذن $\bar{u} = u + W = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_s\bar{v}_s$. وبالتالي، $u = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s + w$، حيث $w \in W$. بما أن $\{w_i\}$ قاعدة لـ W، إذن $u = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s + b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$. ينتج عن ذلك أن B تولّد V.

نبين الآن أن B مستقلة خطية. لنفترض أن

$$c_1v_1 + \cdots + c_sv_s + d_1w_1 + \cdots + d_rw_r = 0 \qquad (1)$$

إذن، $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_s\bar{v}_s = \bar{0} = W$. بما أن $\{\bar{v}_j\}$ مستقلة، فإن الـ c تكون أصفاراً. بالتعويض في (1)، نجد $d_1w_1 + \cdots + d_rw_r = 0$. بما أن $\{w_i\}$ مستقلة، فإن الـ d تكون أصفاراً. بذلك، تكون B مستقلة خطياً وتكون لهذا السبب قاعدة لـ V.

125.17 أثبت مبرهنة 17.17.

■ نبين أولاً أن $\bar{T}$ معرّفة جيداً، أي إذا $u + W = v + W$، إذن $\bar{T}(u + W) = \bar{T}(v + W)$. إذا $u + W = v + W$ ، إذن $u - v \in W$ ؛ لأن W لا متغيرة T-. ينتج عن ذلك أن $T(u - v) = T(u) - T(v) \in W$. ينتج عن ذلك أن $\bar{T}(u + W) = T(u) + W = T(v) + W = \bar{T}(v + W)$ كما هو مطلوب.

ثم نبين أن $\bar{T}$ خطي. لدينا

$$\bar{T}((u + W) + (v + W)) = \bar{T}(u + v + W) = T(u + v) + W = T(u) + T(v) + W = T(u) + W + T(v) + W$$
$$= \bar{T}(u + W) + \bar{T}(v + W)$$

و

$$\bar{T}(k(u + W)) = \bar{T}(ku + W) = T(ku) + W = kT(u) + W = k(T(u) + W) = k\bar{T}(u + W)$$

وبذلك، يكون $\bar{T}$ خطياً.

لدينا الآن، من أجل أي مجموعة مصاحبة u + W في V/W، أن

$$\overline{T^2}(u + W) = T^2(u) + W = T(T(u)) + W = \bar{T}(T(u) + W) = \bar{T}(\bar{T}(u + W)) = \bar{T}^2(u + W)$$

وبالتالي، $\overline{T^2} = \bar{T}^2$. بالمثل، $\overline{T^n} = \bar{T}^n$ من أجل n. لدينا إذن، من أجل أي حدودية

$$f(t) = a_nt^n + \cdots + a_0 ,$$

$$\overline{f(T)}(u + W) = f(T)(u) + W = \sum a_iT^i(u) + W = \sum a_i(T^i(u) + W)$$
$$= \sum a_i\overline{T^i}(u + W) = \sum a_i\bar{T}^i(u + W) = \left(\sum a_i\bar{T}^i\right)(u + W) = f(\bar{T})(u + W)$$

وبذلك $\overline{f(T)} = f(\bar{T})$. ينتج عن ذلك أنه إذا كان T جذراً لـ$f(t)$، إذن $\overline{f(T)} = \bar{0} = W = f(\bar{T})$ ، أي أن $\bar{T}$ أيضاً جذر لـ$f(t)$. وهذا يكمل البرهان.

مبرهنة 18.17: ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً تتحلل حدوديته المميزة إلى حدوديات خطية. إذن، يكون لـ V قاعدة يُمثَّل فيها T بواسطة مصفوفة مثلثية [نُسمى شكلاً مثلثياً لـ T].

مبرهنة 19.17: [شكل بديل للمبرهنة 18.17]: لتكن A مصفوفة (مربعة) تتحلل حدوديتها للميزة إلى حدوديات خطية. إذن، تكون A مشابهة لمصفوفة مثلثية.

126.17 أثبت مبرهنة 18.17، التي تمثل المحتوى الرئيسي لهذا القسم.

■ يكون البرهان بالاستقراء على بعد V. إذا $\dim V = 1$؛ فإن كل تمثيل مصفوفي لـ T يكون مصفوفة 1×1 (وهي مصفوفة مثلثية).

لنفترض الآن أن $\dim V = n > 1$، وأن المبرهنة صالحة من أجل فضاءات ذات أبعاد أقل من n. بما أن الحدودية المميزة لـ T تتحلل إلى حدوديات خطية، فإنه يكون لـ T قيمة ذاتية واحدة على الأقل، ويكون له بذلك متجه ذاتي غير صفري v واحد على الأقل، وليكن $T(v) = a_{11}v$. ليكن V فضاءً جزئياً أحادي - البعد مُوَلَّداً بواسطة v. نضع $\bar{V} = V/W$. إذن، ومن المسألة 124.17، يكون لدينا $\dim \bar{V} = \dim V - \dim W = n - 1$. لاحظ أيضاً أن W لا متغير تحت T. نعرف، من مبرهنة 17.17، أن T تدخل مؤثراً خطياً $\bar{T}$ على $\bar{V}$ تقسم حدوديته المميزة الحدودية المميزة الأصغرية الحدودية المميزة الأصغرية لـ T. بما أن الحدودية المميزة لـ T جداءٌ لحدوديات خطية، فكذلك الأمر بالنسبة لحدوديته الأصغرية؛ وبالتالي، نصل لنفس الاستنتاج بالنسبة لحدوديتي $\bar{T}$ الأصغرية والمميزة. لذلك، فإن $\bar{V}$ و $\bar{T}$ يحققان فرضية المبرهنة. إذن، وبالاستقراء، توجد قاعدة $\{\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ لـ $\bar{V}$ بحيث أن

$$\begin{aligned}
\bar{T}(\bar{v}_2) &= a_{22}\bar{v}_2 \\
\bar{T}(\bar{v}_3) &= a_{32}\bar{v}_2 + a_{33}\bar{v}_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{T}(\bar{v}_n) &= a_{n2}\bar{v}_2 + a_{n3}\bar{v}_3 + \cdots + a_{nn}\bar{v}_n
\end{aligned}$$

لتكن الآن $v_2, \ldots, v_n$ عناصر V تنتمي إلى المجموعات المصاحبة $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ على الترتيب. وبذلك، تكون $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ قاعدة لـ V [المسألة 124.17]. بما أن $\bar{T}(\bar{v}_2) = a_{22}\bar{v}_2$، يكون لدينا $\bar{T}(\bar{v}_2) - a_{22}\bar{v}_2 = 0$ وبذلك $T(v_2) - a_{22}v_2 \in W$. ولكن W يُوَلَّد بواسطة v؛ إذن، $T(v_2) - a_{22}v_2$ مضاعف لـ v، ولنقل $T(v_2) - a_{22}v_2 = a_{21}v$ يكون $T(v_2) = a_{21}v + a_{22}v_2$. بالمثل، ومن أجل $i = 3, \ldots, n$، يكون لدينا $T(v_i) - a_{i2}v_2 - a_{i3}v_3 - \cdots - a_{ii}v_i \in W$، وبذلك $T(v_i) = a_{i1}v + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{ii}v_i$. إذن،

$$\begin{aligned}
T(v) &= a_{11}v \\
T(v_2) &= a_{21}v + a_{22}v_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T(v_n) &= a_{n1}v + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n
\end{aligned}$$

وبالتالي، تكون مصفوفة T في هذه القاعدة مثلثية.

127.17 ليكن W فضاءً جزئياً لـ V ولنفترض أن مجموعة المجموعات المصاحبة $\{v_1 + W, v_2 + W, \ldots, v_n + W\}$ في V/W مستقلة خطياً. بيّن أن مجموعة المتجهات $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ في V تكون أيضاً مستقلة خطياً.

■ لنفترض أن $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$. إذن، $(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) + W = 0 + W = W$. وبالتالي، $a_1(v_1 + W) + a_2(v_2 + w) + \ldots + a_n(v_n + w) = W$. بما أن $v_i + W$ مستقلة خطياً، إذن $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. وبذلك، تكون $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً.

128.17 ليكن W فضاء جزئياً لـ V. لنفترض أن مجموعة المتجهات $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ في V مستقلة خطياً، وأن $\text{span}(u_i) \cap W = \{0\}$. بيّن أن مجموعة المجموعات المصاحبة $\{u_1 + W, \ldots, u_n + W\}$ في V/W تكون أيضاً مستقلة خطياً.

■ لنفترض أن $a_1(u_1 + W) + a_2(u_2 + W) + \ldots + a_n(u_n + W) = W$. إذن، $(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) + W = W$ و $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n \in W$. بما أن $\text{span}(u_i) \cap W = \{0\}$، يكون لدينا $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$. نعرف، فرضياً، أن $u_1, \ldots, u_n$ مستقلة خطياً؛ وبالتالي $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. وبذلك، تكون المجموعات المصاحبة $u_i + W$ مستقلة خطياً.

129.17 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات فوق **R**، وليكن W الفضاء الجزئي للحدوديات h(t) التي تكون قسومة على t^4، أي أن $h(t) = b_0t^4 + b_1t^5 + \ldots + b_{m-4}t^m$. بيّن أن فضاء خوارج القسمة V/W يكون ذا بعد 4.

■ لتكن f(t) أي حدودية في V، مثلاً $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$. بما أن $a_4t^4 + \ldots + a_nt^n \in W$، يكون لدينا $f(t) + W = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + W = a_0(1 + W) + a_1(t + W) + a_2(t^2 + W) + a_3(t^3 + W)$. وبذلك، فإن $1 + W,\ t + W,\ t^2 + W,\ t^3 + W$ تولّد V/W. كما أنها مستقلة خطياً لأن $1, t, t^2, t^3$ مستقلة خطياً في V، ويكون $\text{span}(1, t, t^2, t^3) \cap W = 0$ [المسألة 128.17]. إذن، $\dim(V/W) = 4$.

7.17 فضاءات جزئية دورية، $Z(v,T)$

نفترض في هذا القسم أن $T: V \to V$ مؤثر خطي، حيث V منته ـ البعد فوق K و $v \in V$، $v \neq 0$.

130.17 عرّف $Z(v,T)$، المُسَمّى الفضاء الجزئي الدوري ـ T لـ V والمولّد بواسطة v.

■ $Z(v,t)$ هو مجموعة كل المتجهات التي في الشكل $f(T)(v)$ حيث يكون مدى $f(t)$ كل الحدوديات فوق K.

131.17 بيّن أن $Z(v,T)$ فضاء جزئي في V.

■ لدينا $0(v) = 0$ من أجل الحدودية الصفرية 0؛ وبالتالي، $0 \in Z(v,T)$. لنفترض أن $u,w \in Z(v,T)$، إذن، $u = f(T)(v)$ و $w = g(T)(v)$. وبالتالي، $u + w = f(T)(v) + g(T)(v) = [f(T) + g(T)](v)$ ومنها $u + w \in Z(v,T)$. لدينا أيضاً $ku = kf(T)(v) = [kf(T)](v)$، من أجل أي سلّمي $k \in K$. وبذلك، $ku \in Z(v,T)$. ينتج عن ذلك أن $Z(v,T)$ فضاء جزئي في V.

132.17 بيّن أن $Z(v,T)$ لا متغير تحت T. [نرمز لتقييد T على $Z(v,T)$ بـ T_v].

■ ليكن $u \in Z(v,T)$، مثلاً $u = f(T)(v)$، إذن، $T(u) = T[f(T)(v)] = [Tf(T)](v)$ وبذا $T(u) \in Z(v,T)$، إذن يكون $Z(v,T)$ لا متغيراً ـ T.

133.17 عرّف المُعْدِم ـ T لـ v في $Z(v,T)$، والذي نكتبه $m_v(T)$.

■ لتكن المتتالية $v, T(v), T^2(v), T^3(v),\ldots,$ لقوى T المؤثرة على v. وليكن k أصغر عدد صحيح بحيث يكون $T^k(v)$ تركيبة خطية للمتجهات السابقة له في المتتالية، ولتكن $T^k(v) = -a_{k-1}T^{k-1}(v) - \ldots - a_1T(v) - a_0v$. إذن، يطلق على الحدودية $m_0(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1t + a_0$ إسم «المُعْدِم ـ T» لـ v في $Z(v,T)$.

134.17 بيّن أن $m_v(t)$ هي الحدودية واحدية المعامل الرئيسي ذات الدرجة الأدنى الوحيدة التي تحقق $m_v(T)(v) = 0$.

■ لتكن $k = \deg m_v(T)$، ولنفترض أن $\deg f(t) = m$، حيث $m < k$، ولتكن $f(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$. إذا $f(T)(v) = 0$، إذن $b_0v + b_1T(v) + \ldots + b_{m-1}T^{m-1}(v) + b_mT^m(v) = 0$. وبالتالي، $T^m(v) = -b_m^{-1}b_{m-1}T^{m-1}(v) - \ldots - b_m^{-1}b_1T(v) - b_m^{-1}b_0v$. هذا يناقض حقيقة أن k هو أصغر عدد صحيح بحيث يكون $T^k(v)$ تركيبة خطية لـ $v, T(v),\ldots,T^{k-1}(v)$. إذن، نكون $m_v(t)$ حدودية من الدرجة الأدنى تحقق $m_v(T)(v) = 0$. لنفترض أن $m'_v(t)$ حدودية أخرى، واحدية المعامل الرئيسي ومن الدرجة k، بحيث أن $m'_v(T)(v) = 0$. إذن، يكون لـ $m_v(t) - m'_v(t)$ درجة أقل من k وتكون $[m_v(T) - m'_v(T)](v) = 0$. وهذا تناقض أيضاً. وبالتالي، تكون $m_v(t)$ وحيدة.

مبرهنة 19.17: لتكن $Z(v,T)$، T_v، $m_v(t)$ معرفة كما أعلاه. إذن:

(i) تكون $B = \{v, T(v),\ldots,T^{k-1}(v)\}$ قاعدة لـ $Z(v,T)$؛ وبالتالي $\dim Z(v,T) = K$.

(ii) الحدودية الأصغرية لـ T_v تكون $m_v(t)$.

(iii) التمثيل المصفوفي لـ T_v في القاعدة B يكون

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تسمى المصفوفة C أعلاه «المصفوفة المصاحبة» للحدودية $m_v(t)$.

135.17 اثبت (i) في مبرهنة 19.17.

■ من تعريف $m_v(t)$، يكون $T^k(v)$ المتجه الاول في المتتالية $v, T(v), T^2(v),\ldots$ الذي يكون تركيبة خطية للمتجهات

التي تسبقه في المتتالية؛ وبالتالي، تكون $B = \{v, T(v), ..., T^{k-1}(v)\}$ مستقلة خطياً. ليس علينا الآن إلا أن نبين أن $Z(v,T) = L(B)$، البسطة الخطية لـ B. لدينا، مما سبق، أن $T^k(v) \in L(B)$. نثبت بالاستقراء أن $T^n(v) \in L(B)$، من أجل كل n. لنفترض أن $n > k$، وأن $T^{n-1}(v) \in L(B)$، أي أن $T^{n-1}(v)$ تركيبة خطية لـ $v, ..., T^{k-1}(v)$. إذن، يكون $T^n(v) = T(T^{n-1}(v))$ تركيبة خطية في $T(v), ..., T^k(v)$. ولكن، $T^k(v) \in L(B)$؛ وبالتالي، $T^n(v) \in L(B)$ من أجل كل n. ينتج عن ذلك أن $f(T)(v) \in L(B)$ من أجل كل حدودية $f(t)$. إذن، $Z(v,T) = L(B)$ وبذلك تكون B قاعدة كما توقعنا.

136.17 أثبت (ii) في مبرهنة 19.17.

■ لنفترض أن $m(t) = t^s + b_{s-1}t^{s-1} + ... + b_0$ الحدودية الأصغرية لـ T_v. إذن
$0 = m(T_v)(v) = m(T)(v) = T^s(v) + b_{s-1}T^{s-1}(v) + ... + b_0 v$. لأن $v \in Z(v,T)$. وبذلك، يكون $T^s(v)$ تركيبة خطية لـ $v, T(v), ..., T^{s-1}(v)$، وبالتالي $k \leqslant s$. ولكن $m_v(T) = 0$، إذن $m_v(T_v) = 0$. إذن، $m(t)$ تقسم $m_v(t)$، وهذا يعني أن $s \leqslant k$. ينتج عن ذلك أن $k = s$ وبالتالي $m_v(t) = m(t)$.

137.17 أثبت (iii) في مبرهنة 19.17.

■ لدينا

$$\begin{aligned}
T_v(v) &= T(v)\\
T_v(T(v)) &= T^2(v)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_v(T^{k-2}(v)) &= T^{k-1}(v)\\
T_v(T^{k-1}(v)) &= T^k(v) = -a_0 v - a_1 T(v) - a_2 T^2(v) - \cdots - a_{k-1}T^{k-1}(v)
\end{aligned}$$

إن مصفوفة T_v في هذه القاعدة تكون، تعريفاً منقولة مصفوفة المعاملات لمنظومة المعادلات أعلاه؛ وبالتالي، فهي المصفوفة C المطلوبة.

138.17 ليكن $T: V \to V$ خطياً. وليكن W فضاء جزئياً لا متغيراً -T في V، و $\bar{T}$ المؤثر المدخل على V/W. أثبت (i) أن المعدم -T لـ $v \in V$ يقسم الحدودية الأصغرية لـ T، (ii) أن المعدم -$\bar{T}$ لـ $\bar{v} \in V/W$ ويقسم الحدودية الأصغرية لـ T.

■ (i) المعدم -T لـ $v \in V$ يكون الحدودية الأصغرية لتقييد T على $Z(v,T)$ وبذلك، وبواسطة المسألة 16.17، فهو يقسم الحدودية الأصغرية لـ T.

(ii) المعدم -$\bar{T}$ لـ $\bar{v} \in V/W$ يقسم الحدودية الأصغرية لـ $\bar{T}$، والتي تقسم الحدودية الأصغرية لـ T.

ملاحظة: في حالة أن الحدودية المميزة لـ T تكون $f(t)^n$، حيث $f(t)$ حدودية واحدية المعامل الرئيسي وغير خزولة، فإن المعدم -T لـ $v \in V$ والمعدم -$\bar{T}$ لـ $\bar{v} \in V/W$ يكونان في الشكل $f(t)^m$، حيث $m \leqslant n$.

139.17 ليكن W تقاطع كل الفضاءات الجزئية اللامتغيرة في V، والمحتوية على v. بين أن $W = Z(v,T)$.

■ بما أن $Z(v,T)$ فضاء جزئي لا متغير -T يحتوي على v، يكون لدينا $W \subseteq Z(v,T)$. بما أن W لا متغير -T و $v \in W$، يكون لدينا $T^k(v) \subseteq W$ من أجل كل k. بما أن W فضاء جزئي، يكون لدينا $f(T)(v) \in W$ من أجل كل حدودية $f(t)$. وبذلك، $Z(v,T) \subseteq W$. الاحتواءان معاً يعطيان $W(Z(v,T)$.

8.17 الشكل القانوني المنطق

يقدم هذا القسم الشكل القانوني المنطق الكلاسيكي من أجل مؤثر $T: V \to V$. هذا الشكل يوجد حتى عندما لا يمكن تحليل الحدودية الأصغرية، وبالتالي الحدودية المميزة، إلى حدوديات خطية. [تذكر أن هذه لا تكون الحالة من أجل شكل جوردان القانوني].

نقدم أولاً صياغة لحالة خاصة للشكل القانوني المنطق حيث تكون الحدودية الأصغرية والحدودية المميزة قوتين لحدودية غير خزولة واحدة. أما الحالة العامة، والتي تنتج عن مبرهنة التحليل الأولي، فسوف تقدم لاحقاً.

توطئة 20.17 ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً حدوديته الاصفرية $f(t)^n$ حيث $f(t)$ حدودية غير خزولة واحدية المعامل الرئيسي، وحدوديته المميزة $f(t)^d$. إذن، يكون V المجموع المباشر $V = Z(v_1,T) \oplus ... \oplus Z(v_r,T)$ لفضاءات جزئية دورية -T، $Z(v_i,T)$، مقابلة للمعدمات -T، $f(t)^{n_1}, f(t)^{n_2}, ..., f(t)^{n_r}$، حيث $n = n_1 \geqslant n_2 \geqslant ... \geqslant n_r$ و $d = n_1 + n_2 + ... + n_r$. إن أي تحلل آخر لـ V إلى فضاءات جزئية دورية -T يكون له نفس العدد من المركبات، ونفس المجموعة من المعدمات -T.

ملاحظة: تخبرنا التوطئة أعلاه بأن المتجهات v_i أو الفضاءات الجزئية الدورية -T، $Z(v_i,T)$، محددة بشكل وحيد بواسطة T؛ ولكنها تقول بأن مجموعة المعدمات -T تتحدد بشكل وحيد بواسطة T. وبذلك، يكون لـ T تمثيل مصفوفي وحيد

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_r \end{pmatrix}$$

حيث الـ C_i المصفوفات المصاحبة للحدوديات $f(t)^{n_i}$. أيضاً، تسمى الحدوديات $f(t)^{n_i}$ القواسم الابتدائية لـ T.

مبرهنة التحليل الأوّلي والتوطئة السابقة تعطياننا النتيجة الأساسية التالية:

مبرهنة 21.17 ليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطي بحدودية أصغرية $m(t) = f_1(t)^{m_1} f_2(t)^{m_2} \cdots f_s(t)^{m_s}$، حيث الـ $f_i(t)$ حدوديات واحدية المعامل الرئيسي وغير خزولة مختلفة، وبحدودية مميزة $\Delta(t) = f_1(t)^{d_1} f_2(t)^{d_2} \cdots f_s(t)^{d_s}$. إذن، يكون لـ T تمثيل مصفوفي مركب قطري:

$$M = \begin{pmatrix} C_{11} & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & C_{1r_1} & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & C_{s1} & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & C_{sr_s} \end{pmatrix}$$

حيث الـ C_{ij} مصفوفات مصاحبة. وعلى الخصوص، تكون الـ C_{ij} المصفوفات المصاحبة للحدوديات $f_i(t)^{n_{ij}}$، حيث $m_1 = n_{11} \geq n_{12} \geq \cdots \geq n_{1r_1}, \ldots, m_s = n_{s1} \geq n_{s2} \geq \cdots \geq n_{sr_s}$ و $d_1 = n_{11} + n_{12} + \cdots + n_{1r_1}, \ldots, d_s = n_{s1} + n_{s2} + \cdots + n_{sr_s}$.

مبرهنة 22.17 [شكل بديل للمبرهنة 21.17]: كل مصفوفة (مربعة) A تكون مشابهة لمصفوفة وحيدة M في شكل قانوني منطق كما أعلاه.

ملاحظة: المصفوفة M أعلاه تسمى الشكل القانوني المنطق لـ T، وتسمى الحدوديات $f_i(t)^{n_{ij}}$ القواسم الإبتدائية لـ T.

140.17 أوجد كل الأشكال القانونية المنطقة بالحدودية الأصغرية $m(t) = (t-1)^3$ والحدودية المميزة $\Delta(t) = (t-1)^7$.

■ تتكون القواسم الإبتدائية من قوى $f(t) = t - 1$ بأسس تحقق ثلاثة شروط: (1) أس واحد يجب أن يساوي 3، الأس في $m(t)$. (2) لا يوجد أس يتجاوز 3. (3) مجموع الأسس يجب أن يساوي 7، الأس في $\Delta(t)$. توجد هناك أربع إمكانيات:

(أ) $7 = 3 + 3 + 1$، أي أن $(t-1)^3$، $(t-1)^3$، $t-1$.

(ب) $7 = 3 + 2 + 2$، أي أن $(t-1)^3$، $(t-1)^2$، $(t-1)^2$.

(ج) $7 = 3 + 2 + 1 + 1$، أي أن $(t-1)^3$، $(t-1)^2$، $t-1$، $t-1$.

(د) $7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$، أي أن $(t-1)^3$، $t-1$، $t-1$، $t-1$، $t-1$

بما أن $(t-1)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ و $(t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$، فإن المصفوفات المقابلة تكون كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & -3 & \\ & & & 0 & 1 & 3 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(أ)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(ج)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(د)

141.17 أوجد كل الأشكال القانونية المنطقة الممكنة بـ $m(t) = (t-2)^3$ و $\Delta(t) = (t-2)^5$.

■ هناك مجموعتان ممكنتان وحيدتان للقواسم الابتدائية: (أ) $(t-2)^3$، $(t-2)^2$؛ (ب) $(t-2)^3$، $t-2$، $t-2$.
باستخدام $(t-2)^3 = t^3 - 6t^2 + 12t - 8$ و $(t-2)^2 = t^2 - 4t + 4$، نجد أن الشكلين القانونين المنطقين المقابلين هما:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 8 & & \\ 1 & 0 & -12 & & \\ 0 & 1 & 6 & & \\ \hline & & & 0 & -4 \\ & & & 1 & 4 \end{array}\right)$$

(أ)

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 8 & & \\ 1 & 0 & -12 & & \\ 0 & 1 & 6 & & \\ \hline & & & 2 & \\ \hline & & & & 2 \end{array}\right)$$

(ب)

المسائل 142.17-144.17 تتعلق بمصفوفة حقيقية A من المرتبة 6 ذات حدودية أصغرية $m(t) = (t^2 - t + 3)(t-2)^2$.

142.17 أوجد عدد الحدوديات المميزة الممكنة $\Delta(t)$ لـ A.

■ إن درجة $\Delta(t)$ يجب أن تكون 6، لأن A مصفوفة 6×6. أيضاً، يجب أن تكون $\Delta(t)$ قسومة على $m(t)$. وبذلك، هناك إمكانيتان: $\Delta_1(t) = (t^2 - t + 3)^2(t-2)^2$ أو $\Delta_2(t) = (t^2 - t + 3)(t-2)^4$.

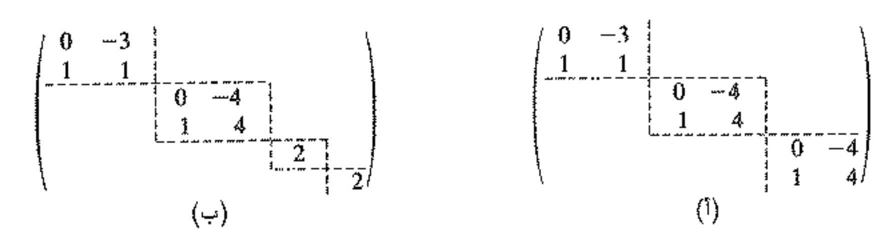
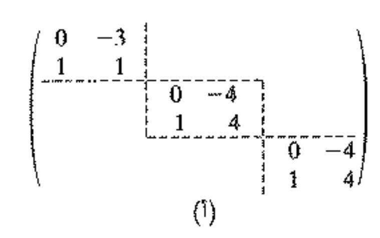
143.17 لنفترض أن $\Delta_1(t)$ الحدودية المميزة لـ A. أوجد الشكل القانوني المنطق M لـ A.

■ هنا، القواسم الابتدائية لـ A هي $t^2 - t + 3$، $t^2 - t + 3$، $(t-2)^2$. وبذلك

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -3 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \hline & & 0 & -3 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ \hline & & & & 0 & -4 \\ & & & & 1 & 4 \end{array}\right)$$

144.17 لنفترض أن $\Delta_2(t)$ الحدودية المميزة لـ A. أوجد الشكلين القانونيين المنطقين الممكنين لـ A.

■ هنــاك مجمــوعتــان ممكنتــان للقــواسـم الابتـدائيـة، وهــي: (أ) $t^2 - t + 3$، $(t-2)^2$؛ $(t-2)^2$؛ (ب) $t^2 - t + 3$، $(t-2)^2$، $t-2$، $t-2$. ويكون الشكلان القانونيان المنطقان المقابلان:

(ب) (أ)

145.17 أوجد الشكل القانوني المنطق M لقالب جوردان $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

■ هنا، $\Delta(t) = m(t) = (t-\lambda)^4 = t^4 - 4\lambda t^3 + 6\lambda^2 t^2 - 4\lambda^3 t + \lambda^4$. إذن،

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^4 \\ 1 & 0 & 0 & 4\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

المسائل 146.17-148.17 تتعلق بمصفوفة A بـ $\Delta(t) = m(t) = (t^2+1)(t^2-3)$.

146.17 أوجد الشكل القانوني المنطق M لـ A، إذا كانت A مصفوفة فوق الحقل المنطق Q.

■ بما أن t^2+1 و t^2-3 غير خزولتين فوق Q، فإن القواسم الإبتدائية تكون t^2+1، t^2-3. وبذلك

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 3 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

147.17 أوجد الشكل القانوني المنطق M' لـ A، إذا كانت A مصفوفة فوق الحقل الحقيقي R.

■ هنا، $\Delta(t) = m(t) = (t^2+1)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$ ، وهي القواسم الابتدائية لـ A. إذن،

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & \\ & & & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

148.17 أوجد الشكل القانوني المنطق M'' من أجل A، إذا كانت A مصفوفة فوق الحقل العقدي C.

■ هنا، $\Delta(t) = m(t) = (t+i)(t-1)(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$. وبذلك

$$M'' = \begin{pmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & \sqrt{3} & \\ & & & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

149.17 ليكن V فضاءً متجهياً بعده 7 فوق R، وليكن $T: V \to V$ مؤثراً خطياً بحدودية أصغرية $m(t) = (t^2+2)(t+3)^3$. أوجد كل الأشكال القانونية المنطقة الممكنة من أجل T.

■ إن مجموع درجات القواسم الإبتدائية يجب أن يكون 7، لأن $\dim V = 7$. أيضاً، أحد القواسم الإبتدائية يجب أن يكون t^2+2، وأحدها يجب أن يكون $(t+3)^3$. هناك ثلاث إمكانيات: (أ) t^2+2، t^2+2، $(t+3)^3$؛ (ب) t^2+2، $(t+3)^3$، $(t+3)^2$؛ (ج) t^2+2، $(t+3)^3$، $t+3$، $t+3$. الأشكال القانونية المنطقة المقابلة التالية هي:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -2 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & -27 \\ & & & & 1 & 0 & -27 \\ & & & & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

(أ)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & -27 & & \\ & & 1 & 0 & -27 & & \\ & & 0 & 1 & -9 & & \\ & & & & & 0 & -9 \\ & & & & & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & -27 & & \\ & & 1 & 0 & -27 & & \\ & & 0 & 1 & -9 & & \\ & & & & & -3 & \\ & & & & & & -3 \end{pmatrix}$$

(ج)

150.17 أوجد الحدودية المميزة لكل واحدة من الحالات في المسألة السابقة.

■ تكون الحدودية المميزة مساوية لجداء القواسم الابتدائية. وبذلك، $\Delta_a(t) = (t^2+2)^2(t+3)^3$ ، $\Delta_b(t) = (t^2+2)(t+3)^6$ ، $\Delta_c(t) = (t^2+2)(t+3)^6$. [لاحظ أن $\Delta_b(t) = \Delta_c(t)$].

151.17 أثبت توطئة 20.17.

■ يكون البرهان بالاستقراء على بُعدِ V. إذا $\dim V = 1$ ، فإن V نفسه يكون دورياً T- وتتحقق بذلك التوطئة. لنفترض الآن أن $\dim V > 1$ ، وأن التوطئة صحيحة من أجل تلك الفضاءات المتجهية ذات الأبعاد الأقل من بعد V.

بما أن الحدودية الأصغرية لـ T هي $f(t)^n$ ، فإنه يوجد $v_1 \in V$ بحيث أن $f(T)^{n-1}(v_1) \neq 0$ ؛ وبالتالي، يكون المعدم T- لـ v_1 هو $f(t)^n$. ليكن $Z_1 = Z(v_1, T)$ ، وتذكر أن Z_1 يكون لا متغيراً T-. ليكن $\bar{V} = V/Z_1$ ، و $\bar{T}$ المؤثر الخطي على $\bar{V}$ المدخل بواسطة T. إذن، الحدودية الأصغرية لـ $\bar{T}$ تقسم $f(t)^n$ ؛ وبالتالي، تتحقق الفرضية من أجل $\bar{V}$ و $\bar{T}$. ينتج عن ذلك، وبالاستقراء، أن $\bar{V}$ المجموع المباشر لفضاءات جزئية دورية $\bar{T}$ ؛ لتكن، $\bar{V} = Z(\bar{v}_2, \bar{T}) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{v}_r, \bar{T})$ ، حيث $f(t)^{n_2}, \ldots, f(t)^{n_r}$ ، $n \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r$.

سوف نبين أنّه يوجد متجه v_2 في المجموعة المصاحبة $\bar{v}_2$ يكون $f(t)^{n_2}$ معدمها T-، وهو المعدم - $\bar{T}$ لـ $\bar{v}_2$. ليكن w أي متجه في $\bar{v}_2$. إذن، $f(T)^{n_2}(w) \in Z_1$. وبالتالي، توجد حدودية $g(t)$ تحقق

$$f(T)^{n_2}(w) = g(T)(v_1) \qquad (1)$$

بما أن $f(t)^n$ الحدودية المميزة لـ T، يكون لدينا بواسطة (1) أن $0 = f(T)^n(w) = f(T)^{n-n_2}g(T)(v_1)$. ولكن $f(t)^n$ هو المعدم T- لـ v_1 ؛ وبالتالي، $f(t)^n$ تقسم $f(t)^{n-n_2}g(t)$ ، وبذلك $g(t) = f(t)^{n_2}h(t)$ من أجل حدودية ما $h(t)$. نضع $v_2 = w - h(T)(v_1)$. بما أن $w - v_2 = h(T)(v_1) \in Z_1$ ، فإن v_2 أيضاً ينتمي إلى المجموعة المصاحبة $\bar{v}_2$. وبذلك، يكون المعدم T- لـ v_2 مضاعفاً للمعدم - $\bar{T}$ لـ $\bar{v}_2$. لدينا من جهة أخرى، بواسطة (1)، أن $f(T)^{n_2}(v_2) = f(T)^{n_2}(w - h(T)(v_1)) = f(T)^{n_2}(w) - g(T)(v_1) = 0$. ينتج عن ذلك أن المعدم T- لـ v_2 يكون $f(t)^{n_2}$ كما توقعنا.

بالمثل، توجد متجهات $v_3, \ldots, v_r \in V$ بحيث أن $v_i \in \bar{v}_i$ ، وبحيث أن المعدم T- لـ v_i يكون $f(t)^{n_i}$ ، وهو المعدم $\bar{T}$- لـ $\bar{v}_i$. نضع $Z_2 = Z(v_2, T), \ldots, Z_r = Z(v_r, T)$. ولتكن d درجة $f(t)$ بحيث أن درجة $f(t)^{n_i}$ تكون dn_i . إذن، وبما أن $f(t)^{n_i}$ المعدم T- لـ v_i والمعدم $\bar{T}$- لـ $\bar{v}_i$. نعرف أن $\{\bar{v}_i, \bar{T}(\bar{v}_i), \ldots, \bar{T}^{dn_i-1}(\bar{v}_i)\}$ و $\{v_i, T(v_i), \ldots, T^{dn_i-1}(v_i)\}$ ، قاعدتين من أجل $Z(v_i, T)$ و $Z(\bar{v}_i, \bar{T})$ على الترتيب، من أجل $i = 2, \ldots, r$. ولكن $\bar{V} = Z(\bar{v}_2, \bar{T}) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{v}_r, \bar{T})$ ؛

وبالتالي، تكون $\{\bar{T}^{dn_1-1}(\bar{v}_r), \ldots, \bar{v}_r, \ldots, \bar{T}^{dn_2-1}(\bar{v}_2), \ldots, \bar{v}_2\}$ قاعدة من أجل $\bar{V}$. بذلك، وبسبب العلاقة $\bar{T}^i(\bar{v}) = \overline{T^i(v)}$، تكون $\{v_1, \ldots, T^{dn_1-1}(v_1), v_2, \ldots, T^{dn_2-1}(v_2), \ldots, v_r, \ldots, T^{dn_r-1}(v_r)\}$ قاعدة من أجل V. إذن، $V = Z(v_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r, T)$، وهو المطلوب.

يبقى أن نبين أن الأسس $n_1,\ldots,n_r$ تتحدد بشكل وحيد بواسطة T. بما أن d ترمز لدرجة $f(t)$، فإن $\dim V = d(n_1 + \cdots + n_r)$ و $\dim Z_i = dn_i$، $i = 1,\ldots,r$. أيضاً، إذا كان s عدداً صحيحاً موجباً فإن $f(T)^s(Z_i)$ يكون فضاء جزئياً مولّداً بـ $f(T)^s(v_i)$، ويكون بُعده $d(n_i - s)$ إذا $n_i > s$ أو 0 إذا $n_i \leqslant s$.

الآن، يمكن كتابة أي متجه $v \in V$، وبشكل وحيد في الشكل $v = w_1 + \ldots + w_r$ حيث $w_i \in Z_i$. وبالتالي، من أجل أي متجه في $f(T)^s(v) = f(T)^s(w_1) + \cdots + f(T)^s(w_r)$ حيث $f(T)^s(w_i) \in f(T)^s(Z_i)$. ليكن t العدد الصحيح، المعتمد على s، الذي يحقق $n_1 > s, \ldots, n_t > s$، $n_{t+1} \leqslant s$. إذن $f(T)^s(V) = f(T)^s(Z_1) \oplus \cdots \oplus f(T)^s(Z_t)$. وبالتالي

$$\dim(f(T)^s(V)) = d[(n_1 - s) + \cdots + (n_t - s)] \tag{2}$$

إن الأعداد على يسار (2) تتحدد بشكل وحيد بواسطة T. نضع $s = n-1$، فتحدد (2) عدد الـ n_i المساوية لـ n. ثم نضع $s = n-2$، فتحدد (2) عدد الـ n_i (إن وجدت) المساوية لـ $n-1$. نكرر هذا الأسلوب حتى نضع $s=0$، ونحدد عدد الـ n_i المساوية لـ 1. وبذلك، تتحدد الـ n_i بشكل وحيد بواسطة T و V، وهذا يكمل برهان التوطئة.

152.17 ليكن T مؤثراً خطياً بحدودية أصغرية $f(t)^3$ وحدودية مميزة $f(t)^6$، حيث $f(t)$ غير خزولة فوق الحقل القاعدة K. أوجد كل المجموعات الممكنة للقواسم الإبتدائية.

■ إن القواسم الابتدائية قوى لـ $f(t)$ بأسس تحقق ثلاثة شروط: أي يجب أن يساوي 3، وهو الأس في $m(t)$. الأسس الأخرى لا يمكن أن تتجاوز 3. مجموع الأسس يجب أن يكون 6، وهو الأس في $\Delta(t)$. هناك ثلاث إمكانيات:

(أ) $6 = 3 + 3$ المقابلة لـ $f(t)^3$، $f(t)^3$.

(ب) $6 = 3 + 2 + 1$ المقابلة لـ $f(t)^3$، $f(t)^2$، $f(t)$.

(ج) $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ المقابلة لـ $f(t)^3$، $f(t)$، $f(t)$، $f(t)$.

153.17 أوجد العدد الاقصى للمصفوفات غير المتشابهة بـ $m(t) = f(t)^3$ و $\Delta(t) = f(t)^6$ حيث $f(t)$ غير خزولة.

■ إن المصفوفات غير المتشابهة تقابل عدد الأشكال القانونية المنطقة المختلفة التي بدورها تقابل عدد مجموعات القواسم الابتدائية. نعرف، من المسألة 152.17، أنه توجد ثلاث مجموعات مختلفة القواسم الابتدائية؛ وبالتالي، توجد ثلاث مصفوفات غير متشابهة لها الخواص المذكورة.

المسائل 154.17-158.17 تتعلق بالحدودية $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 2$ ومصفوفة A ذات حدودية أصغرية $m(t) = f(t)$ وحدودية مميزة $\Delta(t) = f(t)^2$.

154.17 بيّن أن $f(t)$ غير خزولة فوق الحقل المنطق Q.

■ إن الجذور المنطقة لـ $f(t)$ يجب أن تكون ضمن ± 1، ± 2. نختبر كل واحد من الأعداد الصحيحة الأربعة، فنحصل على $f(1) \neq 0$، $f(-1) \neq 0$، $f(2) \neq 0$ و $f(-2) \neq 0$. وبذلك، تكون $f(t)$ غير خزولة فوق Q.

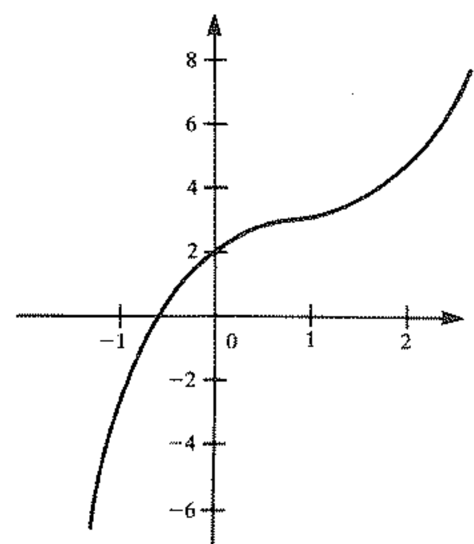
155.17 نفترض A مصفوفة فوق الحقل المنطق Q. أوجد الشكل القانوني المنطق M لـ A فوق Q.

■ بما أن $f(t)$ غير خزولة فوق Q، فإنه يمكن للقواسم الابتدائية لـ A أن تكون $f(t)$، $f(t)$. وبذلك، $M = C(t^3 - 3t^2 + 3t + 2) \oplus C(t^3 - 3t^2 + 3t + 2)$ حيث $C(f(T))$ ترمز للحدودية المصاحبة لـ $f(t)$. أي أن

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \\ 0 & 1 & 3 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & -2 \\ & & & 1 & 0 & -3 \\ & & & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

156.17 أوجد عدد الجذور الحقيقية لـ $f(t)$.

■ نرسم (نقطة نقطة) $f(t)$، كما في شكل 17-5، فنرى أن $f(t)$ تعبر محور -x عند نقطة واحدة فقط؛ وبالتالي، يكون لـ $f(t)$ جذر حقيقي واحد.



شكل 17-5

157.17 لنفترض أن A مصفوفة فوق الحقل الحقيقي **R**. أوجد عدد القوالب (المصفوفات الجزئية) القطرية في الشكل القانوني المنطق M' لـ A فوق **R**.

■ بما أن لـ $f(t)$ جذر حقيقي واحد، فإن $f(t)$ تتحلل إلى $f(t) = g_1(t)g_2(t)$ حيث $g_1(t)$ و $g_2(t)$ غير خزولتين فوق **R**. هنا، تكون القواسم الابتدائية لـ A كما يلي: $g_1(t)$، $g_1(t)$، $g_2(t)$، $g_2(t)$. وبذلك، يكون لـ M' أربعة قوالب قطرية، إثنين منها مرتبتها 1، وإثنين من المرتبة 2.

158.17 لنفترض أن A مصفوفة فوق الحقل العقدي **C**. بيّن أن الشكل القانوني المنطق M'' لـ A فوق **C** يكون قطرياً.

■ هنا، يكون لـ $f(t)$ جذر حقيقي واحد وجذران عقديان مختلفان. وبذلك، تتحلل $f(t)$ إلى $f(t) = h_1(t)h_2(t)h_3(t)$ فوق **C** حيث كل $h_i(t)$ تكون خطية. إذن، تكون القواسم الابتدائية لـ A كما يلي: $h_1(t)$، $h_1(t)$، $h_2(t)$، $h_2(t)$، $h_3(t)$، $h_3(t)$. وبالتالي، يكون لـ M'' ستة قوالب قطرية، كل واحدة منها مرتبتها 1. بتعبير آخر، تكون M'' قطرية.

159.17 أوجد كل الأشكال القانونية المنطقة الممكنة من أجل المصفوفات 6×6 ذات الحدودية الأصغرية $m(t) = (t^2+3)(t+1)^2$.

■ بما أن مجموع درجات القواسم الابتدائية يجب أن يكون 6، فإنه توجد ست إمكانيات: (أ) t^2+3، t^2+3، $(t+1)^2$؛ (ب) t^2+3، $(t+1)^2$، $(t+1)^2$؛ (ج) t^2+3، $(t+1)^2$، $t+1$، $t+1$. وتكون الأشكال القانونية المنطقة المقابلة كما يلي:

$$
\begin{pmatrix}
0 & -3 & & & & \\
1 & 0 & & & & \\
& & 0 & -1 & & \\
& & 1 & -2 & & \\
& & & & -1 & \\
& & & & & -1
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & -3 & & & & \\
1 & 0 & & & & \\
& & 0 & -1 & & \\
& & 1 & -2 & & \\
& & & & 0 & -1 \\
& & & & 1 & -2
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 & -3 & & & & \\
1 & 0 & & & & \\
& & 0 & -3 & & \\
& & 1 & 0 & & \\
& & & & 0 & -1 \\
& & & & 1 & -2
\end{pmatrix}
$$

160.17 أوجد الحدودية المميزة في حالة من المسألة السابقة.

■ الحدودية المميزة تساوي جداء القواسم الابتدائية؛ وبالتالي، $\Delta_a(t) = (t^2+3)^2(t+1)^{22}$، $\Delta_b(t) = \Delta_c(t) = (t^2+3)(t+1)^4$.

الفصل 18
الداليات الخطية، والفضاء الثنوي

يُغطي هذا الفصل التطبيقات الخطية من فضاء متجهي V إلى حقله K للسلميات [ينظر لـ K بأنّه فضاء متجهي فوق نفسه] طبعاً، كل المبرهنات والنتائج من التطبيقات الخطية الاختيارية على V تظل صالحة من أجل هذه الحالة الخاصة. ولكن هذه التطبيقات تعالج منفصلة بسبب أهميتها الأساسية، وبسبب أن العلاقة الخاصة بين V و K تنشأ عنها مفاهيم ونتائج جديدة لا تنطبق على الحالة العامة.

1.18 الداليّات الخطية والفضاء الثنوي

1.18 عرّف داليًا خطياً.

■ ليكن V فضاء متجهياً فوق حقل K. يصطلح على تطبيق $\phi: V \to K$ بأنه «داليّ خطي» [أو «شكل خطي»] إذا $\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$. من أجل كل $u,v \in V$ وكل $a,b \in K$. بتعبير آخر، إن داليًا خطياً على V هو تطبيق خطي من V إلى K.

2.18 ليكن $V = K^n$. التطبيق $\pi_i: V \to K$ ، المعرّف بـ $\pi_i(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_i$ يسمى «تطبيق الإسقاط i». بيّن أن π_i داليّ خطي على $V = K^n$.

■ يلزمنا تبيان أن π_i خطي. لنفترض أن $u,v \in V$ ليكن $u = (a_1,\ldots,a_n)$ و $v = (b_1,\ldots,b_n)$. إذن، $u + v = (a_1 + b_1,\ldots,a_n + b_n)$، $ku = (ka_1,\ldots,ka_n)$. وبذلك، $\pi_i(u + v) = a_i + b_i = \pi_i(u) + \pi_i(v)$ و $\pi_i(ku) = ka_i = k\pi_i(u)$. إذن، يكون π_i داليًا خطياً.

3.18 ليكن V فضاء متجهياً لدوال حقيقية مستمرة على الفترة $a \leqslant t \leqslant b$. وليكن $J: V \to \mathbb{R}$ مؤثر التكامل المعرّف بواسطة:

$$J[f] = \int_a^b f(t)\,dt$$

بيّن أن J داليّ خطي على V.

■ لدينا، من الحسبان، أن

$$J[f+g] = \int_a^b [f(t) + g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = J[f] + J[g]$$

و

$$J[kf] = \int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt = kJ[f]$$

إذن، يكون J خطياً. وبذلك، يكون J داليًا خطياً على V.

4.18 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة n- فوق K. وليكن $T: V \to K$ «تطبيق الأثر»، أي أن $T(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$، حيث $A = (a_{ij})$؛ يعني هذا أن T تقرن بمصفوفة A مجموع عناصرها القطرية. هل T داليّ خطي على V؟

■ إن T تطبيق خطي، أي أن $T(A + B) = T(A) + T(B)$ و $T(kA) = kT(A)$. وبذلك، يكون تطبيق الأثر داليًا خطياً على V.

5.18 ليكن V الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة n- فوق K. وليكن $D: V \to K$ دالة المحددة، أي $D(A) = \det(A)$. هل D داليّ خطي على V؟

■ D ليس تطبيقاً خطياً. مثلاً، لتكن $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. إذن، $D(A)=0$ و $D(B)=0$ ولكن $D(A+B)=D(1)=1\neq D(A)+D(B)$. وبذلك، لا يكون D دالياً خطياً على V.

6.18 ليكن V الفضاء المتجهي لكل الحدوديات الحقيقية. وليكن D مؤثر الإشتقاق على V، أي $D[f(t)]=df/dt$. هل D دالّي خطي على V؟

■ إن مؤثر الاشتقاق خطي. ولكن D لا تطبق V على الحقل الحقيقي R وبالتالي، لا يكون D دالّياً خطياً على V.

7.18 عرّف الفضاء الثنوي لفضاء متجهي V.

■ إن مجموعة الداليات الخطية على فضاء متجهي V فوق حقلٍ K تكون أيضاً فضاء متجهياً فوق K، حيث تُعرّف عمليتا الجمع والضرب السلّمي بواسطة $(\phi+\sigma)(v)=\phi(v)+\sigma(v)$ و $(k\phi)(v)=k\phi(v)$ حيث ϕ و σ داليّان خطيان على V و $k\in K$. يسمى هذا الفَضاء «الفضاء الثنوي» لـ V، ونرمز له بـ V^*.

المسائل 8.18-10.18 تتعلق بالداليين الخطيين $\phi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ و $\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ المعرّفين بواسطة $\phi(x,y)=x+2y$ و $\sigma(x,y)=3x-y$.

8.18 أوجد $\phi+\sigma$.

■ $(\phi+\sigma)(x,y)=\phi(x,y)+\sigma(x,y)=x+2y+3x-y=4x+y$.

9.18 أوجد 4ϕ.

■ $(4\phi)(x,y)=4\phi(x,y)=4(x+2y)=4x+8y$.

10.18 أوجد $2\phi-5\sigma$.

■ $(2\phi-5\sigma)(x,y)=2\phi(x,y)-5\sigma(x,y)=2(x+2y)-5(3x-y)-5(3x-y)=-13x+9y$.

المسائل 11.18-13.18 تتعلق بالداليين الخطيين $\phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ و $\sigma:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ المعرّفين بواسطة $\phi(x,y,z)=2x-3y+z$ و $\sigma(x,y,z)=4x-2y+3z$.

11.18 أوجد $\phi+\sigma$.

■ $(\phi+\sigma)(x,y,z)=3\phi(x,y,z)+\sigma(x,y,z)=(2x-3y+z)+(4x-2y+3z)=6x-5y+4z$.

12.18 أوجد 3ϕ.

■ $(3\phi)(x,y,z)=3\phi(x,y,z)=3(2x-3y+z)=6x-9y+3z$.

13.18 أوجد $2\phi-5\sigma$.

■ $(2\phi-5\sigma)(x,y,z)=2\phi(x,y,z)-5\sigma(x,y,z)=2(2x-3y+z)-5(4x-2y+3z)=-16x+4y-13z$.

14.18 ليكن $V=K^n$. بيّن كيف يمكن مطابقة الفضاء الثنوي V^* مع فضاء المتجهات الصفية [حيث عناصر V متجهات عمودية].

■ ليكن σ عنصراً في الفضاء الثنوي V^*، أي تطبيقاً خطياً $\sigma:V\to K$. باختيار قاعدة من أجل V، ولتكن القاعدة المعتادة، تكون σ ممثلة بواسطة مصفوفة $[\sigma]$. ولكن مصفوفة، مثل هذه، تكون متجهاً صفياً. أيضاً، يكون التطبيق $\sigma\mapsto[\sigma]$ تشاكلاً تقابلياً لفضاء متجهي.

من جهة أخرى، يعرّف أي متجه صفّي $\phi=(a_1,\ldots,a_n)$ داليّاً خطياً $\phi:V\to K$ بواسطة

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

أو ببساطة، $\phi(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. تاريخياً، كان يصطلح على التعبير الصوري أعلاه باسم «شكل خطي».

15.18 ليكن ϕ دالياً خطياً على $\mathbf{R}^2$ معرّفاً بواسطة $\phi(2,1) = 15$ و $\phi(1,-2) = -10$. أوجد ϕ .

■ ليكن $\phi = (a,b)$ ، متجهاً صفياً. أعطينا أن

$$(a,b)\binom{2}{1} = 15 \qquad\qquad 2a + b = 15$$

أو

$$(a,b)\binom{1}{-2} = -10 \qquad\qquad a - 2b = -10$$

المعادلتان معاً تعطيان $a = 4$ ، $b = 7$ ، وبذلك، $\phi = (4,7)$ و $\phi(x,y) = 4x + 7y$.

16.18 لنفترض أن $\dim V = n$. ما هو بعد الفضاء الثنوي V^*؟

■ لاحظ أن $\dim K = 1$ حيث K فضاء متجهي فوق نفسه بما أن $V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$. (وهو فضاء التطبيقات الخطية من V إلى K)، إذن $\dim V^* = \dim[\mathrm{Hom}(V,K)] = (\dim V).(\dim K) = n.1 = n$. [كان هذا متوقعاً لأنه يمكن مطابقة V^* مع المتجهات الصفية عندما يطابق مع المتجهات العمودية].

2.18 القاعدة الثنوية

إن المحتوى الرئيسي لهذا القسم هو المبرهنة التالية التي سوف تبرهن في المسألة 23.18.

مبرهنة 1.18 لنفترض أن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ قاعدة لـ V فوق K. ولتكن $\phi_1,\ldots,\phi_n \in V^*$ الداليّات الخطية المعرّفة بواسطة

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا} \quad = j \\ 0 & \text{إذا} \quad \neq j \end{cases}$$

إذن، تكون $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ قاعدة لـ V^*.

القاعدة $\{\phi_i\}$ أعلاه تسمى القاعدة «الثنوية» لـ $\{v_i\}$ أو «القاعدة الثنوية». إن الصيغة السابقة التي تستخدم دلتا كرونكر δ_{ij} هي طريقة مختصرة لكتابة

$$\begin{array}{l} \phi_1(v_1) = 1,\ \phi_1(v_2) = 0,\ \phi_1(v_3) = 0,\ \ldots,\ \phi_1(v_n) = 0 \\ \phi_2(v_1) = 0,\ \phi_2(v_2) = 1,\ \phi_2(v_3) = 0,\ \ldots,\ \phi_2(v_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_n(v_1) = 0,\ \phi_n(v_2) = 0,\ \ldots,\ \phi_n(v_{n-1}) = 0,\ \phi_n(v_n) = 1 \end{array}$$

وهذه الداليات الخطية ϕ_i وحيدة ومعرّفة جيداً، لأنها معرفة على قاعدة لـ V.

17.18 لتكن القاعدة التالية على $\mathbf{R}^2$: $u_1 = \binom{1}{2}$ و $u_2 = \binom{2}{3}$. أوجد متجهين صفيين w_1 و w_2 يشكلان القاعدة الثنوية.

■ ليكن $w_1 = (a,b)$. بما أن $w_1u_1 = 1$ و $w_1u_2 = 0$، فنحصل على

$$w_1u_1 = (a,b)\binom{1}{2} = a + 2b = 1 \qquad \text{و} \qquad w_1u_2 = (a,b)\binom{2}{3} = 2a + 3b = 0$$

إذن، $a = -3$ ، $b = 2$ ، وبذلك، $w_1 = (-3,2)$.

ليكن $w_2 = (c,d)$. بما أن $w_2u_1 = 0$ و $w_2u_2 = 1$، فنحصل على

$$w_2u_1 = (c,d)\binom{1}{2} = c + 2d = 0 \qquad \text{و} \qquad w_2u_2 = (c,d)\binom{2}{3} = 2c + 3d = 1$$

إذن $c = 2$ ، $d = -1$ ، وبذلك، $w_2 = (2,-1)$.

18.18 لتكن القاعدة التالية لـ $\mathbf{R}^2$: $\{v_1 = (2,1), v_2 = (3,1)\}$. أوجد القاعدة الثنوية $\{\phi_1,\phi_2\}$.

■ نبحث عن داليين خطيين $\phi_1(x,y) = ax + by$ و $\phi_2(x,y) = cx + dy$ بحيث أن: $\phi_1(v_1) = 1$ ، $\phi_1(v_2) = 0$ ، $\phi_2(v_1) = 0$ ، $\phi_2(v_2) = 1$. لذلك،

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(v_1) = \phi_1(2,1) = 2a + b = 1\\ \phi_1(v_2) = \phi_1(3,1) = 3a + b = 0\end{array}\right\} \quad \text{أو} \quad a = -1, b = 3$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi_2(v_1) = \phi_2(2,1) = 2c + d = 0\\ \phi_2(v_2) = \phi_2(3,1) = 3c + d = 1\end{array}\right\} \quad \text{أو} \quad c = 1, d = -2$$

وبالتالي، تكون القاعدة الثنوية $\{\phi_1(x,y) = -x + 3y, \phi_2(x,y) = x - 2y\}$.

19.18 أوجد القاعدة الثنوية للقاعدة التالية في $\mathbf{R}^3$: $\{u_1 = (1,-2,3), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (2,-4,7)\}$.

■ لتكن w_1، w_2، w_3 القاعدة الثنوية الممثلة بمتجهات صفية. لنفترض أن $w_1 = (a_1,a_2,a_3)$. بما أن $w_1u_1 = 1$، $w_2u_2 = 0$، $w_3u_3 = 0$، نحصل على

$$a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 1 \qquad a_1 - a_2 + a_3 = 0 \qquad 2a_1 - 4a_2 + 7a_3 = 0 \qquad (1)$$

نحلّ فنحصل على $a_1 = -3$، $a_2 = -5$، $a_3 = -2$. وبذلك، $w_1 = (-3,-5,-2)$ أو $w_1(x,y,z) = -3x - 5y - 2z$.

لنفترض أن $w_2 = (b_1,b_2,b_3)$. بما أن $w_2u_1 = 0$، $w_2u_2 = 1$، $w_2u_3 = 0$، نحصل على

$$b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 0 \qquad b_1 - b_2 + b_3 = 1 \qquad 2b_1 - 4b_2 + 7b_3 = 0 \qquad (2)$$

نحلّ فنحصل على $b_1 = 2$، $b_2 = 1$، $b_3 = 0$. وبذلك، $w_2 = (2,1,0)$ أو $w_2(x,y,z) = 2x + y$.

نفترض أخيراً أن $w_3 = (c_1,c_2,c_3)$. بما أن $w_3u_1 = 0$، $w_3u_2 = 0$، $w_3u_3 = 1$، نحصل على

$$c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \qquad c_1 - c_2 + c_3 = 0 \qquad 2c_1 - 4c_2 + 7c_3 = 1 \qquad (3)$$

نحلّ فنحصل على $c_1 = 1$، $c_2 = 2$، $c_3 = 1$. وبذلك، $w_3 = (1,2,1)$ أو $w_3(x,y,z) = x + 2y + z$.

ملاحظة: لاحظ التشابه في المعادلات (1) و (2) و (3).

20.18 لتكن القاعدة التالية في $\mathbf{R}^3$: $\{v_1 = (1,-1,3), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (0,3,-2)\}$. أوجد القاعدة الثنوية $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$.

■ نبحث عن داليّات خطية $\phi_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$ ، $\phi_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$ ، $\phi_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z$ بحيث أن

$$\begin{array}{lll}\phi_1(v_1) = 1 & \phi_1(v_2) = 0 & \phi_1(v_3) = 0\\ \phi_2(v_1) = 0 & \phi_2(v_2) = 1 & \phi_2(v_3) = 0\\ \phi_3(v_1) = 0 & \phi_3(v_2) = 0 & \phi_3(v_3) = 1\end{array}$$

نجد ϕ_1 كما يلي:

$$\begin{array}{l}\phi_1(v_1) = \phi_1(1,-1,3) = a_1 - a_2 + 3a_3 = 1\\ \phi_1(v_2) = \phi_1(0,1,-1) = a_2 - a_3 = 0\\ \phi_1(v_3) = \phi_1(0,3,-2) = 3a_2 - 2a_3 = 0\end{array}$$

نحل منظومة المعادلات، فنحصل على $a_1 = 1$، $a_2 = 0$، $a_3 = 0$. وبذلك، $\phi_1(x,y,z) = x$.

نجد ϕ_2 كما يلي:

$$\begin{array}{l}\phi_2(v_1) = \phi_2(1,-1,3) = b_1 - b_2 + 3b_3 = 0\\ \phi_2(v_2) = \phi_2(0,1,-1) = b_2 - b_3 = 1\\ \phi_2(v_3) = \phi_2(0,3,-2) = 3b_2 - 2b_3 = 0\end{array}$$

نحلّ المنظومة، فنحصل على $b_1 = 7$، $b_2 = -2$، $b_3 = -3$. وبالتالي، $\phi_2(x,y,z) = 7x - 2y - 3z$. أخيراً، نبحث عن ϕ_3:

$$\begin{array}{l}\phi_3(v_1) = \phi_3(1,-1,3) = c_1 - c_2 + 3c_3 = 0\\ \phi_3(v_2) = \phi_3(0,1,-1) = c_2 - c_3 = 0\\ \phi_3(v_3) = \phi_3(0,3,-2) = 3c_2 - 2c_3 = 1\end{array}$$

نحلّ المنظومة، فنحصل على $c_1 = -2$، $c_2 = 1$، $c_3 = 1$. وبذلك، $\phi_3(x,y,z) = -2x + y + z$.

21.18 أوجد القاعدة $\{f_1,f_2,f_3\}$ التي تكون ثنوية للقاعدة المعتادة $\{e_1,e_2,e_3\}$ في $\mathbb{R}^3$.

■ لنفترض أن $f_1 = (a,b,c)$. بما أن $f_1e_1 = 1$، $f_1e_2 = 0$، $f_1e_3 = 0$، نحصل على

$$1 = (a,b,c)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = a \qquad 0 = (a,b,c)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = b \qquad 0 = (a,b,c)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = c$$

وبذلك، $f_1 = (1,0,0)$. وبالمثل، $f_2 = (0,1,0)$ و $f_3 = (0,0,1)$. بتعبير آخر، ثنوية القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^3$ هي نفسها القاعدة المعتادة لـ $\mathbb{R}^{3*}$.

22.18 ليكن V الفضاء المتجهي للحدوديات الحقيقية $f(t) = a + bt$ [أي أن $\deg f \leqslant 1$]. وليكن $\phi: V \to \mathbb{R}$ و $\phi_2: V \to \mathbb{R}$ معرّفين بواسطة

$$\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)\,dt \qquad \text{و} \qquad \phi_2(f(t)) = \int_0^2 f(t)\,dt$$

[نلاحظ أن ϕ_1 و ϕ_2 خطيان وينتميان إلى الفضاء الثنوي V^*]. أوجد قاعدة $\{v_1,v_2\}$ لـ V تكون ثنوية لـ $\{\phi_1,\phi_2\}$.

■ ليكن $v_1 = a + bt$ و $v_2 = c + dt$. لدينا من تعريف القاعدة الثنوية، أن $\phi_1(v_1) = 1$، $\phi_2(v_1) = 0$ و $\phi_1(v_2) = 0$، $\phi_2(v_2) = 1$. إذن

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(v_1) &= \int_0^1 (a+bt)\,dt = a + \tfrac{1}{2}b = 1\\ \phi_2(v_1) &= \int_0^2 (a+bt)\,dt = 2a + 2b = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{أو} \quad a = 2,\ b = -2$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(v_2) &= \int_0^1 (c+dt)\,dt = c + \tfrac{1}{2}d = 0\\ \phi_2(v_2) &= \int_0^2 (c+dt)\,dt = 2c - 2d = 1\end{aligned}\right\} \quad \text{أو} \quad c = -\tfrac{1}{2},\ d = 1$$

بتعبير آخر، تكون $\{2 - 2t, -1/2 + t\}$ قاعدة لـ V والتي تكون ثنوية لـ $\{\phi_1,\phi_2\}$.

23.18 أثبت مبرهنة 1.18.

■ نبين أولاً أن $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ تولّد V^*. ليكن ϕ عنصراً إختيارياً في V^*، ولنفترض أن $\phi(v_1) = k_1, \phi(v_2) = k_2, \ldots, \phi(v_n) = k_n$. نضع $\sigma = k_1\phi_1 + \ldots + k_n\phi_n$. إذن

$$\begin{aligned}\sigma(v_1) &= (k_1\phi_1 + \cdots + k_n\phi_n)(v_1)\\ &= k_1\phi_1(v_1) + k_2\phi_2(v_1) + \cdots + k_n\phi_n(v_1)\\ &= k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_1\end{aligned}$$

بالمثل، ومن أجل $i = 2,\ldots,n$، $\sigma(v_i) = (k_1\phi_1 + \ldots + k_n\phi_n)(v_i) = k_1\phi_1(v_i) + \ldots + k_i\phi_i(v_i) + \ldots + k_n\phi_n(v_i) = k_i$. وبذلك، $\phi(v_i) = \sigma(v_i)$ من أجل $i = 1,\ldots,n$. بما أن ϕ و σ يتوافقان على متجهات القاعدة؛ إذن، $\phi = \sigma = k_1\phi_1 + \ldots + k_n\phi_n$. ينتج عن ذلك أن $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ تولّد V^*.

يبقى أن نبين أن $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ مستقلة خطياً. لنفترض أن $a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \ldots + a_n\phi_n = 0$. بتطبيق الطرفين على v_1، نحصل على

$$\begin{aligned}0 = 0(v_1) &= (a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n)(v_1)\\ &= a_1\phi_1(v_1) + a_2\phi_2(v_1) + \cdots + a_n\phi_n(v_1)\\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_1\end{aligned}$$

بالمثل، ومن أجل $i = 2,\ldots,n$، يكون لدينا

$0 = 0(v_i) = (a_1\phi_1 + \ldots + a_n\phi_n)(v_i) = a_1\phi_1(v_i) + \ldots + a_i\phi_i(v_i) + \ldots + a_n\phi_n(v_i) = a_i$. أي أن $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. وبالتالي، تكون $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مستقلة خطياً، وبذلك تكون قاعدة لـ V^*.

مبرهنة 2.18: لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ قاعدة لـ V، ولتكن $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ القاعدة الثنوية لـ V^*. إذن، ومن أجل أي متجه $u \in V$، يكون لدينا

$$u = \phi_1(u)v_1 + \phi_2(u)v_2 + \ldots + \phi_n(u)v_n \qquad (1)$$

ولدينا، من أجل أي دالّي خطي $\sigma \in V^*$، أن

$$\sigma = (v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(v_n)\phi_n \qquad (2)$$

24.18 أثبت مبرهنة 2.18.

■ لنفترض أن

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \qquad (3)$$

إذن، $\phi_1(u) = a_1\phi_1(v_1) + a_2\phi_1(v_2) + \ldots + a_n\phi_1(v_n) = a_1.1 + a_2.0 + \ldots + a_n.0 = a_1$. بالمثل، ومن أجل $i = 2, \ldots, n$، يكون لدينا $\phi_i(u) = a_1\phi_i(v_1) + \ldots + a_i\phi_i(v_i) + \ldots + a_n\phi_i(v_n) = a_i$. أي أن $\phi_1(u) = a_1, \phi_2(u) = a_2, \ldots, \phi_n(u) = a_n$. بالتعويض بهذه النتائج في (3)، نحصل على (1).

نبرهن، بعد ذلك، على (2). نطبق الدالّي الخطي σ على طرفي (1)،

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \phi_1(u)\sigma(v_1) + \phi_2(u)\sigma(v_2) + \cdots + \phi_n(u)\sigma(v_n)\\ &= \sigma(v_1)\phi_1(u) + \sigma(v_2)\phi_2(u) + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n(u)\\ &= (\sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n)(u)\end{aligned}$$

بما أن ما سبق يتحقق من أجل $u \in V$، يكون لدينا $\sigma = \sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \ldots + \sigma(v_n)\phi_n$ وهو المطلوب.

مبرهنة 3.18: لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ و $\{w_1, \ldots, w_n\}$ قاعدتين لـ V، ولتكن $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ قاعدتين لـ V^* الثنويتين لـ $\{v_i\}$ و $\{w_i\}$، على الترتيب. لنفترض أن P مصفوفة الانتقال من $\{v_i\}$ إلى $\{w_i\}$. إذن، تكون $(P^{-1})^T$ مصفوفة الانتقال من $\{\phi_i\}$ إلى $\{\sigma_i\}$.

25.18 أثبت مبرهنة 3.18.

■ لنفترض أن

$$\begin{aligned}w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n\\ w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ w_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sigma_1 &= b_{11}\phi_1 + b_{12}\phi_2 + \cdots + b_{1n}\phi_n\\ \sigma_2 &= b_{21}\phi_1 + b_{22}\phi_2 + \cdots + b_{2n}\phi_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n &= b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \cdots + b_{nn}\phi_n\end{aligned}$$

حيث $P = (a_{ij})$ و $Q = (b_{ij})$. سوف نثبت أن $Q = (P^{-1})^T$.

ليكن R_i الصف i لـ Q و C_j العمود j لـ P^T. إذن، $R_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$ و $C_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})^T$. لدينا، من تعريف القاعدة الثنوية، لدينا

$\sigma_i(w_j) = (b_{i1}\phi_1 + b_{i2}\phi_2 + \ldots + b_{in}\phi_n)(a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \ldots + a_{jn}v_n) = b_{i1}a_{j2} + \ldots + b_{in}a_{jn} = R_iC_j = \delta_{ij}$، حيث δ_{ij} دلتا كرونكر. وبذلك،

$$QP^T = \begin{pmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \cdots & R_1C_n\\ R_2C_1 & R_2C_2 & \cdots & R_2C_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_nC_1 & R_nC_2 & \cdots & R_nC_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = I$$

وبالتالي، $Q = (P^T)^{-1})^{-1} = (P^{-1})^T$. وهو المطلوب.

المسائل 26.18-30.18 تتعلق بالقاعدتين التاليتين في $\mathbb{R}^2$: $S_1 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,0)\}$ و $S_2 = \{w_1 = (4,3), w_2 = (3,2)\}$.

26.18 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من S_1 إلى S_2.

■ نكتب w_1 كتركيبة خطية لـ v_1 و v_2: $(4,3) = x(1,1) + y(1,0) = (x + y, x)$ أو $x + y = 4$، $x = 3$. وبذلك $x = 3$، $y = 1$ حلاً، وبالتالي $w_1 = 3v_1 + v_2$.

نكتب w_2 كتركيبة خطية في v_1 و v_2: $(3,2) = x(1,1) + y(1,0) = (x + y, x)$ أو $x + y = 3$، $x = 2$. وبذلك، يكون $x = 2$، $y = 1$ حلاً، وبالتالي $w_2 = 2v_1 + v_2$.

نكتب إحداثيات w_1 و w_2 كأعمدة، فنحصل على

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27.18 أوجد القاعدة $S_1' = \{\phi_1, \phi_2\}$ التي تكون ثنوية لـ S_1.

■ ليكن $\phi_1 = (a,b)$. إذن $\phi_1 v_1 = 1$ و $\phi_1 v_2 = 0$. وبذلك، $a + b = 1$ و $a = 0$، ومنهما $a = 0$، $b = 1$. ويكون $\phi_1 = (0,1)$. ليكن $\phi_2 = (c,d)$. إذن، $\phi_2 v_1 = 0$ و $\phi_2 v_2 = 1$. وبالتالي، $c + d = 0$ و $c = 1$؛ ومنهما $c = 1$ و $d = -1$، ويكون $\phi_2 = (1,-1)$.

28.18 أوجد القاعدة $S_2' = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ التي تكون ثنوية لـ S_2.

■ ليكن $\sigma_1 = (a,b)$. إذن، $\sigma_1 w_1 = 1$ و $\sigma_1 w_2 = 0$. وبذلك $4a + 3b = 1$، $3a + 2b = 0$ أو $a = -2$، $b = 3$ و $\sigma_1 = (-2,3)$. ليكن $\sigma_2 = (c,d)$. إذن، $\sigma_2 w_1 = 0$ و $\sigma_2 w_2 = 1$. وبذلك، $4c + 3d = 0$ و $3c + 2d = 1$؛ ومنهما $c = 3$ و $d = -4$. إذن، $\sigma_2 = (3,-4)$.

29.18 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة Q من S_1' إلى S_2'.

■ نكتب σ_1 كتركيبة خطية في ϕ_1 و ϕ_2: $(-2,3) = x(0,1) + y(1,-1)$، وبذلك، يكون $y = -2$، $x - y = 3$. حلاً؛ وبالتالي، $\sigma_1 = \phi_1 - 2\phi_2$.

ونكتب σ_2 كتركيبة خطية في ϕ_1 و ϕ_2: $(3,-4) = x(0,1) + y(1,-1)$ أو $y = 3$، $x - y = -4$. وبذلك، يكون $x = -1$، $y = 3$ حلاً؛ وبالتالي، $\sigma_2 = -\phi_1 + 3\phi_2$.

نكتب إحداثيات σ_1 و σ_2 كأعمدة، فنحصل على

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

30.18 حقق مبرهنة 3.18، أي $Q = (P^{-1})^T$.

■ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$، وبالتالي $(P^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = Q$ كما هو متوقع.

3.18 الفضاء الثنوي الثاني، التطبيق الطبيعي

31.18 عرّف الفضاء الثنوي الثاني.

■ ليكن V أي فضاء متجهي فوق K. الفضاء الثنوي V^* هو الفضاء المتجهي للتطبيقات الخطية من V إلى K. أما الفضاء الثنوي الثاني V^{**} فهو الفضاء المتجهي للتطبيقات الخطية من V^* إلى K، أي أن V^{**} هو ثنوي (ثنوي V).

32.18 ليكن $v \in V$. إذن، يحدد v تطبيقاً $\hat{v}: V^* \to K$ كما يلي: من أجل أي $\phi \in V^*$، نعرّف $\hat{v}(\phi) = \phi(v)$. بيّن أن $\hat{v}$ خطي.

■ لدينا، من أجل أي $\phi,\sigma \in V^*$ وأي $a,b \in K$ أن
$\hat{v}(a\phi + b\sigma) = (a\phi + b\sigma)(v) = a\phi(v) + b\sigma(v) = a\hat{v}(\phi) + b\hat{v}(\sigma)$. إذن، يكون $\hat{v}$ خطياً.

33.18 بيّن أن $\hat{v} \in V^{**}$.

■ من المسألة السابقة، يكون $\hat{v}$ تطبيقاً خطياً من V^* إلى K؛ وبالتالي، $\hat{v} \in V^{**}$.

34.18 عرّف التطبيق الطبيعي من V إلى V^{**}.

■ التطبيق $v \mapsto \hat{v}$ ، حيث $\hat{v}$ كما عرّفت أعلاه، يسمى التطبيق الطبيعي من V إلى V^{**}.

35.18 بيّن أن التطبيق الطبيعي من V إلى V^{**} يكون خطياً، أي بيّن أنه، من أجل أي متجهين $v,w \in V$ وأي سلّميين $a,b \in K$، يكون لدينا $\widehat{av + bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$. [هنا، $\hat{v}: V^* \to K$ معرّف بواسطة $\hat{v}(\phi) = \phi(v)$].

■ لدينا، من أجل أي دالّيّ خطي $\phi \in V^*$ ، أن
$\widehat{av + bw}(\phi) = \phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w) = a\hat{v}(\phi) + b\hat{w}(\phi) = (a\hat{v} + b\hat{w})(\phi)$. بما أن $\widehat{av + bw}(\phi) = (a\hat{v} + b\hat{w})(\phi)$ من أجل كل $\phi \in V^*$ ، يكون لدينا $\widehat{av + bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$. وبذلك، يكون $v \mapsto \hat{v}$ خطياً.

36.18 ليكن $v \in V$ أي متجه غير صفري. بيّن أنه يوجد $\phi \in V^*$ بحيث أن $\phi(v) \neq 0$.

■ وسع $\{v\}$ إلى قاعدة $\{v_i\}$ لـ V. إذن، يوجد تطبيق خطي وحيد $\phi: V \to K$ بحيث أن $\phi(v) = 1$. ولكن $\phi(v_i) = 0$ من أجل $v_i \neq v$. إذن، يكون لـ ϕ الخاصية المطلوبة.

37.18 بيّن أن التطبيق الطبيعي من V إلى V^{**} يكون واحداً ـ لواحد.

■ لنفترض أن $v \in V$، $v \neq 0$. إذن، ومن المسألة السابقة، يوجد $\phi \in V^*$ بحيث أن $\phi(v) \neq 0$. وبالتالي، $\hat{v}(\phi) = \phi(v) \neq 0$، وبذلك $\hat{v} \neq 0$. بما أن $v \neq 0$ يقتضي $\hat{v} \neq 0$ ، فإن التطبيق $v \mapsto \hat{v}$ غير شاذ. وبذلك، يكون التطبيق الطبيعي واحداً ـ لواحد.

مبرهنة 4.18: إذا كان V منته البعد، فإن التطبيق $v \mapsto \hat{v}$ يكون تشاكلا تقابلياً من V فوق V^{**}.

38.18 أثبت مبرهنة 4.18.

■ الآن، $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$، لأن V له بُعْد منته. ينتج عن ذلك، أن التطبيق غير الشاذ $v \mapsto \hat{v}$ تشاكل تقابلي من V فوق V^{**}.

ملاحظة: لنفترض أن V له بعد منته. نعرف، من المبرهنة السابقة، أن التطبيق الطبيعي يحدّد تشاكلاً تقابلياً بين V و V^{**}. سوف يطابق V مع V^{**} بواسطة هذا التطبيق، إلا إذا ذكر غير ذلك، وسوف نكتب $V = V^{**}$. أيضاً، إذا $\{\phi_i\}$ قاعدة لـ V^* تكون ثنوية لقاعدة $\{v_i\}$ لـ V، فإن $\{v_i\}$ تكون القاعدة لـ $V = V^{**}$ التي تكون ثنوية لـ $\{\phi_i\}$.

4.18 المُعْدِمَات

39.18 لتكن W مجموعة جزئية في فضاء متجهي V. عرّف مُعْدِم W، والذي يرمز له بـ W^0.

■ نقول عن دالّي خطي $\phi \in V^*$ أنه معدم لـ W إذا $\phi(w) = 0$ من أجل كل $w \in W$ أو، بتعبير آخر، إذا $\phi(W) = 0$. أما مجموعة كل مثل هذه التطبيقات، ونرمز لها بـ W^0، فتسمى مُعْدِم W.

40.18 بيِّن أن W^0 فضاء جزئي في V^*.

■ من الواضح أن $0 \in W^0$. نفترض الآن $\phi, \sigma \in W^0$. إذن، من أجل أي سلّميين $a,b \in K$ وأي $w \in W$، يكون لدينا $(a\phi + b\sigma)(w) = a\phi(w) + b\sigma(w) = a0 + b0 = 0$. وبذلك، $a\phi + b\sigma \in W^0$؛ ويكون W^0 فضاءً جزئياً في V^*.

41.18 بيِّن أنه إذا كان $\phi \in V^*$ يُعْدِمُ مجموعة جزئية S في V، فإن ϕ يُعْدِمُ البسطة الخطية (S) لـ S. وبالتالي، $S^0 = [\text{span}(S)]^0$.

■ لنفترض أن $v \in \text{span}(S)$. إذن، توجد $w_1,\dots,w_r \in S$ بحيث أن $v = a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_rw_r$. إذن، $\phi(v) = a_1\phi(w_1) + a_2\phi(w_2) + \dots + a_r\phi(w_r) = = a_10 + a_20 + \dots + a_r0 = 0$. بما أن v عنصر اختياري في $\text{span}(S)$، فإن ϕ تعدم $\text{span}(S)$ كما متوقع.

42.18 ليكن W الفضاء الجزئي في R^4 المُوَلَّد بواسطة $v_1 = (1,2,-3,4)$ و $v_2 = (0,1,4,-1)$. أوجد قاعدة من أجل معدم W.

■ يكفي، وفق المسألة السابقة، أن نجد قاعدة لمجموعة الداليات الخطية $\phi(x,y,z,w) = ax + by + cz + dw$ يكون من أجلها $\phi(v_1) = 0$ و $\phi(v_2) = 0$:

$$\phi(1,2,-3,4) = a + 2b - 3c - 4d = 0$$
$$\phi(0,1,4,-1) = \quad b + 4c - d = 0$$

منظومة المعادلات في المجاهيل a، b، c، d تكون في شكل درجي بمتغيرين حرَّين c و d.

نضع $c = 1$، $d = 0$ فنحصل على الحل $a = 11$، $b = -4$، $c = 1$، $d = 0$، وبالتالي الدالي الخطي $\phi_2(x,y,z,w) = 6x - y - w$.

وتكون مجموعة الداليين الخطية $\{\phi_1, \phi\}$ قاعدة لـ W^0، معدم W.

43.18 ليكن S مجموعة جزئية في V. بيِّن أن $S \subseteq S^{00}$.

■ ليكن $v \in S$. إذن $\hat{v}(\phi) = \phi(v) = 0$، من أجل كل $\phi \in S^0$. وبالتالي، $\hat{v} \in (S^0)^0$. إذن، وبسبب مطابقة V و V^{**}، يكون $v \in S^{00}$ يعني ذلك أن $S \subseteq S^{00}$.

44.18 لنفترض أن $S_1 \subseteq S_2$. بيِّن أن $S_2^0 \in S_1^0$.

■ ليكن $\phi \in S_2^0$. إذن $\phi(v) = 0$ من أجل كل $v \in S_2$. ولكن $S_1 \subset S_2$. إذن، ϕ يعدم كل عنصر في S_1، أي أن $\phi \subset S_1$. وبذلك، $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

مبرهنة 5.18: لنفترض أن V ذو بعد منتهٍ، وأن W فضاء جزئي في V. إذن، $\dim W + \dim W = \dim V$، و (ii) $W\infty = W$.

45.18 أثبت (i) في مبرهنة 5.18.

■ لنفترض أن $\dim V = n$ و $\dim W = r \leqslant n$. ونريد تبيان أن $\dim W^0 = n-r$. ونختار قاعدة $\{w_1,\dots,w_r\}$ لـ W ونوسعها إلى القاعدة التالية لـ V: $\{w_1,\dots,w_r,v_1,\dots,v_{n-r}\}$. لننظر في القاعدة الثنوية $\{\phi_1,\dots,\phi_r,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-r}\}$. من تعريف القاعدة الثنوية، يُعْدِم كل واحد من الـ σ كل w_i؛ وبالتالي، $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-r} \in W^0$. أننا نزعم بأن $\{\sigma_j\}$ قاعدة لـ W^0. الآن، $\{\sigma_j\}$ جزء من قاعدة V^* وبذلك تكون مستقلة خطياً.

نبين بعدَ ذلك أن $\{\sigma_j\}$ تولّد W^0. ليكن $\sigma \in W^0$. إذن،

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(w_1)\phi_1 + \cdots + \sigma(w_r)\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r} \\ &= 0\phi_1 + \cdots + 0\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r} \\ &= \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}\end{aligned}$$

وبذلك، فإن $\{\sigma_1,\dots,\sigma_{n-r}\}$ تولّد W وتكون قاعدة لـ W^0. ينتج عن ذلك أن $\dim W^0 = n-r = \dim V - \dim W$، وهو المطلوب.

46.18 اثبت (ii) في مبرهنة 5.18.

■ لنفترض $\dim V = n$ و $\dim W = r$. إذن $\dim V^* = n$، ومن (i). يكون $\dim W^0 = n - r$. بذلك، وبسبب (i)، $\dim W^{00} = n-(n-r) = r$؛ وبالتالي، $\dim W = \dim W^{00}$. بما أن $W \subseteq W^{00}$، يكون لدينا $W = W^{00}$.

47.18 باستخدام مفهوم المعدم، اعط تفسيراً آخر لمنظومة متجانسة من معادلات خطية، لتكن

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

■ ينظر لكل صف $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$، في مصفوفة المعاملات $A = (a_{ij})$، بأنه عنصر في K^n، وكل متجه حلّي فإنه عنصر في الفضاء الثنوي. في هذا الإطار، يكون الفضاء الحلّي S لـ (1) المعدم لصفوف A وبالتالي المعدم للفضاء الصفي لـ A. نتيجة لذلك، نحصل مرة أخرى على النتيجة الأساسية التالية حول بعد الفضاء الحلّي لمنظومة متجانسة من معادلات خطية: [بُعْد S= بُعْد (الفضاء الصفي لـ A) = n ـ رتبة (A)].

48.18 ليكن U و W فضاءين جزئيين في V. اثبت أن: $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

■ ليكن $\phi \in (U + W)^0$. إذن، ϕ يعدم $U + W$؛ وبذلك، وعلى الخصوص، ϕ تعدم U و V. أي أن $\phi \in U^0$ و $\phi \in W^0$؛ وبالتالي، $\phi \in U^0 \cap W^0$. إذن، $(U + W)^0 \subseteq U^0 \cap W^0$.

لنفترض، من جهة أخرى، أن σ يعدم σ وأيضاً W. إذا $v \in U + W$، إذن $v = u + w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. وبالتالي، $\sigma(v) = \sigma(u) + \sigma(w) = 0 + 0 = 0$. إذن، σ يعدم $U + W$، أي أن $\sigma \in (U + W)^0$. ينتج عن ذلك أن $U^0 + W^0 \subseteq (U + W)^0$.

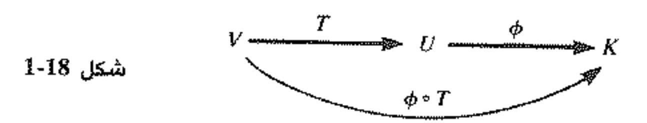
الاحتواءان معاً يقودان إلى النتيجة المنشودة.

ملاحظة: لاحظ أنه لم تستخدم أي محاجة تتعلق بالبُعْد في هذا البرهان؛ وبالتالي، تكون النتيجة صالحة من الفضاء منتهية ولا نهائية البعد.

5.18 منقول تطبيق خطي

49.18 ليكن $T: V \to U$ تطبيق خطي إختياري من فضاء متجهي V إلى فضاء متجهي U. عرّف منقول T، والذي نرمز له بـ T^t.

■ من أجل دالّي خطي $\phi \in U^*$، يكون التركيب $\phi \circ T$ تطبيقاً خطياً من V إلى K، كما موضح في الشكل 18-1. أي أن $\phi \circ T \in V^*$. وبذلك، تكون المقابلة $\phi \mapsto \phi \circ T$ تطبيقاً من U^* إلى V^*؛ نرمز لذلك بـ T^t ونطلق عليها اسم «منقول T». بتعبير آخر، يعرّف $T^t: U^* \to V^*$ بواسطة $T^t(\phi) = \phi \circ T$. وبذلك، $[T^t(\phi)](v) = \phi(T(v))$ من أجل كل $v \in V$.



شكل 18-1

مبرهنة 6.18: إن التطبيق المنقول T^t، المعرّف أعلاه، يكون خطياً.

50.18 اثبت مبرهنة 6.18.

■ لدينا، من أجل أي سلّميين $a, b \in K$ وأي داليين خطيين $\phi, \sigma \in U^*$، أن $T^t(a\phi + b\sigma) = (a\phi + b\sigma)\circ T = a(\phi\circ T) + b(\sigma\circ T) = aT^t(\phi) + bT^t(\sigma)$. أي أن T^t خطي؛ وهو المطلوب.

المسائل 51.18-53.18 تتعلق بدالّي خطي $\phi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ معرّف بواسطة $\phi(x,y) = x - 2y$، ومؤثر خطي $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ تعطيه المسألة.

51.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y)$ عندما $T(x,y) = (x,0)$.

■ نعرف، من تعريف التطبيق المنقول أن $T^t(\phi) = \phi \circ T$، أي أن $[T^t(\phi)](v) = \phi(T(v))$ من أجل كل متجه v. وبالتالي، $[T^t(\phi)](x,y) = \phi(T(x,y)) = \phi(x,0) = x$.

52.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y)$ عندما $T(x,y) = (y,x+y)$.

■ $[T^t(\phi)](x,y) = \phi(T(x,y)) = \phi(y,x+y) = y - 2(x+y) = -2x - y$.

53.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y)$ عندما $T(x,y) = (2x-3y,5x+2y)$.

■ $[T^t(\phi)](x,y) = \phi(T(x,y)) = \phi(2x-3u,5x+2y) = (2x-3y) - 2(5x+2y) = -8x - 7y$.

المسائل 54.18-56.18 تتعلق بدالّي خطي $\phi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ معرّف بواسطة $\phi(x,y) = 3x - 2y$ ومؤثر خطي $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ تعطيه المسألة.

54.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y,z)$ عندما $T(x,y,z) = (x+y,y+z)$.

■ أُعطينا $[T^t(\phi)](v) = \phi(T(v))$، فيكون لدينا

$[T^t(\phi)](x,y,z) = \phi(T(x,y,z)) = \phi(T(x,y,z)) = \phi(x+y,y+z) = 3(x+y) - 2(y+z) = 3x + y - 2z$.

55.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y,z)$ عندما $T(x,y,z) = (3z,x+y)$.

■ $[T^t(\phi)](x,y,z) = \phi(T(x,y,z)) = \phi(3z,x+y) = 3(3z) - 2(x+y) = -2x - 2y + 9z$.

56.18 أوجد $[T^t(\phi)](x,y,z)$ عندما $T(x,y,z) = (x+y+z,2x-y)$.

■ $[T^t(\phi)](x,y,z) = \phi(T(x,y,z)) = \phi(x+y+z,2x-y) = 3(x-y+z) - 2(2x-y) = -x + 5y + 3z$.

57.18 ليكن $T: V \to U$ خطياً، وليكن $T^t: U^* \to V^*$ منقولة. بيِّن أن نواة T^t هي المعدم لصورة T، أي أن $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^0$.

■ لنفترض أن $\phi \in \operatorname{Ker} T^t$، أي أن $T^t(\phi) = \phi \circ T = 0$. وبالتالي، $\phi(u) = \phi(T(v)) = (\phi \circ T)(v) = 0(v) = 0$. لدينا أن $\phi(u) = 0$ من أجل كل $u \cap \operatorname{Im} T$؛ وبالتالي، $\phi \in (\operatorname{Im} T)^0$. وبذلك، $\ker T^t \subset (\operatorname{Im} T)^0$.

لنفترض، من جهة أخرى، أن $\sigma \in (\operatorname{Im} T)^0$؛ أي أن $\sigma(\operatorname{Im} T) = \{0\}$. إذن $[T^t(\sigma)](v) = (\sigma \circ T)(v) = \sigma(T(v)) = 0 = 0(v)$ من أجل كل $v \in V$. لدينا أن $[T^t(\sigma)](v) = 0(v)$، من أجل كل $v \sigma V$؛ وبالتالي، $T^t(\sigma) = 0$. إذن، $\sigma \in \operatorname{Ker} T^t$ وبذلك $(\operatorname{Im} T)^0 \subset \operatorname{Ker} T^t$. الاحتواءان معاً يعطيان المتساوية المطلوبة.

58.18 لنفترض أن لـ V و U بُعْدين منتهيين، ولنفترض أن $T: V \to U$ خطي. أثبت أن $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T^t)$.

■ لنفترض $\dim V = n$ و $\dim U = m$. لنفترض أيضاً أن $\operatorname{rank}(T) = r$. إذن

$$\dim((\operatorname{Im} T)^0) = \dim U - \dim(\operatorname{Im} T) = m - \operatorname{rank}(T) = m - r$$

نعرف، من المسألة السابقة، أن $\operatorname{Ker} T^t = (\operatorname{Im} T)^0$. وبالتالي، فإن $(\text{nullity}/\text{صفرية})(T^t) = m - r$. ينتج، عندئذ وكما هو متوقع، أن $\operatorname{rank}(T^t) = \dim U^* - \operatorname{nullity}(T^t) = m - (m-r) = r = \operatorname{rank}(T)$.

مبرهنة 7.18: ليكن $T: V \to U$ خطياً، ولتكن A التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للقاعدتين $\{v_i\}$ لـ V و $\{u_i\}$ لـ U. إذن، تكون المصفوفة المنقولة A^T التمثيل المصفوفي لـ $T^t: U^* \to V^*$ بالنسبة للقاعدتين الثنويتين لـ $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$.

59.18 أثبت مبرهنة 17.18 والتي تشير إلى سبب التسمية «منقول» المستخدمة من أجل التطبيق T^t.

■ نفترض أن

$$T(v_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n$$
$$T(v_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \qquad (1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T(v_m) = a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n$$

نريد أن نثبت أن

$$T'(\sigma_1) = a_{11}\phi_1 + a_{21}\phi_2 + \cdots + a_{m1}\phi_m$$
$$T'(\sigma_2) = a_{12}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + \cdots + a_{m2}\phi_m \qquad (2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T'(\sigma_n) = a_{1n}\phi_1 + a_{2n}\phi_2 + \cdots + a_{mn}\phi_m$$

حيث $\{\sigma_i\}$ و $\{\phi\}$ القاعدتان الثنويتان لـ $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ على الترتيب.

ليكن $v \in V$، ولنفترض أن $v = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_mv_m$. إذن، ومن (1)، يكون لدينا

$$\begin{aligned} T(v) &= k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \cdots + k_mT(v_m) \\ &= k_1(a_{11}u_1 + \cdots + a_{1n}u_n) + k_2(a_{21}u_1 + \cdots + a_{2n}u_n) + \cdots + k_m(a_{m1}u_1 + \cdots + a_{mn}u_n) \\ &= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_ma_{m1})u_1 + \cdots + (k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_ma_{mn})u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}(k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + \cdots + k_ma_{mi})u_i \end{aligned}$$

بالتالي، ومن أجل $j = 1,\ldots,n$

$$(T'(\sigma_j)(v)) = \sigma_j(T(v)) + \sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n}(k_1a_{1i} + k_2a_i + \cdots + k_ma_{mi})u_i\right) = k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_ma_{mj} \qquad (3)$$

لدينا من جهة أخرى، ومن أجل $j = 1,\ldots,n$

$$\begin{aligned} (a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \cdots + a_{mj}\phi_m)(v) &= (a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \cdots + a_{mj}\phi_m)(k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m) \\ &= k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_ma_{mj} \end{aligned} \qquad (4)$$

بما أن $v \in V$ كان إختيارياً، فإن (3) و (4) يقتضيان أن $T'(\sigma_j) = a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \ldots + a_{mj}\phi_m$، $j = 1,\ldots,n$ وهي (2). وبذلك، يستكمل إثبات المبرهنة.

الفصل 19
الأشكال الخطانية [ثنائية الخطية] والتربيعية والهرميتية

1.19 الأشكال ثنائية الخطية (الخطانية)

1.19 عرّف شكلاً ثنائي ـ الخطية (خطانياً) على فضاء متجهي V فوق حقل K.

■ يعرّف شكل خَطّاني (ثنائي الخطية) A على V بأنّه تطبيق $f:V \times V \to K$ يحقق ما يلي:

(i) $f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v)$.

(ii) $f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2)$.

من أجل كل $a,b \in K$ وكل $a_i,b_i \in V$. نعبّر عن الشرط (i) بالقول أن f خطي في موضعه الأول أو المتغير الأول، وعن الشرط (ii) بالقول أن f خطي في موضعه الثاني أو المتغير الثاني.

2.19 ليكن f الجداء النقطي على $\mathbf{R}^n$؛ أي أن $f(u,v) = u.v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ حيث $u = (a_i)$ و $v = (b_i)$. هل f شكل خطّاني على $\mathbf{R}^n$؟

■ نعم، لأن f خطية في الموضعين معاً.

3.19 ليكن g الجداء النقطي على $\mathbf{C}^n$؛ أي أن $g(u, v) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n$ حيث $u = (z_i)$ و $v = (w_i)$. هل g خطانية على $\mathbf{C}^n$؟

■ إن الجداء النقطي العقدي خطي في موضعه الأول. ومع ذلك، فإن $g(u,kv) = \bar{a}\ g(u,v)$. وبذلك، لا يكون g خطياً في موضعه الثاني، ولا يكون بالتالي شكلاً ثنائي الخطية.

4.19 لتكن A مصفوفة $n\times n$ فوق K. بيّن أن التطبيق $f(X,Y) = X^TAX$ شكل ثنائي الخطية (خطاني).

■ لدينا، من أجل أي $a,b \in K$ وأي $X_i,Y_i \in K^n$، أن $f(aX_1 + bX_2,Y) = (aX_1 + bX_2)^TAY = (aX_1^T + bX_2^T)AY = aX_1^TAY + bX_2^TAY = af(X_1,Y) + bf(X_2,Y)$. وبالتالي، يكون خطياً في المتغير الأول. أيضاً، $f(X,aY_1 + bY_2) = X^TA(aY_1 + bY_2) = aX^TAY_1 + bX^TAY_2 = af(X,Y_1) + bf(X,Y_2)$. وبالتالي، يكون f خطياً في المتغير الثاني، وبذلك يكون f خطانياً على K^n.

5.19 ليكن ϕ و σ أي داليين خطيين على فضاء متجهي V. وليكن $f:V\times V \to K$ معرّفاً بواسطة $f(u,v) = \phi(u)\sigma(v)$. بيّن أن f شكل خطّاني.

■ لدينا، من أجل كل $a,b \in K$ وكل $u_i,v_i \in V$،

$$\begin{aligned} f(au_1 + bu_2, v) &= \phi(au_1 + bu_2)\sigma(v) = [a\phi(u_1) + b\phi(u_2)]\sigma(v) \\ &= a\phi(u_1)\sigma(v) + b\phi(u_2)\sigma(v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v) \end{aligned}$$

وبذلك، يكون f خطياً في موضعه الأول. بالمثل،

$$\begin{aligned} f(u, av_1 + bv_2) &= \phi(u)\sigma(av_1 + bv_2) = \phi(u)[a\sigma(v_1) + b\sigma(v_2)] \\ &= a\phi(u)\sigma(v_1) + b\phi(u)\sigma(v_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2) \end{aligned}$$

وبذلك، يكون f خطياً في موضعه الثاني. ينتج عن ذلك أن f خطّاني.

6.19 عرّف شكلاً حدودياً خطانياً (ثنائي الخطية).

■ نقول عن حدودية $f(x_i,y_i)$، في المتغيرات $x_1,...,x_n$ والمتغيرات $y_1,...,y_n$، أنها حدودية خطّانية إذا

$$f(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$$

ويمكن كتابة الحدودية في الشكل المصفوفي

$$f(x_i, y_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

أو، باختصار، $f(X,Y) = X^TAX$ حيث $X^T = (x_1,\ldots,x_n)$، $Y^T = (y_1,\ldots,y_n)$، و $A = (a_{ij})$. [قارن بالمسألة 4.19 حيث أعطينا المصفوفة A منذ البداية].

7.19 ليكن $u = (x_1,x_2,x_3)$، $v = (y_1,y_2,y_3)$، وليكن $f(u,v) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$. عبِّر عن f في ترميز مصفوفي.

■ لتكن A المصفوفة 3×3 التي مدخلها ij معامل x_iy_j. إذن

$$f(u,v) = X^TAY = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

المسائل 8.19-14.19 تتعلق بدالة $t(u,v)$ حيث $u = (x_1,x_2)$ و $v = (y_1,y_2)$. حدّد، في كل حالة، ما إذا كانت الدالة المعطاة شكلاً خطانياً على R^2، أم لا. إذا كان الجواب نعم، أعد كتابة f في ترميز مصفوفي.

8.19 $f(u,v) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$.

■ نعم، لأن كل حد في الشكل $a_{ij}x_iy_j$. أيضاً

$$f(u,v) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

9.19 $f(u,v) = x_1 + y_2$.

■ لا، لأن الحدود ليست في الشكل $a_{ij}x_iy_j$.

10.19 $f(u,v) = 3x_2y_2$.

■ نعم، $f(u,v) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

11.19 $f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2$.

■ لا، فكل حدّ يجب أن يحتوي على x_i واحدة و y_j واحدة، وليس x_i و x_j.

12.19 $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3$.

■ لا، فإن شكلا خطياً لا يمكن أن يكون له حدّ ثابت غير صفري.

13.19 $f(u,v) = 0$.

■ نعم، $f(u,v) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

14.19 $f(u,v) = 1$.

■ لا، إن دالة سلمية غير صفرية ليست خطّانية.

15.19 ليكن V أي فضاء متجهي فوق K، ولتكن $f: V \times V \to K$ الدالة الصفرية؛ أي أن $f(u,v) = 0$ من أجل كل $u,v \in V$. بيِّن أن f خطّانية.

■ لدينا، من أجل كل $a,b \in K$ وأي $u_i,v_i \in V$،

$$af(u_1,v) + bf(u_2,v) = a.0 + b.0 = 0 = f(au_1 + bu_2,v)$$
$$af(u,v_1) + bf(u,v_2) = a.0 + b.0 = 0 = f(u,av_1 + bv_2)$$

وبذلك، تكون f خطانية.

16.19 ليكن f و g شكلين خطانيين على V. بيّن أن المجموع f + g المعرّف بواسطة $(f + g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$، شكل خطّاني.

■ لدينا، من أجل كل $a,b \in K$ وأي $u_i,v_i \in V$، أن

$$(f + g)(au_1 + bu_2,v) = f(au_1 + bu_2,v) + g(au_1 + bu_2,v) = af(u_1,v) + bf(u_2,v) + ag(u_1,v) + bg(u_2,v)$$
$$= a[f(u_1,v) + g(u_1,v)] + b[f(u_2,v) + g(u_2,v)] = a(f + g)(u_1,v) + b(f + g)(u_2,v)$$

بالمثل، $(f + g)(u,av_1 + bv_2) = a(f + g)(u,v_1) + b(f + g)(u,v_2)$. وبذلك، يكون f + g خطّانياً.

17.19 ليكن f شكلاً خطانياً على V، وليكن $k \in K$. بيّن أن التطبيق kf المعرّف بواسطة $(kf)(u,v) = kf(u,v)$، يكون خطانياً.

■ لدينا، من أجل أي $a,b \in K$ وأي $u_i,v_i \in V$،

$$(kf)(au_1 + bu_2,v) = kf(au_1 + bu_2,v) = k[af(u_1,v) + bf(u_2,v)] = akf(u_1,v) + bkf(u_2,v)$$
$$= a(kf)(u_1,v) + b(kf)(u_2,v)$$

وبذلك، يكون kf خطياً في موضعه الأول. بالمثل،

$$(kf)(u,av_1 + bv_2) = kf(u,av_1 + bv_2) = k[af(u,v_1) + bf(u,v_2)] = akf(u,v_1) + bkf(u,v_2)$$
$$= a(kf)(u,v_1) + b(kf)(u,v_2)$$

وبذلك، يكون kf خطياً في موضعه الثاني. ينتج عن ذلك أن kf خطّاني.

18.19 ليكن B(V) تجميع كل الأشكال الخطانية على V. بيّن أن B(V) فضاء متجهي بالنسبة للعمليتين السابقتين: الجمع f + g والضرب السلّمي kf.

طريقة 1. نبين أن B(V) تحقق كل الموضوعات المعرّفة لفضاء متجهي.

طريقة 2. B(V) مجموعة جزئية في الفضاء المتجهي $\mathcal{F}$ لكل الدوال من V×V إلى K. نعرف، من المسائل 15.19-17.19، أن $0 \in B(V)$ ويكون لدينا، من أجل أي $f,g \in B(V)$ وأي $k \in K$، أن $f + g \in B(V)$ و $kf \in B(V)$. وبذلك، يكون B(V) فضاءً جزئياً في $\mathcal{F}$.

مبرهنة 1.19 ليكن V فضاءً متجهياً بعده n فوق K. ولتكن $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ قاعدة للفضاء الثنوي V^*. إذن، تكون $\{f_{ij}: i,j = 1,...,n\}$ قاعدة لـ B(V) حيث f_{ij} معرّفة بواسطة $f_{ij}(u,v) = \phi_i(u)\phi_j(v)$. وبذلك، وعلى الخصوص، $\dim B(V) = n^2$.

19.19 أثبت مبرهنة 1.19.

■ لتكن $\{e_1,...,e_n\}$ قاعدة V الثنوية لـ $\{\phi_i\}$. نبيّن أولاً أن $\{f_{ij}\}$ تولّد B(V). ليكن $f \in B(V)$، ولنفترض أن $f(e_i,e_j) = a_{ij}$. سوف نبيّن أن $f = \sum a_{ij} f_{ij}$. يكفي أن نبين أن $f(e_s, e_t) = \left(\sum a_{ij} f_{ij}\right)(e_s, e_t)$ من أجل $s,t = 1,...,n$. لدينا

$$\left(\sum a_{ij} f_{ij}\right)(e_s, e_t) = \sum a_{ij} f_{ij}(e_s, e_t) = \sum a_{ij} \phi_i(e_s)\phi_j(e_t) = \sum a_{ij}\delta_{is}\delta_{jt} = a_{st} = f(e_s, e_t)$$

كما هو مطلوب. وبالتالي، $\{f_{ij}\}$ تولّد B(V).

يبقى أن نبيّن أن $\{f_{ij}\}$ مستقلة خطياً. لنفترض أن $\sum a_{ij} f_{ij} = 0$. إذن، من أجل $s,t = 1,...,n$:

$$0 = 0(e_s, e_t) = \left(\sum a_{ij} f_{ij}\right)(e_s, e_t) = a_{rs}$$

الخطوة الأخيرة تتبع كما مبيَّن أعلاه. وبذلك، تكون $\{f_{ij}\}$ مستقلة، وبالتالي قاعدة لـ B(V).

المسائل 20.19-22.19 تتعلق بشكل خطاني f على V فوق K.

20.19 بيِّن أن $f(0,v) = 0$ و $f(v,0) = 0$ من أجل $v \in V$.

■ لدينا $f(0,v) = f(0v,v) = 0f(v,v) = 0$ و $f(v,0) = f(v,0v) = 0f(v,v) = 0$.

21.19 لتكن S مجموعة جزئية في V. نكتب

$$S^{\perp} = \{v \in V: f(w, v) = 0 \quad \text{لأجل كل } w \in S\}$$
$$S^{\top} = \{v \in V: f(v, w) = 0 \quad \text{لأجل كل } w \in S\}$$

بيِّن أن $S^{\perp}$ و S^{T} فضاءان جزئيان لـ V.

■ ليكن $w \in S$. بما أن $f(w,0) = 0$، يكون لدينا $0 \in S^{\perp}$. لنفترض أن $u,v \in S^{\perp}$ و $k \in K$. إذن $f(w,u) = 0$ و $f(w,v) = 0$. وبذلك

$$f(w,u + v) = f(w,u) + f(w,v) = 0 + 0 = 0$$
$$f(w,ku) = kf(w,u) = k.0 = 0$$

إذن، $u + v$، $ku \in S^{\perp}$. لذلك، تكون $S^{\perp}$ فضاء جزئياً في V. بالمثل، تكون S^{T} فضاء جزئياً في V.

22.19 لنفترض أن $S_1 \subseteq S_2$. بيِّن أن $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$ و $S_2^{T} \subseteq S_1^{T}$.

■ ليكن $v \cap S_2^{\perp}$. إذن لدينا $f(w,v) = 0$، من أجل كل $w \cap S_2$. بما أن $S_1 \subseteq S_2$ من أجل كل $w \cap S_1$، يكون لدينا $f(w,v) = 0$. وبذلك، $v \in S_1^{\perp}$؛ وبالتالي، $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$. بالمثل، $S_2^{T} \subseteq S_1^{T}$.

2.19 الأشكال الخطانية والمصفوفات

23.19 ليكن f شكلاً خطانياً على V، ولتكن $S = \{e_1,...,e_n\}$ قاعدة لـ V. عرّف التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للقاعدة S.

■ لتكن A المصفوفة التي مدخلها ij يكون $f(e_i,e_j)$، أي أن

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

إذن، تسمى A التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للقاعدة S أو، ببساطة، مصفوفة f في القاعدة S.

24.19 بيِّن أن المصفوفة A أعلاه تمثل f بالطريقة التالية: إذا $u,v \in V$، إذن $f(u,v) = [u]^T A[v]$. (حيث $[u]$ يرمز للمتجه الإحداثي (العمودي) لـ u في القاعدة المعطاة S.)

■ لنفترض أن $u = a_1e_1 +...+ a_ne_n$، $v = b_1e_1 +...+ b_ne_n$. إذن

$$f(u, v) = f(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n) = a_1b_1f(e_1, e_1) + a_1b_2f(e_1, e_2) + \cdots + a_nb_nf(e_n, e_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_jf(e_i, e_j) = (a_1, \ldots, a_n)A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = [u]^TA[v]$$

وهو المطلوب.

25.19 عرّف المصفوفات المتطابقة.

■ نقول عن مصفوفة B أنها متطابقة مع مصفوفة A إذا كانت توجد مصفوفة عكوسة [أو غير شاذة] بحيث أن $B = P^TAP$.

26.19 هل يكون للمصفوفات المتطابقة نفس الرتبة؟

■ إن ضرب مصفوفة A في مصفوفة غير شاذة لا يغير رتبتها. إذا كانت P غير شاذة، فإن P^T تكون غير شاذة أيضاً، وتكون $\text{rank}(A) = \text{rank}(P^TAP) = \text{rank}(B)$. وبذلك، يكون للمصفوفات المتطابقة نفس الرتبة.

مبرهنة 2.19: لتكن P مصفوفة الانتقال من قاعدة إلى أخرى في V ولتكن A مصفوفة شكل خطاني f في القاعدة الأصلية. إذن، تكون $B = P^TAP$ مصفوفة f في القاعدة الجديدة.

27.19 أثبت مبرهنة 2.19.

■ لتكن S القاعدة الأصلية و S′ القاعدة الجديدة. إذن، ومن أجل أي $u,v \in V$، يكون لدينا $P[u]_{S'} = [u]_S$ و $P[v]_{S'} = [v]_S$؛ وبالتالي، $[u]_S^T = [u]_{S'}^T P^T$. وبذلك، $f(u, v) = [u]_S^T A[v]_S = [u]_{S'}^T P^T AP[v]_{S'}$. بما أن u و v عنصران إختياريان في V، فإن P^TAP تكون مصفوفة f في القاعدة الجديدة S′.

ملاحظة: تشير المبرهنة السابقة إلى فرق رئيس بين الأشكال الخطانية والمؤثرات الخطية، واللذين يمكن تمثيلهما كليهما بمصفوفات مربعة. تحديداً، إذا كانت B و A تمثلان نفس المؤثر الخطي، فإن B تكون مشابهة لـ A، أي أن $B = P^{-1}AP$ حيث P مصفوفة تغيير القاعدة؛ ولكن إذا كانت B و A تمثلان نفس الشكل الخطاني، فإن B تكون متطابقة مع A، أي أن $B = P^TAP$، حيث P مصفوفة تغيير القاعدة.

28.19 عرّف رتبة شكل خطّاني.

■ تُعرّف رتبة شكل خطاني f على V، وتكتب $\text{rank}(f)$، بأنها أي تمثيل مصفوفي. [نعْرِف، من المسألة 26.19، أن الرتبة لا تعتمد على تمثيل مصفوفي بعينه].

29.19 ما المقصود من الشكل الخطاني المنحلّ؟

■ الشكل الخطاني f على V يكون منحلاً أو لا منحل عندما $\text{rank}(f) < \dim V$ أو $\text{rank}(f) = \dim V$

المسائل 30.19-33.19 تتعلق بشكل خطّاني f على $\mathbf{R}^2$ معرّف بواسطة $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

30.19 أوجد المصفوفة A لـ f في القاعدة $S = \{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$.

■ نضع $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = f(u_i,u_j)$:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= f(u_1, u_1) = f((1,0),(1,0)) = 2 - 0 + 0 = 2 \\
a_{12} &= f(u_1, u_2) = f((1,0),(1,1)) = 2 - 3 + 0 = -1 \\
a_{21} &= f(u_2, u_1) = f((1,1),(1,0)) = 2 - 0 + 0 = 2 \\
a_{22} &= f(u_2, u_2) = f((1,1),(1,1)) = 2 - 3 + 1 = 0
\end{aligned}$$

وبذلك، تكون $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة f في القاعدة $\{u_1,u_2\}$.

31.19 أوجد المصفوفة B لـ f في القاعدة $S' = \{v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)\}$.

■ نضع $B = (b_{ij})$ حيث $b_{ij} = f(v_i,v_j)$:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= f(v_1, v_1) = f((2,1),(2,1)) &= 8 - 6 + 1 = 3 \\
b_{12} &= f(v_1, v_2) = f((2,1),(1,-1)) &= 4 + 6 - 1 = 9 \\
b_{21} &= f(v_2, v_1) = f((1,-1),(2,1)) &= 4 - 3 - 1 = 0 \\
b_{22} &= f(v_2, v_2) = f((1,-1),(1,-1)) &= 2 + 3 + 1 = 6
\end{aligned}$$

وبذلك تكون $B=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ مصفوفة f في القاعدة $\{v_1,v_2\}$.

32.19 أوجد مصفوفة تغيير القاعدة P من القاعدة S إلى القاعدة S′.

■ نكتب v_1 بدلالة u_1 و u_2: $(2,1)=x(1,0)+y(1,1)$؛ أو $x+y=2$، $y=1$؛ أو $x=1$، $y=1$. وبالتالي، $v_1=u_1+u_2$. ثم نكتب v_2 بدلالة u_1 و u_2: $(1,-1)=x(1,0)+y(1,1)$ أو $x+y=1$، $y=-1$؛ أو $x=2$، $y=-1$. وبالتالي، $v_2=2u_1-u_2$. أخيراً، نكتب إحداثيات v_1 و v_2 كعمودين، فنحصل على

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

33.19 حقق مبرهنة 2.19 بأن $B=P^TAP$.

■ لدينا $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$، وبذلك $P^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. إذن

$$P^TAP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{pmatrix}=B$$

34.19 ليكن [f] التمثيل المصفوفي لشكل خطّاني (ثنائي الخطية) f على V بالنسبة لقاعدة $\{e_1,\ldots,e_n\}$ في V. بيِّن أن التطبيق $f\mapsto[f]$ تشاكل تقابلي لـ B(V) فوق الفضاء المتجهي للمصفوفات المربعة n-

■ بما أن f يتحدد تماماً بواسطة السلّميات $f(e_i,e_j)$، فإن التطبيق $f\mapsto[f]$ يكون واحداً ـ لواحد وفوقياً. يكفي تبيان أن التطبيق $f\mapsto[f]$ تشاكلٌ، أي أن

$$[af+bg]=a[f]+b[g] \qquad (1)$$

ولكن $(af+bg)(e_i,e_j)=af(e_i,e_j)+bg(e_i,e_j)$ من أجل $i,j=1,\ldots,n$؛ وهي إعادة صياغة لـ (1). وبذلك يستكمل الإثبات.

المسائل 38.19-35.19 تتعلق بالشكل الخطاني f المعرّف على $\mathbf{R}^2$ بواسطة: $f(u,v)=3x_1y_1-2x_1y_2+4x_2y_1-x_2y_2$، حيث $u=(x_1,x_2)$ و $v=(y_1,y_2)$.

35.19 عبِّر عن f في ترميز مصفوفي.

■ لتكن A المصفوفة 2×2 التي مدخلها ij معامل x_iy_j. إذن

$$f(u,v)=X^TAY=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

36.19 أوجد التمثيل المصفوفي لـ f في القاعدة المعتادة $E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ لـ $\mathbf{R}^2$.

■ هنا، $f(e_1,e_1)=3$، $f(e_1,e_2)=-2$، $f(e_2,e_1)=4$، $f(e_2,e_3)=-1$. بتعبير آخر، $f(e_i,e_j)$ يكون معاملاً لـ x_iy_j. وبذلك، نتحصل على المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ كمصفوفة f في القاعدة المعتادة E.

37.19 أوجد المصفوفة B التي تمثل f في القاعدة $S=\{u_1=(1,1),u_2=(1,2)\}$.

■ **طريقة 1.** نضع $B=(b_{ij})$ حيث $b_{ij}=f(u_i,u_j)$:

$$b_{11}=f(u_1,u_1)=4 \qquad b_{12}=f(u_1,u_2)=1$$
$$b_{21}=f(u_2,u_1)=7 \qquad b_{22}=f(u_2,u_2)=3$$

إذن $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

طريقة 2. [نستخدم مبرهنة 2.19]. لتكن P المصفوفة التي عموديها متجهي القاعدة S: أي $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. إذن

$$B=P^TAP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

[هنا، P هي مصفوفة تغيير القاعدة من القاعدة E إلى القاعدة S.]

38.19 أوجد المصفوفة C التي تمثل f في القاعدة $S' = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (3,1)\}$.

■ لتكن Q المصفوفة التي عموديها متجهي القاعدة S': $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. إذن،

$$C = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 32 \end{pmatrix}$$

المسألتان 40.19-39.19 تتعلقان بالشكل الخطاني f المعرّف على $\mathbf{R}^3$ بواسطة المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

أي حيث $f(u,v) = u^T A v$.

39.19 أوجد التمثيل المصفوفي لـ f في القاعدة المعتادة $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ في $\mathbf{R}^3$.

■ بما أن $f(e_i,e_j) = e_i^T A e_j$ هو المدخل ij لـ A، فإن المصفوفة المعطاة A تكون التمثيل المصفوفي لـ f بالنسبة للقاعدة المعتادة في $\mathbf{R}^3$.

40.19 أوجد المصفوفة B التي تمثل f في القاعدة $S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (2,-1,0)\}$.

■ لتكن P المصفوفة التي أعمدتها متجهات القاعدة في S؛ أي

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن

$$B = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 8 \\ 10 & 3 & -3 \\ 9 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$

[هنا، P هي مصفوفة تغيير القاعدة من القاعدة المعتادة E في $\mathbf{R}^3$ إلى القاعدة المعطاة S.]

المسائل 43.19-41.19 تبين أن تطابق المصفوفات علاقة تكافؤ.

41.19 بيِّن أن كل مصفوفة A متطابقة مع نفسها.

■ المصفوفة المتطابقة I غير شاذة و $I^T = I$. بما أن $A = I^T A I$، فيكون لدينا أن A متطابقة مع نفسها.

42.19 بيِّن أنه إذا كانت A متطابقة مع B، فإن B تكون متطابقة مع A.

■ بما أن A متطابقة مع B، فإنَّه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن $A = P^T B P$. باستخدام $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$، يكون لدينا $B = (P^T)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^T A P^{-1}$ حيث P^{-1} غير شاذة. وبذلك تكون B متطابقة مع A.

43.19 بيِّن أنه إذا كانت A متطابقة مع B، و B متطابقة مع C، فإن A تكون متطابقة مع C.

■ لدينا $A = P^T A P$ و $B = Q^T C Q$ حيث P و Q غير شاذتين باستخدام $(QP)^T = P^T Q^T$، يكون لدينا $A = P^T B P = P^T(Q^T C Q)P = (QP)^T C(QP)$ حيث QP غير شاذة. وبذلك، تكون A متطابقة مع C.

3.19 الأشكال الخطانية (ثنائية الخطية) المتناوبة

44.19 عرِّف شكلاً ثنائي ـ الخطية (خطانياً) متناوباً.

■ إن شكلاً خطانياً f على V يكون «متناوباً» إذا تحقق الشرط التالي:

[ش ح م /ABF]: $f(v,v) = 0$ من أجل كل $v \in V$

45.19 عرّف شكلاً خطانياً متخالف ـ التناظر.

■ يكون الشكل الخطاني f على V متخالف ـ التناظر (أو متناظر ـ تخالفياً) إذا تحقق الشرط التالي:

[س خ م ت]: $f(u,v) = -f(v,u)$ من أجل كل $u,v \in V$

46.19 بيّن أن شكلاً خطانياً متناوباً f يكون متخالف ـ التناظر.

■ بما أن f متناوب، يكون لدينا $0 = f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$. باستخدام $f(u,u) = 0$ و $f(v,v) = 0$، نحصل على $0 = f(u,v) + f(v,u)$. إذن، $f(u,v) = -f(v,u)$ وهو المطلوب.

47.19 لنفترض أن f شكل خطاني متناظر ـ تخالفياً. هل f متناوب؟

■ إذا $1+1 \neq 0$ في K، فإن الشرط [ABF] يقتضي $f(v,v) = -f(v,v)$ والذي يقتضي الشرط [SSBF]. ولكن، إذا $1+1 = 0$ في K. فإن الشرطين غير متكافئين.

ملاحظة: يلعب الشرط $1+1 \neq 0$ في K دوراً مهما في نظرية الأشكال الخطانية والتربيعية. وسيكون هذا الشرط جزءاً من فرضياتنا في العديد من نتائج هذا الفصل. طبعاً، يتحقق هذا الشرط عندما يكون K الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$ أو الحقل العقدي $\mathbf{C}$.

مبرهنة 3.19 إذا كان f شكلان خطانياً متناوباً على V. إذن، توجد قاعدة لـ V، يكون f من أجلها ممثلاً بمصفوفة في الشكل:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

كما أن عدد الـ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ يتحدد بشكل وحيد بواسطة f [لأنه يساوي $1/2\text{rank}(f)$].

48.19 أثبت مبرهنة 3.19 والتي هي المبرهنة الأساسية لبنية الأشكال الخطانية المتناوبة.

■ إذا $f = 0$، فإن المبرهنة صحيحة. أيضاً، إذا $\dim V = 1$ فإن $f(k_1u,k_2u) = k_1k_2f(u,u) = 0$، وبذلك $f = 0$. ينتج عن ذلك، أنه يمكننا إفتراض $\dim V > 1$ و $f \neq 0$.

بما أن $f \neq 0$، فإنه يوجد $u_1,u_2 \in V$ (غير صفريين) بحيث أن $f(u_1,u_2) \neq 0$. ويمكننا، في الحقيقة، وبضرب u_1 في عامل مناسب، يمكننا إفتراض أن $f(u_1,u_2) = 1$ وبذلك $f(u_2,u_1) = -1$. الآن، u_1 و u_2 مستقلان خطياً، لأنه إذا $u_2 = ku_1$ مثلاً، فإن $f(u_1,u_2) = f(u_1,ku_1) = kf(u_1,u_1) = 0$. ليكن U الفضاء الجزئي المولد بواسطة u_1 و u_2، أي أن $U = \text{span}(u_1,u_2)$. لاحظ أن:

(i) التمثيل المصفوفي لتقييد f على U في القاعدة $\{u_1,u_2\}$ يكون $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) إذا $u \in U$، أي $u = au_1 + bu_2$، إذن

$$f(u,u_1) = f(au_1 + bu_2,u_1) = -b$$
$$f(u,u_2) = f(au_1 + bu_2,u_2) = a$$

ليكن W مكوناً من هذه المتجهات $w \in V$ التي تحقق $f(w,u_1) = 0$ و $f(w,u_2) = 0$؛ أو، بشكل بديل،

من أجل أي $u \in U$ $\{W = \{w \in V : f(w,u) = 0$. سوف نبين أن $V = U \oplus W$. من الواضح أن $U \cap W = \{0\}$، وبذلك يبقى أن نبين أن $V = U + W$. ليكن $v \in V$. نضع

$$w = v - u \quad \text{و} \quad u = f(v,u_2)u_1 - f(v,u_1)u_2 \qquad (1)$$

بما أن u تركيبة خطية في u_1 و u_2، إذن $u \in U$. نبيّن أن $w \in W$. لدينا، من (1) و (ii)، $f(u,u_1) = f(v,u_1)$؛ وبالتالي، $f(w,u_1) = f(v - u,u_1) = f(v,u_1) - f(u,u_1) = 0$. بالمثل، $f(u,u_2) = f(v,u_2)$، إذن $f(w,u_2) = f(v - u,u_2) = f(v,u_2) - f(u,u_2) = 0$. إذن، $w \in W$ وبذلك وبسبب (1) يكون $v = u + w$ حيث $u \in U$ و $w \in W$. يبين هذا أن $V = U + W$، وبذلك، $V = U \oplus W$.

الآن، تقييد f على W يكون شكلاً خطانياً على W. يوجد، بالاستقراء، قاعدة $u_3,\dots,u_n$ لـ W يكون فيها التمثيل المصفوفي لـ f مقيداً على W في الشكل المطلوب. وبذلك، تكون $u_1,u_2,u_3,\dots,u_n$ قاعدة لـ V يكون فيها للتمثيل المصفوفي لـ f الشكل المطلوب.

49.19 لنفترض أن f شكل خطاني متناوب على V. بيّن أن رتبة f زوجية.

■ يمكن، هنا، تمثيل f بواسطة مصفوفة في الشكل الذي بمبرهنة 3.19. ولكن، كل واحد من القوالب (المصفوفات الجزئية) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ تكون رتبته 2. وبذلك، وإذا كان يوجد عدد m من هذه القوالب، فإن $\text{rank}(f) = 2m$. إذن، تكون رتبة f زوجية.

4.19 أشكال خطانية متناظرة

50.19 عرّف شكلاً خطانياً متناظراً.

■ نقول عن شكل خطاني f على V أنه متناظر إذا تحقق الشرط التالي:

[أ خ م/SBF]: $f(u,v) = f(v,u)$، من أجل كل $u,v \in V$

51.19 بيّن أن شكلاً خطانياً f يكون متناظراً إذا وفقط إذا كانت أي مصفوفة A، ممثلة لـ f، متناظرة.

■ لنفترض أن f متناظرة، وأن A تمثل f. إذن، $f(X,Y) = X^TAY = (X^TAY)^T = Y^TA^TX$ [نستخدم حقيقة أن X^TAT عدد سلمي، وبذلك يساوي منقوله]. بما أن f متناظرة، إذن، $f(X,Y) = f(Y,X)$، وبالتالي $Y^TAX = f(Y,X) = f(X,Y) = Y^TA^TX$. بما أن هذا الشرط صحيح من أجل كل المتجهات X و Y، فإنه ينتج أن $A = A^T$، وتكون A متناظرة.

وبالعكس، لنفترض أن A متناظرة. إذن، $f(X,Y) = X^TAY = (X^TAY)^T = Y^TA^TX = Y^TAX = f(Y,X)$، وبالتالي تكون f متناظرة.

المبرهنة 4.19، والتي سوف تبرهن في المسألة 57.19، هي المبرهنة الأساسية لبنية الأشكال الخطية المتناظرة:

مبرهنة 4.19 ليكن f شكلاً خطانياً متناظراً على V فوق K [بحيث $1 + 1 \neq 0$]. إذن، V لها قاعدة $(v_1,\dots,v_n)$ بحيث أن f تُمثَّل بواسطة مصفوفة قطرية؛ أي $f(v_i,v_j) = 0$ لاجل $i \neq j$.

النظرية 5.19: [شكل بديل للنظرية 4.19]: نفترض أن A مصفوفة متناظرة فوق K [بحيث $1+1 \neq 0$]. إذن نوجد مصفوفة عكوسة [أو غير شاذة] بحيث أن P^TAP قطرية، أي أن A منطابقة مع مصفوفة قطرية.

52.19 لنفترض أن $1 + 1 \neq 0$ في K. أعط خوارزمية صورية لتقطير [تحت التطابق] مصفوفة متناظرة $A = (a_{ij})$ فوق K.

■ خوارزمية التقطير

حالة I: $a_{11} \neq 0$. نطبق العمليات الصفية $R_i \to -a_{i1}R_1 + a_{11}R_i$، $i = 2,\dots,n$، تم العمليات المقابلة على الأعمدة $C_i \to -a_{i1}C_1 + a_{11}C_i$ لاختزال A إلى الشكل $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

حالة II: $a_{11} = 0$ ولكن $a_{ii} \neq 0$ من أجل بعض $i > 1$. نطبق العملية الصيفية $R_1 \leftrightarrow R_i$ ثم العملية العمودية المقابلة $C_1 \leftrightarrow C_i$ لوضع a_{ii} في الموضع القطري الأول وهذا يرجع المصفوفة إلى الحالة I.

حالة III: إذا كل المداخل القطرية $a_{ii} = 0$. نختار i و j بحيث أن $a_{ij} \neq 0$، ونطبق العملية الصيفية $R_i \to R_j + R_i$ والعملية العمودية المقابلة $C_i \to C_j + C_i$ لوضع $2a_{ij} \neq 0$ في الموضع i على القطر. وبذلك نرجع هذه الحالة إلى الحالة II.

يمكننا في كل حالة إختزال A إلى الشكل $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ حيث B مصفوفة متناظرة من مرتبة أقل من مرتبة A.

ملاحظة: استخدم الفرض $1+1\neq0$، في K، في الحالة III حيث ذكرنا أن $2a_{ij}\neq0$.

كرر الخطوات السابقة مع كل مصفوفة جزئية جديدة، حتى يتم تقطير A.

53.19 عدِّل الخوارزمية، في المسألة 52.19، بحيث تمكننا من إيجاد المصفوفة P، بحيث تكون P^TAP قطرية.

■ نكون أولاً المصفوفة $M = (A,I)$. ثم نطبق عمليات الصفوف والأعمدة على M بدلاً من A وحدها. [لاحظ أن عمليات الصفوف سوف تغير نصفي M، ولكن عمليات الأعمدة تغير النصف الأيسر فقط]. إن الخوارزمية ستحول في النهاية M إلى الشكل $M' = (D,Q)$ حيث D قطرية. إذن، $P = Q^T$ و $P^TAP = 0$.

54.19 لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ مصفوفة متناظرة. أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن P^TAP تكون قطرية، وأوجد P^TAP.

■ نكوّن أولاً المصفوفة المركبة (A,I):

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق العمليتين $R_2 \to -2R_1 + R_2$ و $R_3 \to 3R_1 + R_3$ على (A,I) ثم نطبق العمليتين المقابلتين $C_2 \to -2C_1 + C_2$ و $C_3 \to 3C_1 + C_3$، لـ A، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق بعد ذلك العملية $R_3 \to -2R_2 + R_3$، ثم العملية المقابلة $C_3 \to -2C_2 + C_3$ فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

الآن، تم تقطير A. نضع

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ثم} \quad P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

55.19 لتكن $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & b \end{pmatrix}$، مصفوفة متناظرة . أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن P^TAP قطرية ، وأوجد المصفوفة القطرية P^TAP.

■ نكون أولاً المصفوفة المركبة (B,I):

$$(B, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ونطبق العمليتين الصفيتين $R_2 \to 3R_1 + R_2$ و $R_3 \to -2R_3$ على (B,I) ثم نطبق العمليتين العموديتين المقابلتين $C_2 \to 3C_1 + C_2$ و $C_3 \to -2C_1 + C_3$ ، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق بعد ذلك العملية الصفية $R_3 \to R_2 + 2R_3$ ، ثم العملية العمودية المقابلة $C_3 \to C_2 + 2C_3$ ، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

الآن، تم تقطير B، نضع $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ؛ إذن، $P^TBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

56.19 لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$، مصفوفة متناظرة . أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^TAP قطرية ، وأوجد المصفوفة القطرية P^TAP.

■ نكوّن أولاً المصفوفة (A,I):

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

لكي ننقل المدخل القطري غير الصفري (-1) إلى الموضع القطري الأول، نطبق العملية الصفية $R_1 \leftrightarrow R_3$ ، ثم العملية العمودية المقابلة $C_1 \leftrightarrow C_3$ ، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نطبق عمليتي الصفوف $R_2 \to 2R_1 + R_2$ و $R_3 \to R_1 + R_3$ ، ثم عمليتي الأعمدة المقابلتين $C_2 \to 2C_1 + C_2$ و $C_3 \to C_1 + C_3$ فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ونطبق العملية الصفية $R_3 \to -3R_2 + 2R_3$ ، ثم العملية العمودية المقابلة $C_3 \to -3C_2 + 2C_3$ ، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

الآن، تم تقطير A. نضع $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. إذن، $P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

57.19 أثبت مبرهنة 4.19.

■ **طريقة 1.** إذا $f = 0$ أو إذا $\dim V = 1$، فمن الواضح تحقق المبرهنة. بالتالي، يمكننا إفتراض أن $f \neq 0$ و $\dim V = n > 1$. إذا $q(v) = f(v,v) = 0$ من أجل كل $v \in V$، فإن الشكل القطبي لـ f (أنظر المسألة 64.19) يقتضي

أن $f = 0$. وبالتالي، يمكننا إفتراض وجود متجه $v_1 \in V$ بحيث أن $f(v_1,v_1) \neq 0$. ليكن U الفضاء الجزئي المولّد بواسطة v_1، وليكن W يتكون من تلك المتجهات $v \in V$ التي من أجلها $f(v_1,v) = 0$. سوف نبين أن $V = U \oplus W$.

(i) إثبات أن $U \cap W = \{0\}$: لنفترض $u \in U \cap W$. بما أن $u \in U$، إذن $u = kv_1$ من أجل بعض $k \in K$. بما أن $u \in W$، إذن $0 = f(u,u) = f(kv_1,kv_1) = k^2 f(v_1,v_1)$. ولكن $f(v_1,v_1) \neq 0$؛ وبالتالي $k = 0$ وبذلك $u = kv_1 = 0$. إذن، $U \cap W = \{0\}$.

(ii) إثبات أن $V = U + W$: ليكن $v \in V$. نضع

$$w = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \qquad (1)$$

إذن

$$f(v_1, w) = f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) = 0$$

وبذلك $w \in W$. من (1)، يكون v مجموع عنصر في U وعنصر في W. وبذلك، $V = U + W$. ينتج عن ذلك، وبواسطة (i) و (ii)، أن $V = U \oplus W$.

الآن، f مقيداً لـ W يكون شكلاً خطّانياً متناظراً على W. ولكن $\dim W = n - 1$؛ وبالتالي يوجد، بالاستقراء، قاعدة $\{v_2,\ldots,v_n\}$ لـ W بحيث أن $f(v_i,v_j) = 0$ من أجل $i \neq j$ و $2 \leqslant i$، $j \leqslant n$. ولكن، وبتعريفنا لـ W، يكون $f(v_1,v_j) = 0$ من أجل $j = 2,\ldots,n$. إذن، يكون للقاعدة $\{v_1,\ldots,v_n\}$ من أجل V الخاصية المطلوبة وهي $f(v_i,v_j) = 0$ من أجل $i \neq j$.

طريقة 2. تبين خوارزمية التقطير، في المسألة 52.19، أن كل مصفوفة متناظرة فوق K تكون متطابقة مع مصفوفة قطرية. وهذا يكافىء القضية بأن f له تمثيل مصفوفي قطري.

58.19 بيِّن أن أي شكل خطي f على V يكون مجموعاً لشكل خطاني متناظر وشكل متناظر متخالف ـ التناظر.

■ نضع $g(u,v) = 1/2\,[f(u,v) + f(v,u)]$. إذن، يكون g متناظراً لأن $g(u,v) = 1/2\,[f(u,v) + f(v,u)]1/2\,[f(v,u) + f(u,v)] = g(v,u)$، ويكون h متخالف ـ التناظر لأن $h(u,v) = 1/2\,[f(u,v) - f(v,u)] = -1/2\,[f(v,u) - f(u,v)] = -h(v,u)$. أكثر من ذلك $f = g + h$.

5.19 الأشكال التربيعية

59.19 عرِّف شكلاً تربيعياً.

■ نقول عن تطبيق $q = V \to K$ أنه شكل تربيعي إذا $q(v) = f(v,v)$ من أجل شكل خطاني f على V. وبشكل بديل، يكون الشكل التربيعي حدودية $q(X) = X^T AX$ حيث $X^T = (x_1,\ldots,x_n)$، و A مصفوفة متناظرة. بذلك

$$q(X) = (x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

[لاحظ أن $q(X)$ حدودية يكون لكل حدّ فيها الدرجة 2].

ملاحظة: لاحظ أنه إذا كانت المصفوفة A السابقة قطرية، فإن الشكل القطري المقابل q يكون له التمثيل القطري $q(X) = X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$، أي أن الحدودية التربيعية الممثلة لـ q لا تحتوي حدوداً «لجداءات تقاطعية». نعرف، من مبرهنة 4.19، أن كل شكل تربيعي يكون له مثل هذا التمثيل [عندما $1 + 1 \neq 0$].

60.19 أوجد الشكل التربيعي $q(x,g)$ المقابل للمصفوفة المتناظرة $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

■
$$q(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (5x - 3y, -3x + 8y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= 5x^2 - 3xy - 3xy + 8y^2 = 5x^2 - 6xy + 8y^2$$

المسائل 61.19-63.19 تتعلق بالمصفوفات المتناظرة التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -5 & -6 & -7 \\ 1 & -7 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -4 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

61.19 أوجد الشكل التربيعي $q(x_1,x_2,x_3)$ المقابلة للمصفوفة المتناظرة A.

■ إن معامل x_i^2 هو a_{ii} ومعامل x_ix_j هو $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$. وبذلك، $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 8x_1x_3 + 10x_2x_3 - 7x_3^2$.

62.19 أوجد الشكل التربيعي $q(x,y,z)$ المقابلة للمصفوفة القطرية B.

■ هنا، $q(x,y,z) = 3x^2 - 4y^2 + 6z^2$. [لا توجد حدود جداءات تقاطعية].

63.19 أوجد الشكل التربيعي $q(x,y,z)$ المقابل للمصفوفة المتناظرة C.

■ $q(x,y,z) = 2x^2 - 10xy - 6y^2 + 2xz - 14yz + 9z^2$. [نفترض، كما المعتاد، أن x، y، z المتغيرات الأول والثاني والثالث، على الترتيب].

64.19 ليكن q الشكل التربيعي المقرن بالشكل الخطاني المتناظر f. بيِّن أن f يمكن الحصول عليها من q بواسطة الشكل القطبي لـ f: $f(u,v) = 1/2\,(q(u+v) - q(u) - q(v))$. [نفترض أن $1 + 1 \neq 0$ في K].

■
$$q(u + v) - q(u) - q(v) = f(u + v, u + v) - f(u,u) - f(v,v)$$
$$= f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) - f(u,u) - f(v,v) = 2f(u,v)$$

إذا $1 + 1 \neq 0$، يمكننا القسمة على 2 للحصول على المتطابقة المطلوبة.

65.19 أوجد المصفوفة المتناظرة A التي تقابل الشكل التربيعي: $q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$.

■ يكون في المصفوفة المتناظرة $A = (a_{ij})$، الممثلة لـ $q(x_1,\dots,x_n)$، المدخل القطر a_{ii} مساوٍ لمعامل x_i^2، والمعاملان a_{ij} و a_{ji} مساويين لنصف معامل x_ix_j. وبذلك

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

66.19 أوجد المصفوفة المتناظرة B التي تقابل $q(x,y) = 4x^2 + 5xy - 7y^2$.

■ هنا: $B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -7 \end{pmatrix}$ [إن القسمة على 2 يمكن أن تدخل كسوراً حتى ولو كانت معاملات q أعداداً صحيحة].

67.19 أوجد المصفوفة المتناظرة C التي تقابل $q(x,y,z) = 4xy + 5y^2$.

■ رغم أن x و y وحدهما يظهران في الحدودية، إلاّ أن التعبير $q(x,y,z)$ يشير إلى وجود ثلاثة متغيرات. بتعبير آخر، $q(x,y,z) = 0x^2 + 4xy + 5y^2 + 0xz + 0yz + 0z^2$. وبذلك

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

68.19 أوجد المصفوفة المتناظرة D التي تقابل $q(x,y,z) = x^2 - 2yz + xz$.

■ هنا، $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

المسائل 72.19-69.19 تتعلق بالشكل التربيعي $q(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ والتعويض الخطي $x = s - 3t$، $y = 2s + t$:

69.19 أوجد $q(s,t)$.

■ نعوض من أجل x و y في q، فنحصل على

$$q(s,t) = 3(s - 3t)^2 + 2(s - 3t)(2s + t) - (2s + t)^2$$
$$= 3(s^2 - 6st + 9t^2) + 2(2s^2 - 5st - 3t^2) - (s^2 + 4st + t^2) = 3s^2 - 32st + 20t^2$$

70.19 أوجد المصفوفة A التي تقابل الشكل التربيعي $q(x,y)$، وأعد كتابة الشكل التربيعي في ترميز مصفوفي.

■ لدينا $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $q(X) = X^TAX$، حيث $X = (x,y)^T$.

71.19 أوجد المصفوفة P التي تقابل التعويض الخطي، وأعد كتابة التعويض الخطي باستخدام الترميز المصفوفي.

■ لدينا $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$. وبذلك، $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ و $X = PY$، حيث $X = (x,y)^T$ و $Y = (s,t)^T$.

72.19 أوجد $q(s,t)$ باستخدام الترميز المصفوفي أعلاه.

■ لدينا، $q(X) = X^TAX$ و $X = PY$، وبذلك، $X^T = Y^TP^T$، إذن

$$q(s,t) = q(Y) = Y^TP^TAPY = (s,t)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$
$$= (s,t)\begin{pmatrix} 3 & -16 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 3s^2 - 32st + 20t^2$$

73.19 ليكن L التعويض الخطي $X = PY$ كما هو مبيّن أعلاه. متى يكون L غير شاذ؟ متعامداً؟

■ نقول أن L غير شاذ أو متعامدٌ وفقاً لكون المصفوفة P، الممثلة للتعويض، غير شاذة أو متعامدة.

74.19 هل التعويض الخطي في المسائل 72.19-69.19 غير شاذ؟

■ نعم؛ لأن المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، المقابلة للتعويض، غير شاذة.

75.19 ليكن الشكل التربيعي $q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 6xz + 10yz + 7z^2$. أوجد تعويضاً خطياً يعبر عن المتغيرات x، y، z بدلالة المتغيرات r، s، t بحيث يكون $q(r,s,t)$ قطرياً.

■ نوجد أولاً المصفوفة A المقابلة للشكل التربيعي. هنا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

ثم نوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون P^TAP قطرية نكوّن المصفوفة المركبة (A,I):

$$(A,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق العمليتين الصفيتين $R_2 \to -2R_1 + R_2$ و $R_3 \to 3R_1 + R_3$ على (A,I)، ثم العمليتين العموديتين المقابلتين $C_2 \to -2C_1 + C_2$ و $C_3 \to 3C_1 + C_3$ على A، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق بعد ذلك العملية الصفية $R_3 \to 11R_2 + R_3$ ، ثم العملية العمودية المقابلة لها $C_3 \to 11C_2 + C_3$ ، فنحصل في النهاية على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 119 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

وبذلك

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -19 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 119 \end{pmatrix}$$

إذن، يعطينا التعويض الخطي $x = r - 2s - 19t$، $y = s + 11t$، $z = t$ الشكل التربيعي $q(r,s,t) = r^2 - s^2 + 119t^2$.

76.19 ليكن $q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 12yz + 9z^2$. أوجد تعويضاً خطياً غير شاذ يعبِّر عن المتغيرات x، y، z بدلالة المتغيرات r، s، t لكن يكون q(r,s,t) قطرياً.

■ نكوِّن المصفوفة المركبة (A,I) حيث A المصفوفة التي تقابل الشكل التربيعي:

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق $R_2 \to -2R_1 + R_2$ و $R_3 \to 4R_1 + R_3$ ، العمليتين العموديتين المقابلتين، ثم $R_3 \to 2R_2 + R_3$ والعملية العمودية المقابلة، فنحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ثم} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

وبذلك، يقود التعويض الخطي $x = r - 2s$، $y = s + 2t$، $z = t$ إلى الشكل التربيعي $q(r,s,t) = r^2 - s^2 - 3t^2$.

77.19 ليكن $q(x,y,z) = 2x^2 - 12xy + 5y^2$. ضع q في الشكل القطري بواسطة الطريقة المعروفة بـ «إكمال المربع».

■ أولاً نجمع الحدود المحتوية على x^2 و xy، فنحصل على $q(x,y) = 2(x^2 - 6xy) + 5y^2$. ثم نكمل المربع داخل القوسين بإضافة مضاعف مناسب لـ y^2، ثم نطرح المقدار المقابل خارج القوسين، فنحصل على $q(x,y) = 2(x^2 - 6xy + 9y^2) + 5y^2 - 18y^2 = 2(x - 3y)^2 - 13y^2$ [يأتي -18 من حقيقة أن $9y^2$ داخل القوسين مضروبة في 2]. ليكن $s = x - 3y$، $t = y$. إذن $x = s + 3t$، $y = t$. إن هذا التعويض الخطي يقود إلى الشكل التربيعي $q(s,t) = 2s^2 - 13t^2$.

78.19 ضع $q(x,y) = 3x^2 - 12xy + 7y^2$ في الشكل القطري بواسطة إكمال المربع.

■ لدينا $q(x,y) = 3x^2 - 12xy + 7y^2 = 3(x^2 - 4xy \quad) + 7y^2 = 3(x^2 - 4xy + 4y^2) + 7y^2 - 12y^2 = 3(x - 2y)^2 - 5y^2$
نضع $s = x - 2y$، $t = y$. إذن، $x = s + 2t$، $y = t$. يعطينا هذا التعويض الخطي $q(s,t) = 3s^2 - 5t^2$.

المسألتان 79.19-80.19 تتعلقان بالمصفوفة القطرية $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ فوق حقل K.

79.19 بيّن أنه من أجل أي سلميات غير صفرية $k_1,...,k_n \in K$، تكون A متطابقة مع مصفوفة قطرية بمداخل قطرية $a_i k_i^2$.

■ لتكن P المصفوفة القطرية ذات المداخل القطرية k_i. إذن.

$$P^T AP = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 k_1^2 & & & \\ & a_2 k_2^2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n k_n^2 \end{pmatrix}$$

80.19 بيّن أنه إذا كان K الحقل الحقيقي **R**، فإن A تكون متطابقة مع مصفوفة قطرية تكون مداخلها القطرية 1، و -1 ، و 0.

■ لتكن P المصفوفة القطرية بالمداخل القطرية

$$b_i = \begin{cases} 1/\sqrt{|a_i|} & \text{إذا} \quad a_i \neq 0 \\ 1 & \text{إذا} \quad a_i = 0 \end{cases}$$

إذن، يكون لـ $P^T AP$ الشكل المطلوب.

81.19 بيّن أن $q(0) = 0$ من أجل أي شكل تربيعي q على V.

■ لدينا $q(0) = f(0,0) = f(0v,0) = 0f(v,0) = 0$.

82.19 لنفترض أن $q(u) = 0$ من أجل شكل تربيعي q على V. بيّن أن $q(ku) = 0$ من أجل أي $k \in K$.

■ لدينا $q(ku) = f(ku,ku) = k^2 f(u,u) = k^2 q(u) = k^2 .0 = 0$.

83.19 أعط مثالاً لشكل تربيعي q على $\mathbf{R}^2$ بحيث أن $q(u) = 0$ و $q(v) = 0$ من أجل بعض $u,v \in \mathbf{R}^2$، ولكن $q(u + v) \neq 0$.

■ ليكن $q(x,y)=x^2-y^2$ و $u=(1,1)$ و $v=(1,-1)$. إذن، $f(u)=0$ و $f(v)=0$ ولكن $f(u+v)=f(2,0)=4\neq 0$.

6.19 أشكال خطانية وتربيعية متناظرة حقيقية، قانون العَطَالَة

يختبر هذا القسم الأشكال الخطانية والأشكال التربيعية المتناظرة على الفضاءات المتجهية فوق الحقل الحقيقي **R**. وتظهر هذه الأشكال في العديد من فروع الرياضيات والفيزياء إن الطبيعة الخاصة لـ **R** تسمح بنظرية مستقلة.

وتكون المبرهنة التالية هي المحتوى الرئيسي في هذا القسم، والتي سوف نبرهنها في المسألة 96.19، وكذلك نتيجتها التي تتبعها مباشرة.

مبرهنة 6.19: ليكن f شكلاً خطانياً متناظراً على V فوق **R**. إذن، توجد قاعدة لـ V يكون فيها f ممثلاً بواسطة مصفوفة قطرية؛ وكل تمثيل مصفوفي قطري آخر يكون له نفس العدد P من المداخل الموجبة ونفس العدد N من المداخل السالبة النتيجة التالية من أجل الأشكال التربيعية الحقيقية يشار إليها بـ «مبرهنة قانون العَطَالَة (القصور الذاتي)» أو «مبرهنة سلفستر».

النتيجة 7.19: يكون لأي شكل تربيعي q تمثيل وحيد في الشكل $q(x_1,...,x_n) = x_1^2 +...+ x_s^2 - x_{s+1}^2 -...- x_r^2$.

ملاحظة: f سوف ترمز في هذا القسم، إلا إذا ذكر أو فهم غير ذلك، إلى شكل خطي متناظر حقيقي، وترمز q إلى الشكل التربيعي الحقيقي المقابل له.

84.19 عرِّف تأشيرة f وتأشيرة q، واللتين نرمز لهما بـ Sig(f) و Sig(q) على الترتيب.

■ $Sig(f) = Sig(q) = P-N$، حيث P عدد المداخل الموجبة و N عدد المداخل السالبة في أي تمثيل قطري لـ f و q.
[نعرف، من مبرهنة 6.19، أن العددين P و N وحيدان من أجل أي f و q معطاتين].

85.19 بيّن أن $\text{rank}(f) = \text{rank}(q) = P + N$.

▩ ليكن D تمثيلا مصفوفياً قطرياً لـ f و q. إذن، يكون رتبة (D) مساوية لعدد المداخل القطرية غير الصفرية، والذي يساوي $P + N$. وبذلك، $\text{rank}(f) = \text{rank}(q) = \text{rank}(D) = P + N$.

86.19 أوجد تأشيرة الشكل التربيعي $q(x,y,z)$ في المسألة 75.19.

▩ يكون للشكل التربيعي القطري المكافيء، $q(r,s,t) = r^2 - s^2 + 119t^2$، عدد $P = 2$ من المداخل الموجبة، وعدد $N = 1$ من المداخل السالبة على القطر. وبذلك، $\text{Sig}(q) = P - N = 2 - 1 = 1$.

87.19 أوجد تأشيرة الشكل التربيعي $q(x,y,z)$ في المسألة 6.19.

▩ الشكل التربيعي القطري المكافيء يكون $q(r,s,t) = r^2 - s^2 - 3t^2$. إذن، $P = 1$ و $N = 2$؛ وبالتالي، $\text{Sig}(q) = 1 - 2 = -1$.

88.19 عرّف شكلا تربيعياً معرّفاً ـ موجباً.

▩ نقول أن شكلاً تربيعياً q «معَرَّف موجبٌ» إذا $q(v) = f(v,v) > 0$ من أجل كل متجه $v \neq 0$. يكون هذا صحيحاً إذا وفقط إذا كان أي تمثيل قطري D لـ q يحتوي فقط مداخل غير سالبة على القطر؛ أي إذا $\text{Sig}(q) = \dim V$.

89.19 يحسِّن شكلاً نصف تربيعي موجباً.

▩ نقول أن شكلاً نصف تربيعي موجب q إذا $q(v) = f(v,v) \geqslant 0$ من أجل أي متجه V. هـذا صحيح إذا وفقط إذا كان أي تمثيل قطري D لـ q يحتوي على مداخل قطرية موجبة فقط. أي إذا $\text{Sig}(q) = \text{rank}(q)$.

90.19 ليكن $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4xz - 4yz + 7z^2$. هل q معرّف ـ موجب؟

▩ نضع في شكل قطري [تحت التطابق]. المصفوفة المتناظرة A المقابلة لـ q [وذلك بتطبيق $R_3 \to 2R_1 + R_3$ و $C_3 \to 2C_1 + C_3$. ثم $R_3 \to R_2 + R_3$ و $C_3 \to C_2 + C_3$]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لا يحتوي التمثيل القطري لـ q إلا على مداخل قطرية موجبة: 1، 2، 1، وبالتالي، يكون q معرّفاً ـ موجباً.

91.19 ليكن $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xz + 4yz + 3z^2$. هل q معرّف ـ موجب؟

▩ نضع في شكل قطري [تحت التطابق] المصفوفة المتناظرة A المقابلة لـ q:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

يوجد مدخل سالب (-2) في التمثيل القطري لـ q؛ وبالتالي، لا يكون q معرّفاً موجباً.

92.19 بيِّن أن $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ يكون معرّفاً موجباً إذا وفقط إذا كان المميز $D = b^2 - 4ac < 0$.

▩ لنفترض أن $v = (x,y) \neq 0$، مثلاً $y \neq 0$. وليكن $t = x/y$. إذن،

$$q(v) = y^2[a(x/y)^2 + b(x/y) + c] = y^2[at^2 + bt + c]$$

ولكن $s = at^2 + bt + c$ يقع فوق محور t-، أي يكون موجباً من أجل كل قيم t، إذا وفقط إذا $D = b^2 - 4ac < 0$. وبذلك، يكون q معرّفاً موجباً إذا وفقط إذا $D < 0$.

93.19 ليكن $q(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$. هل q معرّف موجب؟

▩ **طريقة 1.** نضع في الشكل القطري بإكمال المربع:

$q(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 5y^2 - 4y^2 = (x - 2y)^2 + y^2 = s^2 + t^2$، حيث $s = x - 2y$، $t = y$. إذن، يكون q معرّفاً ـ موجباً.

■ طريقة 2. نحسب المميز $D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$. بما أن $D < 0$، يكون q معرّفاً ـ موجباً.

94.19 ليكن $q(x,u) = x^2 + 6xy + 3y^2$. هل q معرّف موجب؟

■ **طريقة 1.** نحول إلى الشكل القطري بإكمال المربع:
$q(x,y) = x^2 + 6xy + 9y^2 + 3y^2 + - 9y^2 = (x + 3y)^2 - 6y^2 = s^2 - 6t^2$، حيث $s = x + 3y$ $t = y$. بما أن (-6) سالب، فإن q ليست معرّفاً موجباً.

طريقة 2. نحسب $D = b^2 - 4ac = 36 - 12 = 24$. بما أن $D > 0$، فإن q ليس معرّفاً موجباً.

95.19 ليكن f الجداء النقطي على $\mathbf{R}^n$؛ أي $f(u,v) = u.v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$، حيث $u = (a_i)$ و $v = (b_i)$. هل f معرّف موجب؟

■ لاحظ أن f متناظر، لأن $f(u,v) = u.v = v.u = f(v,u)$. أيضًا، f معرف موجب لأن $f(u,u) = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$ عندما $u \neq 0$.

96.19 اثبت مبرهنة 6.19.

■ نعرف، من مبرهنة 4.19، أنه توجد قاعدة $\{u_1,...,u_n\}$ لـ V يكون فيها f ممثلاً بواسطة مصفوفة قطرية، وليكن لـ P مدخلاً موجباً و N مدخلاً سالباً. لنفترض الآن $\{w_1,...,w_n\}$ قاعدة أخرى لـ V يكون فيها f ممثلاً بواسطة مصفوفة قطرية بـ P' مدخلاً موجباً و N' مدخلاً سالباً. يمكننا الافتراض، دون فقدان للعمومية، أن المداخل الموجبة في كل مصفوفة تظهر أولاً. بما أن $rank(f) = P + N = P' + N'$، يكفي أن نثبت أن $P = P'$.

لتكن U البسطة الخطية لـ $u_1,...,u_p$، ولتكن W البسطة الخطية لـ $w_{P'+1}, ..., w_n$. إذن $f(v,v) > 0$ من أجل كل $v \in U$ غير صفري، و $f(v,v) \leqslant 0$ من أجل كل $v \in W$ غير صفري. وبالتالي، $U \cap W = \{0\}$. لاحظ أن $\dim U = P$ و $\dim W = n-P'$. وبذلك،

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = P + (n - P') - 0 = P - P' + n$$

ولكن $\dim (U + W) \leqslant \dim V = n$؛ وبالتالي، $P - P' + n \leqslant n$ أو $P \leqslant P'$. بالمثل، $P' \leqslant P$. إذن، $P = P'$ كما هو مطلوب.

ملاحظة: المبرهنة وإثباتها يعتمدان فقط على مفهوم الموجبية. وبذلك، تكون المبرهنة صالحة من أجل أي حقل جزئي K في الحقل الحقيقي **R**.

97.19 نقول عن مصفوفة n×n حقيقية ومتناظرة A أنها «معرّفة موجبة» إذا $X^TAX > 0$ من أجل كل متجه (عمودي) غير صفري $X \in \mathbf{R}^n$، أي إذا كانت A معرّفة موجبة باعتبارها شكلاً خطانياً. لتكن B أي مصفوفة حقيقية غير شاذة. بيّن أن (أ) B^TB متناظرة وأن (ب) B^TB معرّفة موجبة.

■ (أ) لدينا $(B^TB)^T = B^TB^{TT} = B^TB$؛ وبالتالي B^TB متناظرة.

(ب) بما أن B غير شاذة، فإن $BX \neq 0$ من أجل أي X غير صفري في $\mathbf{R}^n$. وبالتالي فإن الجداء النقطي لـ BX مع نفسه، $BX.BX = (BX)^T(BX)$، يكون موجباً. وبذلك، $X^T(B^TB)X = (X^TB^T)(BX) = (BX)^T(BX) > 0$ وهو المطلوب.

7.19 التقطير المتعامد للأشكال التربيعية الحقيقية

ليكن q شكلاً تربيعياً على الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^n$، ولتكن A المصفوفة الحقيقية المتناظرة المقابلة له. نتذكر أن مصفوفة غير شاذة P تكون متعامدة إذا $P^T = P^{-1}$. المبرهنة التالية، والتي سيتم إثباتها في فصل 20، تبين أنه يمكن تقطير q بواسطة تغيير متعامد للإحداثيات.

مبرهنة 8.19: لتكن A مصفوفة حقيقية متناظرة. إذن، توجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $B = P^{-1}AP = P^TAP$ قطرية.

98.19 صف الخوارزمية التي تحول شكلا تربيعياً $q(X)$، في $\mathbf{R}^n$، إلى شكل قطري بواسطة تغيير متعامد للإحداثيات $X = PY$.

■ خوارزمية التقطير المتعامد

خطوة 1. أوجد المصفوفة المتناظرة A التي تمثل q وأوجد حدوديتها المميزة $\Delta(t)$.

خطوة 2. أوجد القيم الذاتية لـ A، وهو جذور $\Delta(t)$.

خطوة 3. من أجل كل قيمة ذاتية λ لـ A، في خطوة 2، أوجد قاعدة متعامدة لفضائها الذاتي.

خطوة 4. ناظم كل المتجهات الذاتية في خطوة 3 والتي تشكل عندئذ قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ $\mathbf{R}^n$.

خطوة 5. لتكن P المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية المناظمة في خطوة 4.

إذن، يكون $X = PY$ التغيير المتعامد للإحداثيات المطلوب، وتكون المداخل القطرية لـ P^TAP القيم الذاتية $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ المقابلة لأعمدة P.

ملاحظة: مبرهنة 6.20 تضمن أن المتجهات الذاتية، المقرنة بقيم ذاتية مختلفة، تكون متعامدة.

99.19 أوجد تغييراً متعامداً للإحداثيات يحول الشكل التربيعي الحقيقي إلى شكل قطري $q(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$.

■ نوجد أولاً المصفوفة المتناظرة A الممثلة لـ q ثم حدوديتها المميزة $\Delta(t)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 2 & t-5 \end{vmatrix} = (t-6)(t-1)$$

القيمتان الذاتيتان لـ A هما 6 و 1. نعوض بـ $t = 6$ في المصفوفة $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة للمعادلتين $4x + 2y = 0$، $2x + y = 0$. والتي لها حلّ غير صفري $v_1 = (1,-2)$. ثم نعوض بـ $t = 1$ في المصفوفة $tI - A$، فنجد على المنظومة المتجانسة المقابلة $-x + 2y = 0$ ، $2x - 4y = 0$. والتي لها حل غير صفري $v_2 = (2,1)$. نناظم v_1 و v_2، فنحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد$(u_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$، $(u_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. لتكن، أخيراً، P المصفوفة التي عموديها u_1 و u_2، على الترتيب. إذن

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^tAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون التغيير المتعامد للإحداثيات المطلوب:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{أي أن} \quad \begin{aligned} x &= \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ y &= \frac{-2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

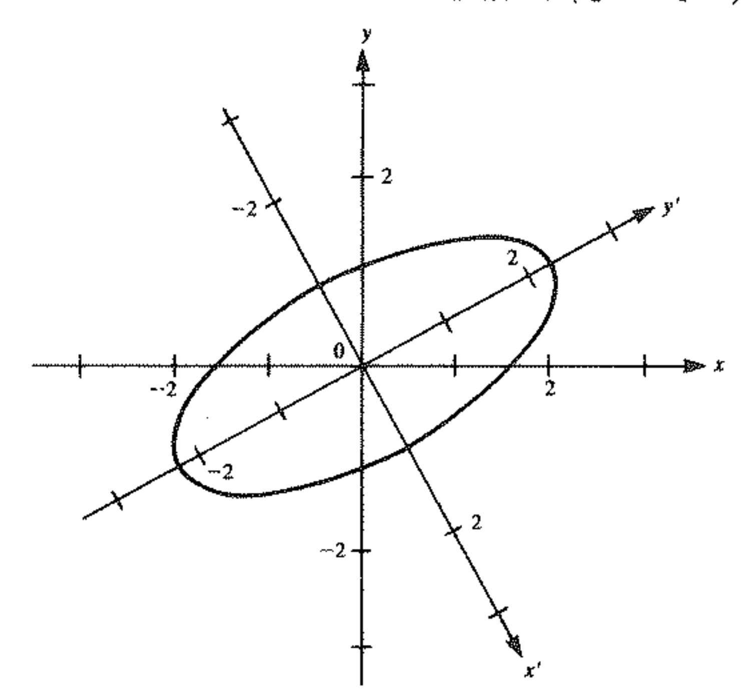
ويتحول q، تحت هذا التغيير للإحداثيات، إلى الشكل القطري $q(x',y') = 6x'^2 + y'^2$. لاحظ أن المداخل القطرية لـ q هي القيم ـ الذاتية لـ A.

100.19 أوجد تأشيرة الشكل التربيعي q أعلاه.

■ بما أن المدخلين القطريين موجبان، فإن $P = 2$ و $N = 0$؛ وبالتالي، $\text{Sig}(q) = 2 - 0 = 2$.

101.19 ليكن C المنحنى التربيعي $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 6$. أرسم C في المستوى الإحداثي $\mathbf{R}^2$. أي نوع من القطوع المخروطية يكون C؟

■ إن مصفوفة تغيير القاعدة P، في المسألة 99.19، تحدد منظومة إحداثية جديدة من أجل $\mathbf{R}^2$ بالمحور ـ x' الجديد في إتجاه المتجه الذاتي $u_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ [أو $v_1 = (1,-2)$]، والمحور ـ y' الجديد في إتجاه المتجه الذاتي $u_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ [أو $v_2 = (2,1)$]. معادلة C بالنسبة للمنظومة الإحداثية الجديدة تكون $6x'^2 + y'^2 = 6$. ويكون البيان قطعا ناقصاً (إهليلجاً) يقطع محور ـ x' عند ± 1 ومحور ـ y' عند $\pm\sqrt{6} = \pm 2.3$ ، كما في شكل 19-1.



شكل 1-19

102.19 لتكن $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$. أوجد تغييراً متعامداً للإحداثيات يحول q إلى الشكل القطري.

■ توجد أولاً المصفوفة المتناظرة A الممثلة لـ q، ثم حدوديتها المميزة $\Delta(t)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

وبذلك، تكون 3 و 1− القيمتين الذاتيتين لـ A. نعوض بـ $t = 3$ في المصفوفة $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة $2x - 2y = 0$، $-2x + 2y = 0$ ، والتي لها حلّ صفري $v_1 = (1,1)$.

ثم نعوض بـ $t = -1$ في المصفوفة $tI - A$ فنحصل على $-2x - 2y = 0$ ، $-2x - 2y = 0$. والتي لها حل غير صفري $v_2 = (1,-1)$.

نناظم v_1 و v_2، فنحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$. لتكن، أخيراً، P المصفوفة التي عموديها u_1، u_2 على الترتيب؛ إذن

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^TAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون التغيير المتعامد للإحداثيات المطلوب

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x &= \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

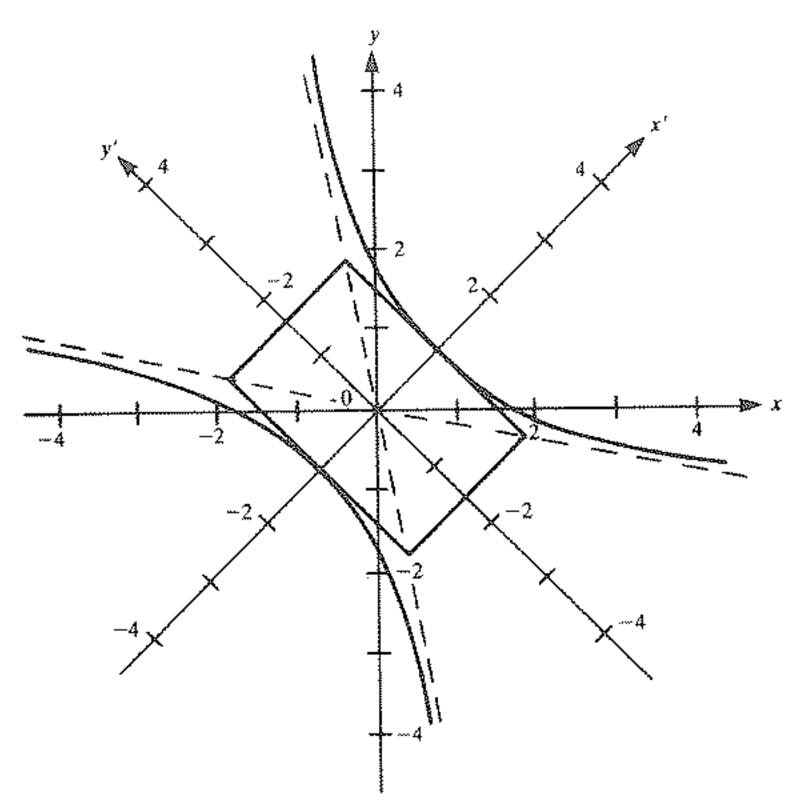
ويتحول q، تحت هذا التغيير للإحداثيات، إلى الشكل القطري $q(x',y') = 3x'^2 - y'^2$. [لاحظ أن المدخلين القطريين لـ q هما القيمتان الذاتيتان لـ A].

103.19 أوجد تأشيرة الشكل التربيعي q أعلاه.

■ بما أن أحد المدخلين القطريين موجب والآخر سالب، فإن $P = 1$ و $N = 1$. وبذلك، تكون $Sig(q) = P - N = 1 - 1 = 0$.

104.19 ليكن C المنحنى $x^2 + 4xy + y^2 = 3$. أرسم C في المستوى الإحداثي $\mathbf{R}^2$. أي نوع من القطوع المخروطية يكون C؟

▩ نرسم المعادلة المحوَّلة $3x'^2 - y'^2 = 3$ في المستوى $\mathbb{R}^2$ بالنسبة إلى محور -x' جديد في اتجاه المتجه الذاتي $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ [أو $v_1 = (1,1)$] ومحـور -y' جـديـد فـي اتجـاه المتجـه الـذاتـي $u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ [أو $v_2 = (-1,1)$]. ويكون البيان قطعاً زائداً (هذلولا) راسياً على محور -x' عند $x' = \pm 1$، كما في الشكل 19-2. [الخطان المقاربان هما $y' = \pm\sqrt{6}x'$].



شكل 19-2

105.19 ليكن $q(x,y) = 3x^2 - 6xy + 11y^2$. أوجد تغييراً متعامداً للإحداثيات يحول q إلى شكل قطري.

▩ نوجد المصفوفة المتناظرة A الممثلة لـ q، وحدوديتها المميزة $\Delta(t)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 3 \\ 3 & t-11 \end{vmatrix} = t^2 - 14t + 24 = (t-2)(t-12)$$

القيمتان الذاتيتان هما 2 و 12؛ وبالتالي، يكون الشكل القطري لـ q هو $q(x',y') = 2x'^2 + 12y'^2$. نحصل على التغيير المقابل للإحداثيات بإيجاد مجموعة مقابلة لمتجهين ذاتيين لـ A.

نضع $t = 2$ في المصفوفة $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة $-x + 3y = 0$ ، $3x - 9y = 0$، والتي لها حل غير صفري $v_1 = (3,1)$. ثم نعوض بـ $t = 12$ في المصفوفة $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة $9x + 3y = 0$، $3x + y = 0$ والتي لها حل غير صفري $v_2 = (-1,3)$. نناظم v_1 و v_2، فنحصل على القاعدة ناظمية ـ التعامد. $u_1 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ ، $u_2 = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ ، ينتج عن ذلك مصفوفة تغيير القاعدة P والتغيير المطلوب للإحداثيات:

$$P = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x &= \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y &= \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

ويمكننا التعبير عن x' و y' بدلالة x و y باستخدام $P^{-1} = P^T$، أي

$$x' = \frac{3x + y}{\sqrt{10}} \qquad y' = \frac{-x - 3y}{\sqrt{10}}$$

المسائل 106.19-112.19 تتعلق بالشكل التربيعي $q(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz + 2yz + 3z^2$.

106.19 أوجد المصفوفة المتناظرة A التي تمثل q وحدوديتها المميزة $\Delta(t)$.

■ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = t^3 - 9t^2 + 24t - 20$

107.19 أوجد القيم الذاتية لـ A أو، بتعبير آخر، جذور $\Delta(t)$.

■ إذا كان لـ $\Delta(t)$ جذر منطق، فلا بد أن يقسم الثابت 20، أي أنه يجب أن يكون ضمن ± 1 ، ± 2 ، ± 4 ، ± 10 ، ± 20 . نختبر $t = 2$، فنحصل على

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 - 9 + 24 - 20 \\ & \quad\; 2 - 14 + 20 \\ \hline & 1 - 7 + 10 + \;\; 0 \end{array}$$

وبذلك، $\Delta(t) = (t-2)(t^2 - 7t + 10) = (t-2)^2(t-5)$. وبالتالي، فإن القيم الذاتية لـ A هي 2 (بتكرار 2) و 5 (بتكرار 1).

108.19 أوجد قاعدة متعامدة للفضاء الذاتي E_2 للقيمة الذاتية $\lambda = 2$.

■ نطرح $t = 2$ من مداخل قطر A، فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة $x + y + z = 0$، $x + y + z = 0$، $x + y + z = 0$؛ أو $x + y + z = 0$. ويكون للمنظومة حلّان مستقلان. أحدهما $v_1 = (0,1,-1)$. لنبحث عن حلٍّ ثانٍ $v_2 = (a,b,c)$ يكون متعامداً مع v_1، أي، بحيث أن $a + b + c = 0$ وأيضاً $b - c = 0$. مثلاً، $v_2 = (2,-1,-1)$. وبذلك، تكون $v_1 = (0,1,-1)$ و $v_2 = (2,-1,-1)$ قاعدة متعامدة لـ E_2.

109.19 أوجد متجهاً ذاتياً v_3 مقرناً بالقيمة الذاتية $\lambda = 5$.

■ نطرح $t = 5$ من عناصر القطر في A، فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة $-2x + y + z = 0$ ، $x - 2y + z = 0$، $x + y - 2z = 0$. تعطى هذه المنظومة حلاً غير صفري $v_3 = (1,1,1)$.

[ملاحظة: كما هو متوقع، من مبرهنة 6.20، يكون v_3 متعامداً مع v_1 و v_2؛ وبالتالي، تكون $\{v_1, v_2, v_3\}$ قاعدة متعامدة لـ $\mathbf{R}^3$].

110.19 أوجد تغييراً متعامداً للإحداثيات يحول q إلى شكل قطري.

■ نناظم v_1، v_2، v_3 فنحصل على القاعدة ناظمية التعامد: $u_1 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$، $u_2 = (2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$، $u_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. لتكن P المصفوفة التي أعمدتها u_1، u_2، u_3. إذن

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^TAP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

وبذلك، يكون التغيير المتعامد للإحداثيات

$$\begin{aligned} x &= \qquad\;\; \frac{2y'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} \\ z &= -\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ويتحول q، تحت هذا التغيير للإحداثيات، إلى الشكل القطري $q(x',y',z') = 2x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2$.

111.19 أوجد تأشيرة q.

■ بما أن هناك ثلاثة مداخل قطرية موجبة، ولا توجد مداخل قطرية سالبة، فإن $P = 3$ و $N = 0$. إذن، $Sig(q) = P - N = 3 - 0 = 3$.

112.19 صف السطح $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xy + 2yz + 3z^2 = 1$.

■ تحت تغيير الإحداثيات أعلاه، تكون معادلة السطح $2x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2 = 1$ وبذلك، يكون السطح مجسماً إهليلجيا (كروانياً).

8.19 الأشكال الهرميتية

نفترض في هذا القسم أن V فضاء متجهي فوق الحقل العقدي C. [وكما المعتاد، $\bar{k}$ يرمز إلى المرافق العقدي لـ $k \in C$].

ملاحظة: إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة $n \times n$ فوق C، فإننا نكتب $\bar{A}$ من أجل المصفوفة المتحصل عليها بأخذ المرافق العقدي لكل مدخل في A، أي أن $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$. نكتب أيضاً A^* من أجل $\bar{A}^T = \overline{A^T}$، أي أن A^* هي المنقولة المرافقة لـ A.

113.19 لتكن المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2+3i & 5-4i \\ 6+7i & 1+9i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6-2i & 7i \\ 16 & 2-5i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & -5 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

أوجد A^*، B^*، و C^*.

■ نأخذ، في كل حالة، منقولة كل مصفوفة ثم المرافق العقدي لكل عنصر أو، بشكل بديل، نأخذ المرافق العقدي لكل عنصر ثم منقولة المصفوفة الجديدة. يعطينا هذا

$$A^* = \begin{pmatrix} 2-3i & 6-7i \\ 5+4i & 1-9i \end{pmatrix} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 6+2i & 16 \\ -7i & 2+5i \end{pmatrix} \qquad C^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 6 \\ -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

[لاحظ أنه إذا كانت M حقيقية، فإن M^* تكون منقولة M].

114.19 عرّف مصفوفة هرميتية.

■ تكون مصفوفة H هرميتية إذا $H^* = H$، أي إذا كانت H تساوي منقولتها المرافقة. [هذه الخاصية مماثلة لخاصية أن تكون مصفوفة متناظرة في الحالة الحقيقية].

المسائل 115.19-117.19 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

115.19 هل A هرمينية؟

■ تكون A هرميتية، لأنها تساوي منقولتها المرافقة.

116.19 هل B هرميتية؟

■ B ليست هرميتية، رغم كونها متناظرة.

117.19 هل C هرميتية؟

■ C هرميتية. في الواقع، إن مصفوفة حقيقية تكون هرميتية إذا وفقط إذا كانت متناظرة.

118.19 عرّف شكلاً هرميتياً على فضاء متجهي V فوق الحقل العقدي C.

■ إن شكلاً هرميتياً على V هو تطبيق $f: V \times V \to \mathbf{C}$ يحقق:

$$f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v) \quad \text{(i)}$$

$$f(u, v) = \overline{f(v, u)} \quad \text{(ii)}$$

حيث $a, b \in \mathbf{C}$ و $u_i, v \in V$.

119.19 لنفترض أن f شكل هرميتي على V. بيّن أن

$$f(u, av_1 + bv_2) = \bar{a}f(u, v_1) + \bar{b}f(u, v_2) \quad \text{(iii)}$$

■ لدينا

$$f(u, av_1 + bv_2) = \overline{f(av_1 + bv_2, u)} = \overline{af(v_1, u) + bf(v_2, u)} = \bar{a}\,\overline{f(v_1, u)} + \bar{b}\,\overline{f(v_2, u)} = \bar{a}f(u, v_1) + \bar{b}f(u, v_2)$$

ملاحظة: كما في السابق، نعبّر عن الشرط (i) بالقول أن f خطية في المتغير الأول. ومن جهة أخرى، نعتبر عن الشرط (iii) بالقول أن f «خطية مرافقة» في المتغير الثاني.

120.19 لنفترض أن f شكل هرميتي على V. بيّن أن f(v,v) حقيقي من أجل أي $v \in V$.

■ لدينا، من الشرط (ii)، أن $f(v, v) = \overline{f(v, v)}$. وبذلك، يكون f(v,v) حقيقياً.

121.19 لتكن A مصفوفة هرميتية. بيّن أن f شكل هرميتي على $\mathbf{C}^n$ حيث f معرّف بواسطة $f(X, Y) = X^TA\bar{Y}$

■ لدينا، من أجل كل $a, b \in \mathbf{C}$ وكل $X_1, X_2, X_2, Y \in \mathbf{C}^n$ أن
$f(aX_1 + bX_2, Y) = (aX_1 + bX_2)^TA\bar{Y} = (aX_1^T + bX_2^T)A\bar{Y} = aX_1^TA\bar{Y} + bX_2^TA\bar{Y} = af(X_1, Y) + bf(X_2, Y)$. وبالتالي، يكون f خطي في المتغير الأول. أيضاً، $\overline{f(X, Y)} = \overline{X^TA\bar{Y}} = \overline{(X^TA\bar{Y})^T} = \bar{Y}^T\bar{A}^T X = Y^TA^*\bar{X} = Y^TA\bar{X} = f(Y, X)$؛ وبالتالي، يكون f هرميتياً فوق $\mathbf{C}^n$. [ملاحظة: نستخدم حقيقة أن $X^TA\bar{Y}$ عدد سلّمي، وبذلك فهو يساوي منقوله]

122.19 عرّف شكلاً تربيعياً هرميتياً.

■ ليكن f شكلاً هرميتياً على V. إن التطبيق $q: V \to \mathbf{R}$ المعرّف بواسطة q(v) = f(v,v) يُسمّى «شكلاً تربيعياً هرميتياً» أو «شكلاً تربيعياً عقدياً» مقرناً بالشكل الهرميتي f. كما يمكننا الحصول على f من q باستخدام المتطابقة التالية المعروفة بالشكل القطبي لـ f: $f(u, v) = \frac{1}{4}(q(u + v) - q(u - v)) + \frac{i}{4}(q(u + iv) - q(u - iv))$

123.19 عرّف شكلاً هرميتياً (نصف معرّف ـ غير سالب) و (معرّفاً ـ موجباً).

■ نقول أن شكلاً هرميتياً، وشكله التربيعي q، نصف معرف ـ غير سالب إذا $q(v) = f(v,v) \geqslant 0$ من أجل كل $v \in V$، وأنه (وكذلك شكله التربيعي) معرّف ـ موجب إذا $q(v) = f(v,v) > 0$ من أجل كل $v \neq 0$.

124.19 ليكن f الجداء النقطي على $\mathbf{C}^n$؛ أي أن $f(u, v) = u \cdot v = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n$. من أجل $u = (z_i), v = (w_i) \in \mathbf{C}$ في $\mathbf{C}^n$. هل f شكل هرميتي؟ هل f معرّف موجب؟

■ التطبيق f شكل هرميتي على $\mathbf{C}^n$، لأنه يحقق الخاصيتين (i) و (ii) من أجل الأشكال الهرميتية. كما أن f معرّف ـ موجب، لأن $f(u, u) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$.

ملاحظة: إن كل جداء داخلي عقدي، على فضاء متجهي V فوق C، شكل هرميتي معرّف ـ موجب. وبالعكس، إن كل شكل هرميتي معرّفٍ موجبٍ على V فوق C يعرّف جداءً داخلياً بواسطة $f(u,v) = \langle u,v \rangle$.

125.19 عرّف التمثيل المصفوفي لشكل هرميتي f على V بالنسبة لقاعدةٍ $S = \{e_1,...,e_n\}$ في V.

■ إن المصفوفة $H = (h_{ij})$، حيث $h_{ij} = f(e_i,e_j)$، تُسمى «التمثيل المصفوفي» لـ f في القاعدة $\{e_i\}$. نعرف، من (ii)،

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 0 & 2 & -5i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 1 \end{matrix} \right. \quad \text{ثم} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$

ثم نطبق العملية الصفية $R_3 \to -5iR_2 + 2R_3$، والعملية العمودية الهرميتية المقابلة $C_3 \to 5iC_2 + 2C_3$، فنحصل على

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5i \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 1 & 0 \\ 5+9i & -5i & 2 \end{matrix} \right. \quad \text{ثم} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 1 & 0 \\ 5+9i & -5i & 2 \end{matrix} \right.$$

الآن، تم تقطير H. نضع

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 5+9i \\ 0 & 1 & -5i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ثم} \quad P^T H \bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix}$$

130.19 أوجد تأشيرة المصفوفة الهرميتية H في المسألة 129.19.

■ يوجد مدخلان موجبان، 1 و 2، ومدخل سالب واحد -38، على التمثيل القطري لـ H؛ وبالتالي $P = 2$ و $N = 1$ وبذلك، $\mathrm{Sig}(H) = P - N = 2 - 1 = 1$.

9.19 تعدد ـ الخطية والمحددات

131.19 عرّف شكلاً متعدد ـ الخطية وشكلاً متعدد ـ الخطية متناوباً على فضاء متجهي V فوق حقل K.

■ نقول عن تطبيق $f: \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{m \text{ من المرات}} \to K$ أنه شكل «متعدد ـ الخطية» أو «خطي m-» على V إذا كان f خطياً في كل متغير؛ أي إذا $f(\ldots, \widehat{au + bv}, \ldots) = af(\ldots, \hat{u}, \ldots) + bf(\ldots, \hat{v}, \ldots)$ من أجل $i = 1, \ldots, m$ حيث ^ ترمز للمركبة i، مع بقاء المركبات الأخرى ثابتة. نقول عن شكل خطي m- بأنه «متناوب» إذا $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$ كلّما $v_i = v_k$، $i \neq k$.

132.19 لتكن A مصفوفة مربعة n- فوق حقل K. إذن، يمكن إعتبار A نونية لمتجهاتها الصفية، ولتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n$؛ أي أن $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. بيّن أن دالة المحددة متعددة ـ الخطية [بالنسبة لصفوف A].

■ لتكن D دالة المحددة؛ أي $D(A) = D(A_1, A_2, \ldots, A_n) = |A|$. لنفترض أن $A = (a_{ij})$، وأن $A_i = B_i + C_i$، من أجل i مثبتة، حيث $B_i = (b_1, \ldots, b_n)$ و $C_i = (c_1, \ldots, c_n)$. ينتج عن ذلك أن $a_{i1} = b_1 + c_1$، $a_{i2} = b_2 + c_2$، ....، $a_{in} = b_n + c_n$. نفك $D(A) = |A|$ وفق الصف i، فنحصل على

$$\begin{aligned} D(A) = D(A_1, \ldots, B_i + C_i, \ldots, A_n) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n + c_n)A_{in} \\ &= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \cdots + c_nA_{in}) \end{aligned}$$

ولكن المجموعين، أعلاه، هما محددتا المصفوفتين اللتين نتحصل عليهما من A بإحلال B_i و C_i على الترتيب محل الصف i. أي أن $D(A) = D(A_1, \ldots, B_i + C_i, \ldots, A_n) = D(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, C_i, \ldots, A_n)$. بالإضافة إلى ذلك، وبما أن ضرب صف في سلمي k ينتج عنه ضرب المحددة في k، فإنه يكون لدينا $D(A_1, \ldots, kA_i, \ldots, A_n) = kD(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$. وبذلك، تكون D متعددة الخطية.

133.19 هل المحددة شكل متناوب؟

■ نعم، لأن مصفوفة بصفين متطابقين تكون ذات محددة صفرية.

مبرهنة 10.19: لتكن $\mathscr{A}$ مجموعة المصفوفات المربعة n- فوق حقل K. توجد دالة وحيدة $D: \mathscr{A} \to K$ بحيث أن (i) D تكون متعددة ـ الخطية، (ii) D تكون متناوبة، (iii) $D(I) = 1$. إن هذه الدالة هي دالة المحددة؛ أي أن $D(A) = |A|$، من أجل أي مصفوفة $A \in \mathscr{A}$.

أن $f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)}$ ؛ وبالتالي، تكون H هرميتية، وتكون بذلك المداخل القطرية لـ H حقيقية. ينتج عن ذلك أن أي تمثيل قطري لـ f يحتوي على مداخل حقيقية فقط.

126.19 ليكن f شكلاً هرميتياً على V. لتكن H مصفوفة f في القاعدة $\{e_1, ..., e_n\}$ لـ V. بيِّن أن $f(u, v) = [u]^T H \overline{[v]}$ من أجل كل $u, v \in V$. [كما المعتاد، يرمز $[u]$ إلى المتجه الإحداثي لـ u في القاعدة المعطاة].

■ لنفترض أن $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$ و $v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + ... + b_n e_n$. إذن

$$f(u, v) = f(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n)$$

$$= \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j f(e_i, e_j) = (a_1, \ldots, a_n) H \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} = [u]^T H \overline{[v]}$$

وهو المطلوب.

127.19 لتكن P مصفوفة تغيير القاعدة من قاعدة S في V إلى قاعدة جديدة S'. ولتكن H مصفوفة شكل هرميتي f في القاعدة الأصلية S. بيِّن أن $B = P^T H \bar{P} = Q^* H Q$، حيث $Q = \bar{P}$ ، هي مصفوفة f في القاعدة الجديدة S'.

■ ليكن $u, v \in V$. بما أن P مصفوفة تغيير القاعدة من S إلى S'، فيكون لدينا $P[u]_{S'} = [u]_S$ و $P[v]_{S'} = [v]_S$ ؛ وبالتالي، $[u]_S^T = [u]_{S'}^T P^T$ و $\overline{[v]}_S = \bar{P}\overline{[v]}_{S'}$. إذن، ومن المسألة 126.19، $f(u, v) = [u]_S^T H \overline{[v]}_S = [u]_{S'}^T P^T H \bar{P} \overline{[v]}_{S'}$. ولكن u و v عنصران إختياريان في V؛ إذن، تكون $P^T H \bar{P}$ مصفوفة f في القاعدة الجديدة S'.

ملاحظة: إن المبرهنة الأساسية لبنية الأشكال الهرميتية هي المبرهنة التالية التي تشكل المماثل العقدي للمبرهنة 4.19 حول الأشكال الخطانية المتناظرة الحقيقية.

مبرهنة 9.19: ليكن f شكلاً هرميتياً على V. إذن، توجد قاعدة $\{e_1, ..., e_n\}$ لـ V يكون فيها f ممثلاً بواسطة مصفوفة قطرية، أي أن $f(e_i, e_j) = 0$ من أجل $i \neq j$. كما أن كل تمثيل قطري لـ f يكون له نفس العدد P من المداخل الموجبة، ونفس العدد N من المداخل السالبة. ويعرف الفرق $S = P - N$ بـ «تأشيرة» f.

128.19 إن عمليات الصفوف الابتدائية الثلاث، وكذلك عمليات الأعمدة المقابلة لها، كما يلي:

$[a_1]$ $R_i \leftrightarrow R_j$ $\quad$ $[a_2]$ $R_i \to kR_i, k \neq 0$ $\quad$ $[a_3]$ $R_i \to kR_j + R_i$

$[b_1]$ $C_i \leftrightarrow C_j$ $\quad$ $[b_2]$ $C_i \to kC_i, k \neq 0$ $\quad$ $[b_3]$ $C_i \to kC_j + C_i$

عرّف عمليات الأعمدة الهرميتية المقابلة.

■ يستبدل هنا بالثابت k مرافقه $\bar{k}$ ، أي أن

$[c_1]$ $C_i \leftrightarrow C_j$ $\quad$ $[c_2]$ $C_i \to \bar{k}C_i, \bar{k} \neq 0$ $\quad$ $[c_3]$ $C_i \to \bar{k}C_j + C_i$

129.19 لتكن $H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{pmatrix}$ ، مصفوفة هرميتية. أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P^T H \bar{P}$ قطرية.

■ نكوّن أولاً المصفوفة المركبة (H,I):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+i & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 4 & 2-3i & 0 & 1 & 0 \\ -2i & 2+3i & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نطبق العمليتين الصفيتين $R_2 \to (-1+i)R_1 + R_2$ و $R_3 \to 2iR_1 + R_3$ ، على (A,I) ثم «العمليتين العموديتين الهرميتين» المقابلتين [أنظر المسألة 128.19]: $C_2 \to (-1-i)C_1 + C_2$ و $C_3 \to -2iC_1 + C_3$. على A، فنحصل على:

134.19 أثبت مبرهنة 10.19.

▩ نجد من المسألة 132.19 في الفصل 5، أن دالة المحددة تحقق الشروط (i) و (ii) و (iii). وبذلك، نحتاج فقط إلى إثبات وحدانية D.

لنفترض أن D تحقق (i) و (ii) و (iii). إذا كانت $\{e_1,\ldots,e_n\}$ القاعدة المعتادة لـ K^n، إذن $D(e_1,e_2,\ldots,e_n) = D(I) = 1$ بواسطة (iii). باستخدام (ii)، يكون لدينا أيضاً

$$D(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \operatorname{sgn}\sigma \qquad \text{حيث} \qquad \sigma = i_1 i_2 \ldots i_n \tag{1}$$

نفترض الآن $A = (a_{ij})$. لاحظ أن الصف الكائي A_k لـ A يكون $A_k = (a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}) = a_{k1}e_1 + a_{k2}e_1 + a_{k2}e_2 + \ldots + a_{kn}e_n$، وبذلك، $D(A) = D(a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n, a_{21}e_1 + \ldots + a_{2n}e_n, \ldots, a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n)$. باستخدام التعددية ـ الخطية لـ D، يمكننا كتابة D(A) كمجموع حدود في الشكل

$$D(A) = \sum D(a_{1i_1}e_{i_1}, a_{2i_2}e_{i_2}, \ldots, a_{ni_n}e_{i_n}) = \sum (a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}) D(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \tag{2}$$

حيث المجموع محسوب على كل المتتاليات $i_1 i_2 \ldots i_n$، حيث $i_k \in (1,\ldots,n)$. إذا تساوى دليلان، مثلا $i_j = i_k$ ولكن $j \neq k$، فإن $D(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = 0$. بسبب (ii). ينتج عن ذلك أنه يكتفي بحساب المجموع في (2) على كل التباديل $\sigma = i_1 i_2 \ldots i_n$. باستخدام (1)، يكون لدينا أخيراً

$$D(A) = \sum_{\sigma} (a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}) D(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$
$$= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} \qquad \text{حيث} \qquad \sigma = i_1 i_2 \ldots i_n$$

وبالتالي، تكون D دالة المحددة، وهذا يثبت المبرهنة.

الفصل 20
المؤثرات الخطية على فضاءات الجداء الداخلي

يبحث هذا الفصل في الفضاء $A(V)$ للمؤثرات الخطية T على فضاء جداء داخلي V. [أنظر الفصل 14]. وبذلك، يكون الحقل الأساس K إما الحقل الحقيقي **R** أو الحقل العقدي **C**. وفي الحقيقة، سوف نستخدم إصطلاحات مختلفة من أجل الحالة الحقيقية، ومن أجل $\langle u,v \rangle$ الحالة العقدية. وسوف نستخدم أيضاً حقيقة أن الجداء الداخلي على الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^n$ يمكن أن يعرّف بواسطة $\langle u, v\rangle = u^T v$، وأن الجداء الداخلي على الفضاء العقدي $\mathbf{C}^n$ يمكن أن يعرّف بواسطة $\langle u, v\rangle = u^T \bar{v}$، حيث u، v متجهان عموديان.

1.20 مؤثرات قرينة

1.20 عرّف المؤثر القرين.

■ نقول عن مؤثر خطي T على فضاء جداء داخلي V بأن له مؤثراً «قريناً» T^* على V إذا $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ من أجل $u,v \in V$.

2.10 لتكن A مصفوفة حقيقية مربعة -n، منظوراً إليها كمؤثر خطي على $\mathbf{R}^n$. بيِّن أن A^T تكون قرينة A

■ لدينا $\langle Au, v\rangle = (Au)^T v = u^T A^T v = \langle u, A^T v\rangle$ من أجل كل $u,v \in \mathbf{R}^n$. وبذلك، تكون A^T قرينة لـ A.

3.20 لتكن B مصفوفة عقدية مربعة -n، منظوراً إليها كمؤثر خطي على $\mathbf{C}^n$. بين أن B^* تكون قرينة لـ B [حيث B^* المنقولة العقدية لـ B].

■ لدينا $\langle Bu, v\rangle = (Bu)^T \bar{v} = u^T B^T \bar{v} = u^T \overline{\bar{B}^T v} = u^T \overline{B^* v} = \langle u, B^* v\rangle$. من أجل $u,v \in \mathbf{C}^n$، وبذلك، تكون B^* قرينة B.

ملاحظة: يستخدم الترميز B^* ليدل على قرينة B، وكنا قد استخدمناه للرمز للمنقولة المرافقة لـ B. تبين المسألة 3.20 أنهما يعطيان نفس النتيجة.

المسائل 4.20-6.20 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3-7i & 18 & 4+1 \\ -7i & 6-i & 2-3i \\ 8+i & 7+9i & 6+3i \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2+3i & 5-4i \\ 6-9i & 2+7i \end{pmatrix}$$

4.20 أوجد A^*، قرينة A.

■ نأخذ المنقولة العقدية لـ A، فنحصل على $A^* = \begin{pmatrix} 2-3i & 6+9i \\ 5+4i & 2-7i \end{pmatrix}$

5.20 أوجد B^*، قرينة B.

■ تعطينا المنقولة العقدية $B^* = \begin{pmatrix} 3+7i & 7i & 8-i \\ 18 & 6+i & 7-9i \\ 4-i & 2+3i & 6-3i \end{pmatrix}$

6.20 أوجد C^*، قرينة C.

■ بما أن C حقيقة، فإن القرينة C^* هي ببساطة منقولة C. إذن، $C^* = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

مبرهنة 1.20: ليكن T مؤثراً خطياً على فضاء جداء داخلي منته ـ البعد V فوق K. إذن

(i) يوجد مؤثر خطي وحيد T^* بحيث أن $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ من أجل كل $u,v \in V$. [أي أن T تمتلك قريناً T^*].

(ii) إذا كانت A التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة لقاعدة ناظمية ـ التعامد $S = \{e_i\}$ لـ V، فإن التمثيل المصفوفي لـ T^* بالنسبة للقاعدة S يكون المنقولة المرافقة A^* لـ A [أو المنقولة A^T لـ A، عندما يكون K حقيقياً].

إن المبرهنة 1.20، والتي سيتم إثباتها في المَسْألتين 12.20-13.20، تشكل المحتوى الرئيسي لهذا القسم.

7.20 ليكن T المؤثر الخطي على C^3 المعرّف بواسطة $T(x,y,z) = (2x + iy, y - 5iz, x + (1-i)y + 3z)$. أوجد $T^*(x,y,z)$.

■ توجد المصفوفة A الممثلة لـ T في القاعدة المعتادة لـ R^3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

تذكر أن القاعدة المعتادة ناظمية ـ التعامد. بذلك، وبالمبرهنة 1.20، تكون مصفوفة T^* في هذه القاعدة المنقولة العقدية A^* لـ A. لذلك، نكوّن

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 5i & 3 \end{pmatrix}$$

ينتج عن ذلك أن $T^*(x, y, z) = (2x + z, -ix + y + (1+i)z, 5iy + 3z)$

8.20 ليكن $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ معرّفاً بواسطة $F(x, y, z) = (3x + 4y - 5z, 2x - 6y + 7z, 5x - 9y + z)$. أوجد $F^*(x, y, z)$.

■ نوجد أولاً المصفوفة A التي تمثل T في قاعدة $\mathbf{R}^3$ المعتادة. [تذكر أن صفوف A هي معاملات x، y، z]. وبذلك

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 5 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

بما أن الحقل الأساس هو $\mathbf{R}$، فإن القرين F^* يكون ممثلاً بواسطة المنقولة A^T لـ A. لذلك، نكوّن

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & -9 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن، $F^*(x, y, z) = (3x + 2y + 5z, 4x - 6y - 9z, -5x + 7y + z)$

9.20 ليكن T المؤثر الخطي على C^3 المعرّف بواسطة $T(x, y, z) = (2x + (1-i)y, (3+2i)x - 4iz, 2ix + (4-3i)y - 3z)$. أوجد $T^*(x, y, z)$.

■ نوجد أولاً المصفوفة A التي تمثل T في قاعدة C^3 المعتادة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 3+2i & 0 & -4i \\ 2i & 4-3i & -3 \end{pmatrix}$$

نكوّن المنقولة المرافقة A^* لـ A:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3-2i & -2i \\ 1+i & 0 & 4+3i \\ 0 & 4i & -3 \end{pmatrix}$$

وبذلك، $T^*(x, y, z) = (2x + (3-2i)y - 2iz, (1+i)x + (4+3i)z, 4iy - 3z)$

10.20 ليكن V فضاء جداء داخلي كل $u \in V$ تحدد تطبيقاً $\hat{u}: V \to K$ بواسطة $\hat{u}(v) = \langle v, u\rangle$. بيّن أن $\hat{u}$ خطّي. وبذلك، ينتمي u للفضاء الثنوي V^*].

■ لدينا من أجل أي $a,b\in K$ وأي $v_1,v_2\in V$، $\hat{u}(av_1+bv_2)=\langle av_1+bv_2,u\rangle=a\langle v_1,u\rangle+b\langle v_2,u\rangle=a\hat{u}(v_1)+b\hat{u}(v_2)$. وبذلك، يكون $\hat{u}$ خطيًا ويكون، بتعبير آخر، داليًا خطيًا على V.

مبرهنة 2.20: ليكن ϕ داليًا خطيًا على فضاء جداء داخلي منته ـ البعد V. إذن، يوجد متجه وحيد $u\in V$، بحيث أن $\phi(v)=\langle v,u\rangle$ من أجل كل $v\in V$.

11.20 أثبت مبرهنة 2.20، والتي هي عكس مسألة 10.20 والتي ليس من الضروري أن تكون صحيحة من أجل فضاءات متجهية لا نهائية ـ البعد.

■ لتكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V. نضع $u=\overline{\phi(e_1)}e_1+\overline{\phi(e_2)}e_2+\cdots+\overline{\phi(e_n)}e_n$. ليكن $\hat{u}$ الدالي الخطي على V المعرّف بواسطة $\hat{u}(v)=\langle v,u\rangle$. من أجل كل $v\in V$. إذن $\hat{u}(e_i)=\langle e_i,u\rangle=\langle e_i,\overline{\phi(e_1)}e_1+\cdots+\overline{\phi(e_n)}e_n\rangle=\phi(e_i)$. من أجل $i=1,\dots,n$. بما أن $\hat{u}$ و ϕ يتفقان على كل متجه في القاعدة، إذن $\hat{u}=\phi$.

لنفترض الآن أن u' متجه آخر في V يكون من أجله $\phi(v)=\langle v,u'\rangle$، من أجل $v\in V$. إذن، $\langle v,u\rangle=\langle v,u'\rangle$ أو $\langle v,u-u'\rangle=0$. ويكون هذا صحيحاً بشكل خاص من أجل $v=u-u'$ وبذلك $\langle u-u',u-u'\rangle=0$. يعطينا هذا $u-u'=0$ و $u=u'$. وبذلك، يكون متجه u مثل هذا وحيداً، كما المطلوب.

12.20 أثبت (i) في المبرهنة 1.20.

■ نعرّف أولاً التطبيق T^*. ليكن v عنصراً إختيارياً ولكن مثبتاً في V. يكون التطبيق $u\mapsto\langle T(u),v\rangle$ داليًا خطياً على V. وبالتالي، وبواسطة المبرهنة 2.20، يوجد عنصر وحيد $v'\in V$ بحيث أن $\langle T(u),v\rangle=\langle u,v'\rangle$ من أجل كل $u\in V$. نعرّف $T^*V\to V$ بواسطة $T^*(v)=v'$. إذن، $\langle T(u),v\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle$ من أجل كل $u,v\in V$.

نبين بعد ذلك أن T^* خطي. لدينا، من أجل كل $u,v_i\in V$ وأي $a,b\in K$، أن

$$\langle u,T^*(av_1+bv_2)\rangle=\langle T(u),av_1+bv_2\rangle=\bar{a}\langle T(u),v_1\rangle+\bar{b}\langle T(u),v_2\rangle=\bar{a}\langle u,T^*(v_1)\rangle+\bar{b}\langle u,T^*(v_2)\rangle$$
$$=\langle u,aT^*(v_1)+bT^*(v_2)\rangle$$

لكن هذا صحيح من أجل كل $u\in V$؛ وبالتالي $T^*(av_1+bv_2)=aT^*(v_1)+bT^*(v_2)$

وبذلك، يكون T^* خطياً.

13.20 أثبت (ii) في مبرهنة 1.20.

■ المصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ الممثلتان لـ T و T^*، على الترتيب، في القاعدة $\{e_i\}$ تعطيهما العلاقتان $a_{ij}=\langle T(e_j),e_i\rangle$ و $b_{ij}=\langle T^*(e_j),e_i\rangle$. وبالتالي، $b_{ij}=\langle T^*(e_j),e_i\rangle=\overline{\langle e_i,T^*(e_j)\rangle}=\overline{\langle T(e_i),e_j\rangle}=\overline{a_{ji}}$ لذلك، $B=A^*$: وهو المطلوب.

المسائل 14.20-17.20 تتعلق بإثبات المبرهنة 3.20 التي تلخص بعض خواص القرين.

مبرهنة 3.20: ليكن S و T مؤثرين خطيين على V وليكن $k\in K$. إذن

(i) $(S+T)^*=S^*+T^*$ (iii) $(ST)^*=T^*S^*$

(ii) $(kT)^*=\bar{k}T^*$ (iv) $(T^*)^*=T$

14.20 أثبت (i) في المبرهنة 3.20.

■ لدينا من أجل أي $u,v\in V$، أن

$$\langle (S+T)(u),v\rangle=\langle S(u)+T(u),v\rangle=\langle S(u),v\rangle+\langle T(u),v\rangle=\langle u,S^*(v)\rangle+\langle u,T^*(v)\rangle=\langle u,S^*(v)+T^*(v)\rangle$$
$$=\langle u,(S^*+T^*)(v)\rangle$$

وتقتضي وحدانية القرين أن

$$(S+T)^*=S^*+T^*$$

15.20 أثبت (ii) في المبرهنة 3.20.

■ لدينا $\langle (kT)(u), v\rangle = \langle kT(u), v\rangle = k\langle T(u), v\rangle = k\langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, \bar{k}T^*(v)\rangle = \langle u, (\bar{k}T^*)(v)\rangle$. من أجل كل u,v∈V. تقتضي الوحدانية أن $(kT)^* = \bar{k}T^*$.

16.20 أثبت (iii) في المبرهنة 3.20.

■ لدينا $\langle (ST)(u), v\rangle = \langle S(T(u)), v\rangle = \langle T(u), S^*(v)\rangle = \langle u, T^*(S^*(v))\rangle = \langle u, (T^*S^*)(v)\rangle$، من أجل كل u,v∈V. تقتضي الوحدانية للقرين أن $(ST)^* = T^*S^*$.

17.20 أثبت (iv) في المبرهنة 3.20.

■ لدينا $\langle T^*(u), v\rangle = \overline{\langle v, T^*(u)\rangle} = \overline{\langle T(v), u\rangle} = \langle u, T(v)\rangle$، من أجل كل u,v∈V. تقتضي وحدانية القرين أن $(T^*)^* = T$.

18.20 ليكن T مؤثراً خطياً على V، وليكن W فضاء جزئياً لا متغيراً -T في V. بين أن $W^\perp$ لا متغير تحت T^*.

■ ليكن $u\in W^\perp$. إذا w∈W إذن $T(w)\in W$ وبذلك $\langle w, T^*(u)\rangle = \langle T(w), u\rangle = 0$. إذن، $T^*(u)\in W^\perp$ لأنه متعامد مع كل w∈W. وبالتالي، يكون $W^\perp$ لا متغيراً تحت $T^\perp$.

19.20 إستخدم تعريف القرين لتبين أن $I^* = I$.

■ لدينا $\langle I(u), v\rangle = \langle u, v\rangle = \langle u, I(v)\rangle$، من أجل كل u,v∈V؛ وبالتالي، $I^* = I$.

20.20 إستخدم تعريف لتبين أن $0^* = 0$.

■ لدينا $\langle 0(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0 = \langle u, 0\rangle = \langle u, 0(v)\rangle$: من أجل كل u,v∈V؛ وبالتالي، $0^* = 0$.

21.20 لنفترض أن T عكوسة. بيّن أن $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

■ $I = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$؛ وبالتالي، $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

22.20 لنفترض أن $\langle T(u), v\rangle = 0$، من أجل u,v∈V. بيّن أن $T = 0$.

■ نضع $v = T(u)$. إذن، $\langle T(u), T(u)\rangle = 0$؛ وبالتالي $T(u) = 0$، من أجل كل u∈V. ينتج عن ذلك أن $T = 0$.

23.20 لنفترض أن V فضاء جداء داخلي عقدي، وأن $\langle T(u), u\rangle = 0$ من أجل كل u∈V. بيّن أن T=0.

■ لدينا، فرضاً، أن $\langle T(v+w), v+w\rangle = 0$ من أجل أي v,w∈V. نفك ونضع $\langle T(v), v\rangle = 0$ و $\langle T(w), w\rangle = 0$:

$$\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0 \qquad (1)$$

لاحظ أن w إختياري في (1). نعوض بـ iw من أجل w، ونستخدم $\langle T(v), iw\rangle = \bar{i}\langle T(v), w\rangle = -i\langle T(v), w\rangle$ و $\langle T(iw), v\rangle = \langle iT(w), v\rangle = i\langle T(w), v\rangle$، فنحصل على $-i\langle T(v), w\rangle + i\langle T(w), v\rangle = 0$. بالقسمة على i وإضافة الناتج إلى (1)، نحصل على $\langle T(w), v\rangle 0$، من أجل أي v,w∈V. إذن، $T = 0$.

24.20 بيّن أن المسألة 23.20 لا تظل صالحة من أجل فضاء حقيقي V؛ أي أعط مثالاً لمؤثر T على فضاء حقيقي V يكون من أجله $\langle T(u), u\rangle = 0$ من أجل كل u∈V، ولكن T≠0.

■ ليكن T المؤثر الخطي على R^2 المعرّف بواسطة $T(x, y) = (y, -x)$. إذن، $\langle T(u), u\rangle = 0$ من أجل كل u∈V، ولكن T≠0.

ملاحظة: ليكن A(V) جبر كل المؤثرات الخطية على فضاء جداء داخلي V منته ـ البعد. إن التطبيق القرين $T \mapsto T^*$ على A(V) مماثل لتطبيق المرافقة $z \mapsto \bar{z}$ على الحقل العقدي C، كما يبيّن ذلك الجدول 1.20. لاحظ أن الجدول يطابق

أصنافاً معينة من المؤثرات $T\in A(V)$ التي يحاكي سلوكها، تحت التطبيق القرين، سلوك أصناف معروفة من الأعداد العقدية تحت تطبيق المرافقة. وعلى الخصوص، ينعكس هذا التماثل، بين هذه الأصناف من المؤثرات T والأعداد العقدية، في المبرهنة 4.20 التي سوف نبرهن بعض أجزائها لاحقاً.

جدول 1.20

صنف الأعداد العقدية	السلوك تحت المرافقة	صنف المؤثرات في A(V)	السلوك تحت التطبيق القرين
المحور الحقيقي	$\bar{z}=z$	المؤثرات القرينة ـ لذاتها، تسمى أيضاً: متناظرة (الحالة الحقيقية) هرميتية (الحالة العقدية)	$T^*=T$
دائرة الوحدة ($\|z\|=1$)	$\bar{z}=1/z$	المؤثرات المتعامدة (الحالة الحقيقية) المؤثرات الواحدية (الحالة العقدية)	$T^*=T^{-1}$
المحور التخيلي	$\bar{z}=-z$	مؤثر القرين ـ المتخالف يسمى أيضاً: متناظر ـ تخالفياً (الحالة الحقيقية) هرميتي ـ تخالفياً (الحالة العقدية)	$T^*=-T$
النصف الموجب للمحور $(0,\infty)$	$z=\bar{w}w$ ، $w\neq 0$	مؤثرات معرّفة ـ موجبة	$T=S^*S$ حيث S غير شاذة

مبرهنة 4.20: لتكن λ قيمة ذاتية لمؤثر خطي T على V.

(i) إذا $T^*=T$، إذن λ حقيقية.

(ii) إذا $T^*=T^{-1}$، إذن $|\lambda|=1$.

(iii) إذا $T^*=-T$ إذن λ عدد تخيلي.

(iv) إذا $T=S^*S$، حيث S غير شاذ، إذن λ حقيقية وموجبة.

2.20 المؤثرات القرينة ـ لذاتها، المؤثرات المتناظرة

25.20 عرّف مؤثراً قريناً ـ لذاته.

■ نقول عن مؤثر T على V انه قرين ـ لذاته إذا $T^*=T$. يستخدم أيضاً الاصطلاحان متناظر وهرميتي من أجل المؤثرات القرينة ـ لذاتها على V عندما يكون الحقل الأساس **R** أو **C**، على الترتيب.

تشكل المبرهنات 5.20-8.20 المحتوى الرئيسي لهذا القسم.

مبرهنة 5.20: لنفترض أن T مؤثر قرين ـ لذاته على V، أي $T^*=T$. ولتكن λ قيمة ذاتية لـ T. إذن، λ حقيقية.

مبرهنة 6.20: لنفترض أن T قرين ـ لذاته، أي $T^*=T$. إذن، تكون المتجهات الذاتية لـ T المقرنة بقيم ذاتية مختلفة متعامدة.

مبرهنة 7.20: ليكن T مؤثر متناظر (قرين ـ لذاته) على فضاء جداء داخلي حقيقي منته ـ البعد. إذن، توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V متكوّنة من متجهات ذاتية لـ T؛ أي، أنه يمكن تمثيل T بواسطة مصفوفة قطرية نسبةً إلى قاعدة ناظمية ـ التعامد.

مبرهنة 8.20 [شكل بديل للمبرهنة 7.20]: لتكن A مصفوفة حقيقية متناظرة إذن، توجد مصفوفة متعامدة P بحيث أن $B = P^{-1}AP = P^{T}AP$ قطرية.

26.20 اثبت مبرهنة 5.20.

■ ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T مقرناً بـ λ، أي أن $T(v) = \lambda v$ حيث $v \neq 0$؛ وبالتالي، يكون $\langle v,v\rangle$ موجباً. سوف نبين أن $\lambda\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

ولكن $\langle v,v\rangle \neq 0$؛ وبالتالي، $\lambda = \bar{\lambda}$، أي أن λ حقيقية.

27.20 اثبت مبرهنة 6.20.

■ لنفترض أن $T(v) = \lambda v$ و $T(w) = \mu w$ حيث $\lambda \neq \mu$ سوف نبين أن $\lambda\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$:

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \bar{\mu}\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

[الخطوة الأخيرة تستخدم حقيقة أن μ حقيقية بسبب مبرهنة 5.25، إذن $\bar{\mu} = \mu$.] ولكن $\lambda \neq \mu$؛ وبالتالي $\langle v,w\rangle = 0$، وهو المطلوب.

28.20 ليكن T مؤثراً متناظراً على فضاء حقيقي V منته البعد. بيِّن أن (أ) الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ T جداء لعوامل خطية [فوق R]، (ب) T تمتلك متجها ذاتياً غير صفري.

■ (أ) لتكن A مصفوفة تمثل T بالنسبة لقاعدة ناظمية التعامد لـ V؛ إذن، $A = A^T$. لتكن $\Delta(t)$ الحدودية المميزة لـ A يكون لـ A، منظوراً إليها كمؤثر عقدي قرين ـ لذاته، قيماً ذاتية حقيقية فقط. وبذلك، $\Delta(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_n)$ حيث الـ λ_i حقيقية كلها. بتعبير آخر، تكون $\Delta(t)$ جداء لحدوديات خطية فوق R.

(ب) يكون لـ T، بواسطة (أ)، قيمة ذاتية [حقيقية] واحدة على الأقل.

29.20 اثبت مبرهنة 7.20.

■ يكون البرهان بالإستقراء على بعد V. إذا $\dim V = 1$، تحقق المبرهنة بديهياً. لنفترض الآن أن $\dim V = n > 1$. نعرف، من المسألة السابقة، أنه يوجد متجه ذاتي غير صفري v_1 لـ T. ليكن W الفضاء المُوَلَّد بواسطة v_1، وليكن u_1 متجه وحدة في W؛ أي ليكن $u_1 = v_1/\|v_1\|$.

بما أن v_1 متجهاً ذاتياً لـ T، فإن الفضاء الجزئي W في V يكون متغيراً تحت T. وبالتالي، يكون $W^\perp$ لا متغيراً تحت $T^* = T$. لذلك، فإن تقييد $\hat{T}$ لـ T على $W^\perp$ يكون مؤثراً متناظراً.

لدينا $\dim W^\perp = n-1$، لأن $\dim W = 1$. توجد، بالاستقراء، قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_2,\ldots,u_n\}$ لـ $W^\perp$ متكونة من متجهات ذاتية لـ $\hat{T}$، وبالتالي لـ T. ولكن $\langle u_1,u_i\rangle = 0$ من أجل $i = 2,\ldots,n$ لأن $u_i \in W^\perp$ ينتج عن ذلك أن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ مجموعة ناظمية ـ التعامد وتتكون من متجهات ذاتية لـ T. وهذا يكمل إثبات المبرهنة.

30.20 لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. أوجد مصفوفة (حقيقية) متعامدة P بحيث تكون P^TAP قطرية.

■ إن الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A هي

$$\Delta(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix}=t^2-6t+5=(t-5)(t-1)$$

وبذلك تكون قيمتا A الذاتيتين 5 و 1. نعوّض بـ $t=5$ في $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة: $2x-2y=0$، $-2x-2y=0$. والتي لها حلّ غير صفري $v_1=(1)$. نناظم v_1 لإيجاد الحل الوحدة $u_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

ثم نعوض بـ $t=1$ في المصفوفة $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة: $-2x-2y=0$، $-2x-2y=0$، والتي لها حلّ غير صفري $v_2=(1,-1)$. نناظم v_2 لإيجاد الحل الوحدة $u_2=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

لتكن أخيراً P المصفوفة التي عموديها u_1 و u_2، على الترتيب، إذن

$$P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^TAP=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وكما هو متوقع، فإن مدخلي P^TAP القطريين هما القيمتان الذاتيتان لـ A.

31.20 لتكن $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. أوجد مصفوفة متعامدة (حقيقية) P بحيث أن P^TBP تكون قطرية.

■ الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ B هي $\Delta(t)=|tI-B|=t^2-\text{tr}(B)t+|B|=t^2-2t-24=(t-6)(t+4)$. وبذلك، تكون القيمتان الذاتيتان $\lambda=6$ و $\lambda=-4$. وبالتالي

$$P^TBP=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

لإيجاد مصفوفة تغيير القاعدة P، يلزمنا إيجاد المتجهين الذاتيين المقابلين. نطرح $\lambda=6$ من عنصري قطر B، فنحصل على المنظومة المتجانسة $-x+3y=0$ ، $3x-9y=0$، والتي لها حلّ غير صفري $v_1=(3,1)$. نطرح $\lambda=-4$ من عنصري القطر في B، فنحصل على المنظومة المتجانسة، والتي لها حل غير صفري $v_2=(-1,3)$. [كما متوقع من مبرهنة 6.20، يكون المتجهان v_1 و v_2 متعامدين]. نناظم v_1 و v_2 فنحصل على القاعدة ناظمية التعامد $u_1=(3/\sqrt{10},1/\sqrt{10})$، $u_2=(-1/\sqrt{10},3/\sqrt{10})$ إذن

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

المسائل 32.20-38.20 لتقطير المصفوفة المتناظرة $C=\begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

32.20 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ C.

■ $\Delta(t)=t^3-\text{tr}(C)t^2+(C_{11}+C_{22}+C_{33})t-|C|=t^3-6t^2-135t-400$. [هنا، C_{ii} هو متعامل c_{ii} في $C=(c_{ij})$].

33.20 أوجد القيم الذاتية لـ C أو، بتعبير آخر، جذور $\Delta(t)$.

■ إذا كان لـ $\Delta(t)$ جذر منطق فلا بد أن يقسم 400. نختبر $t=-5$، فنحصل على

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & -6 & -135 & -400 \\ & & -5 & +55 & +400 \\ \hline & 1 & -11 & -80 & +0 \end{array}$$

وبذلك، يكون $t+5$ عاملاً في $\Delta(t)$ ، وتكون $\Delta(t)=(t+5)(t^2-11t-80)=(t+5)^2(t-16)$. ينتج عن ذلك أن القيم الذاتية لـ C هي $\lambda=-5$ [بتكرار 2] و $\lambda=16$ [بتكرار 1].

34.20 أوجد متجهين ذاتيين متعامدين مقرنين بالقيمة الذاتية $\lambda = -5$.

■ نطرح $\lambda = -5$ من قطر C، فنحصل على المنظومة المتجانسة $16x - 8y + 4z = 0$، $-8x + 4y - 2z = 0$، $4x - 2y + z = 0$. ويكون للمنظومة حلاّن مستقلاّن. حلّ مثل هذا يكون $v_1 = (0,1,2)$. نبحث عن حلّ ثان $v_2 = (a,b,c)$ الذي يكون متعامداً مع v_1، أي بحيث أن $4a - 2b + c = 0$ وأيضاً $b - 2c = 0$. حلّ مثل هذا يكون $v_2 = (-5,-8,4)$.

35.20 أوجد متجهاً ذاتياً v_3 مقرناً بالقيمة الذاتية $\lambda = 16$.

■ نطرح $\lambda = 16$ من قطر C فنحصل على المنظومة المتجانسة: $-5x - 8y + 4z = 0$، $-8x - 17y - 2z = 0$، $4x - 2y - 20z = 0$. وبذلك، تعطينا المنظومة حلاً غير صفري $v_3 = (4,-2,1)$. [كما هو متوقع من مبرهنة 6.20 (ب)، يكون المتجه الذاتي v_3 متعامداً مع v_1 و v_2].

36.20 أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث أن $P^{-1}CP$ قطرية.

■ ننـاظـم v_1، v_2، v_3 فنحصـل على القـاعـدة نـاظمية ـ التعـامـد $u_1 = (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$، $u_2 = (-5/\sqrt{105}, -8/\sqrt{105}, 4/\sqrt{105})$، $u_3 = (4/\sqrt{21}, -2/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21})$. إذن، تكون P المصفوفة التي أعمدتها u_1، u_2، u_3. وبذلك،

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -5/\sqrt{105} & 4/\sqrt{21} \\ 1/\sqrt{5} & -8/\sqrt{105} & -2/\sqrt{21} \\ 2/\sqrt{5} & 4/\sqrt{105} & 1/\sqrt{21} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^TCP = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & -5 & \\ & & 16 \end{pmatrix}$$

37.20 ليكن الشكل التربيعي $q(x,y,z) = 11x^2 - 16xy - y^2 + 8xz - 4yz - 4z^2$. أوجد تغييراً متعامداً للإحداثيات يحول q إلى الشكل القطري.

■ بما أن C هي المصفوفة التي تمثل q، نستخدم المصفوفة P أعلاه فنحصل على التغيير المطلوب للإحداثيات:

$$x = \qquad - \frac{5y'}{\sqrt{105}} + \frac{4z'}{\sqrt{21}}$$
$$y = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{8y'}{\sqrt{105}} - \frac{2z'}{\sqrt{21}}$$
$$z = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{4y'}{\sqrt{105}} + \frac{z'}{\sqrt{21}}$$

يتحول q، تحت هذا التغيير للإحداثيات، إلى الشكل القطري $q(x',y',z') = -5x' - 5y' + 16z'$.

38.20 أوجد تأشيرة q.

■ بمـا أن هنـاك مـدخلين قطـريين سـالبين ومـدخـل قطـري مـوجـب، $N = 2$ و $P = 1$. وبـذلـك، $Sig(q) = P - N = 1-2 = -1$.

39.20 لنفترض أن T قرين ـ لذاته وأن $\langle T(u),u\rangle = 0$ من أجل كل $u \in V$. بيّن أن $T = 0$.

■ نعرف، من المسألة 23.20، أن النتيجة صحيحة من أجل الحالة العقدية؛ وبالتالي، نحتاج فقط إلى النظر في الحالة الحقيقية. نفك $\langle T(v + w),v + w\rangle = 0$، فنحصل على

$$\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0 \qquad (1)$$

بما أن T قرين ـ لذاته، وبما أن الفضاء حقيقي، يكون لدينا $\langle T(w),v\rangle = \langle w,T(v)\rangle = \langle T(v),w\rangle$. بالتعويض بهذا في (1)، نحصل على $\langle T(v),w\rangle = 0$ من أجل أي $v,w \in V$. وبذلك، $T = 0$.

40.20 لنفترض أن T قرين لذاته و $T^2 = 0$. بيّن أن $T = 0$.

■ لـديـنـا، مـن أجـل أي $v \in V$، $\|T(v)\|^2 = \langle T(v),T(v)\rangle = \langle v,T^2(v)\rangle = \langle v,0v\rangle = \langle v,0\rangle = 0$. وبـذلـك، $\|T(v)\| = 0$. إذن، $T(v) = 0$. بما أن $T(v) = 0$ من أجل كل $v \in V$، يكون لدينا $T = 0$.

41.20 بيّن أن T^*T و TT^* قرينان ـ لذاتهما، من أجل أي مؤثر T على V.

■ $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$، وبالتالي، يكون T^*T قريناً ـ لذاته. أيضاً، $(TT^*)^* = T^{**}T^* = TT^*$؛ وبالتالي، يكون TT^* قريناً لذاته.

42.20 بيّن أن $T + T^*$ قرين لذاته، من أجل أي مؤثر T على V.

■ $(T + T^*)^* = T^* + T^{**} = T^* + T = T + T^*$؛ وبالتالي، يكون $T+T^*$ قريناً ـ لذاته.

43.20 عرِّف مؤثر القرين ـ المتخالف.

■ نقول عن مؤثر خطي T على V أنه قرين ـ متخالف إذا $T^* = -T$.

44.20 لنفترض أن T قرين ـ متخالف، أي لنفترض $T^* = -T$. لتكن λ قيمة ذاتية لـ T. بيِّن أن λ عدد تخيلي، أي أن $\bar{\lambda} = -\lambda$.

■ ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T مقرناً بـ λ، أي أن $T(v) = v$ مع $v \neq 0$. وبالتالي، $\langle v,v\rangle \neq 0$. نبين أن $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle = \langle v,T^*(v)\rangle = \langle v,-T(v)\rangle = \langle v,-\lambda v\rangle = -\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$؛ $\lambda\langle v,v\rangle = -\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$. ولكن $\langle v,v\rangle \neq 0$؛ وبالتالي $\lambda = -\bar{\lambda}$ أو $\bar{\lambda} = -\lambda$. وبذلك، تكون λ تخيلية.

45.20 بيّن أن $T-T^*$ قرين ـ متخالف من أجل أي مؤثر خطي T على V.

■ $(T - T^*)^* = T^* - T^{**} = T^* - T = -(T - T^*)$؛ وبالتالي، يكون $T - T^*$ قرين ـ متخالف.

46.20 بيّن أن أي مؤثر T يكون مجموع مؤثر قرين ـ لذاته ومؤثر قرين ـ متخالف.

■ نضع $S = 1/2\,(t + t^*)$ و $u = 1/2\,(T - T^*)$. إذن $T = S + U$ حيث

$$S^* = (1/2\,(T + T^*))^* = 1/2\,(T^* + T^{**}) = 1/2\,(T^* + T) = S$$

و $U^* = (1/2\,(T - T^*))^* = 1/2\,(T^* - T) = -1/2\,(T - T^*) = -U$. أي أن S قرين ـ لذاته و U قرين ـ متخالف.

3.20 مؤثرات متعامدة وواحدية

47.20 عرِّف مؤثراً متعامداً وواحدياً.

■ ليكن U مؤثراً عكوساً على V بحيث أن $U^* = U^{-1}$ أو، بشكل بديل، $UU^* = U^*U = I$، إذن نقول أن U «متعامد» أو «واحدي» وفقاً لكون الحقل الأساس حقيقياً أو عقدياً.

تعطينا، مبرهنة 9.20، والتي سوف تبرهن في المسألة 55.20، تمييزاً بديلاً لهذه المؤثرات.

مبرهنة 9.20: الشروط التالية، حول مؤثر U، تكون متكافئة:

(i) $U^* = U^{-1}$، أي أن $UU^* = U^*U = I$ [أو U واحدي (متعامد)].

(ii) يحافظ U على الجداءات الداخلية، أي أن $\langle U(v),U(w)\rangle$ من أجل كل $v,w \in V$.

(iii) U يحافظ على الأطوال، أي أن $\|U(v)\| = \|v\|$، من أجل كل $v \in V$.

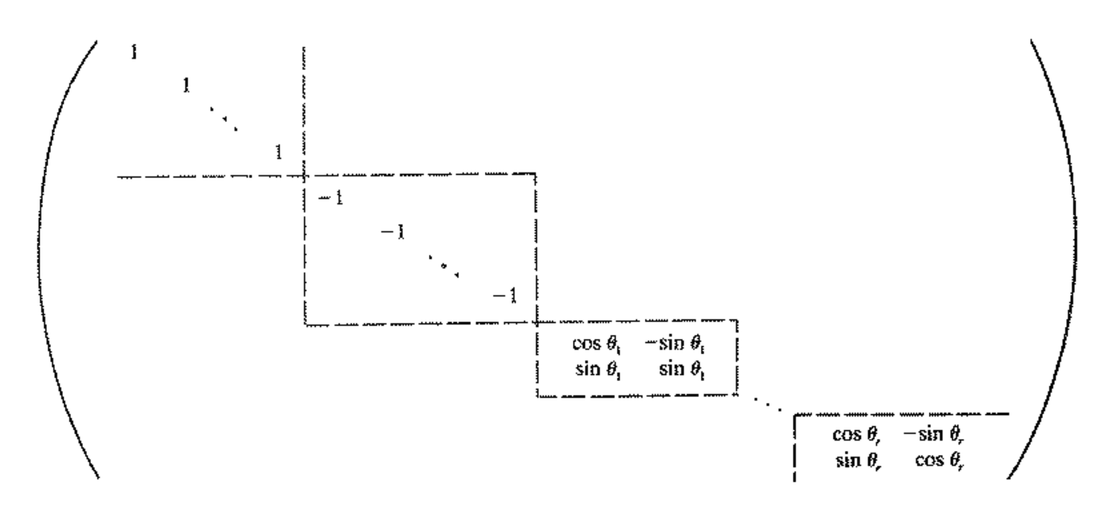
وليس من الضروري أن يكون مؤثراً متعامداً متناظراً، وبذلك قد لا يمثل بواسطة مصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة ناظمية ـ التعامد. ومع ذلك، فإنه يكون لمؤثر T مثل هذا التمثيل القانوني البسيط، كما تصفه مبرهنة 10.20 [والتي سوف يتم إثباتها في المسألة 58.20].

مبرهنة 10.20: ليكن T مؤثراً متعامداً على فضاء جداء داخلي حقيقي V. إذن، توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد B لـ V بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ T في القاعدة B يكون في شكل المصفوفة في شكل 20-1.

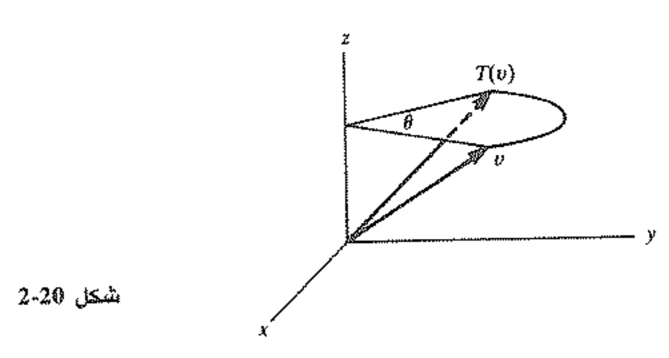
[قد يتعرف القارىء على أن القوالب القطرية 2×2، في شكل 20-1، تمثل دورانات للفضاءات الجزئية ثنائية البعد المقابلة].

48.20 لنفترض أن $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ هو المؤثر الخطي الذي يدير كل متجه v حول محور -z بزاوية ثابتة θ، أي بفرض أن $T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$. هل T متعامد؟

■ كما يتضح من شكل 20-2، فإن طول v (المسافة من نقطة الأصل) لا يتغير تحت الدوران T. وبذلك، يكون T مؤثراً متعامداً.



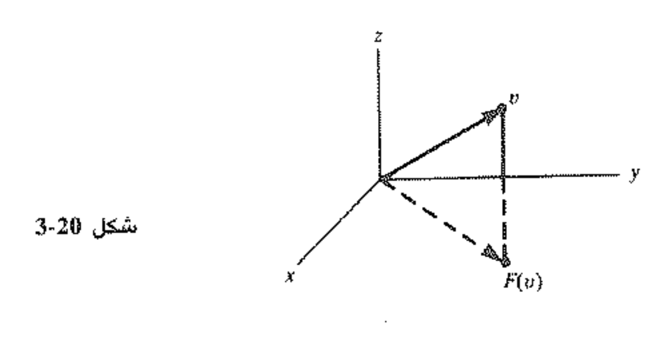
شكل 20-1



شكل 20-2

49.20 ليكن $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المؤثر الخطي الذي يعكس كل متجه v خلال المستوى -xy، أي ليكن $F(x,y,z) = (x,y,-z)$. هل F متعامد؟

■ يتضح من شكل 20-3 أن طول T لا يتغير تحت الانعكاس F. وبذلك، يكون F متعامداً.



شكل 20-3

50.20 أعط مثالاً لفضاء متجهي V لا نهائي البعد، وتطبيقاً خطياً $T: V \to V$، لا تتحقق من أجلها مبرهنة 9.20.

■ ليكن V الفضاء -l_2 للمتتاليات اللانهائية $v = (a_1, a_2, \ldots)$. أو أرقام الحقيقية a_i بحيث أن $\sum a_i^2 < \infty$ وليكن

$T: V \to V$ المؤثر الخطي المعرّف بواسطة $T(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$. من الواضح، أن T يحافظ على الجداءات الداخلية والأطوال. ومع ذلك، لا يكون T غامراً لأن $(1,0,0,\ldots)$، مثلاً، لا ينتمي لصورة T، وبالتالي، لا يكون T عكوساً.

51.20 لنفترض أن U واحدي [متعامد]. بيّن أن u تقايس على V.

■ إن تقايساً على V هو تطبيق يحافظ على المسافات. [تذكر أن $d(v,w) = \|v - w\|$ هي المسافة بين v و w]. بما أن U واحدي [متعامد]، إذن $\|U(v) - U(w)\| = \|U(v - w)\| = \|v - w\|$. وبذلك، يكون U تقايساً.

52.20 لنفترض أن T واحدي [متعامد]. ولتكن λ قيمة ذاتية لـ T. بين أن $|\lambda| = 1$.

■ ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T مقرناً بـ λ، أي أن $T(v) = \lambda v$ مع $v \neq 0$؛ وبالتالي، يكون $\langle v, v\rangle$ موجباً. نبين أن $\lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle = \langle v, I(v)\rangle = \langle v, v\rangle$؛ $\lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle$. ولكن $\langle v, v\rangle \neq 0$؛ وبالتالي، $\lambda\bar{\lambda} = 1$. إذن، $|\lambda| = 1$.

مبرهنة 11.20: إن مصفوفة عقدية A تمثل مؤثراً واحدياً U [بالنسبة لقاعدة ناظمية التعامد] إذا وفقط إذا $A^* = A^{-1}$.

مبرهنة 12.20: إن مصفوفة حقيقية A تمثل مؤثراً متعامداً U [بالنسبة لقاعدة ناظمية ـ التعامد] إذا وفقط إذا $A^T = A^{-1}$. [أي أن المصفوفات الواحدية والمتعامدة تمثل مؤثرات واحدية ومتعامدة، على الترتيب، وبالعكس].

53.20 اثبت مبرهنتي 11.20 و 12.20.

■ نعرف، من مبرهنة 1.20، أن المؤثر القرين U^* يمثل بواسطة A^* في الحالة العقدية و A^T في الحالة الحقيقية. وبذلك، $UU^* = I$ إذا وفقط إذا $A^*A = I$ في الحالة العقدية و $A^TA = I$ في الحالة الحقيقية. وبتعبير آخر، يكون T واحدياً [متعامداً] إذا وفقط إذا $A^* = A^{-1}$ $[A^T = A^{-1}]$.

54.20 بيّن أن $T^*T - I$ قرين ـ لذاته، من أجل أي مؤثر خطي T.

■ $(T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*T^{**} - I = T^*T - I$. إذن $T^*T\text{-}I$ قريناً ـ لذاته.

55.20 اثبت مبرهنة 9.20.

■ لنفترض أن تتحقق (i). إذن، $\langle U(v), U(w)\rangle = \langle v, U^*U(w)\rangle = \langle v, I(w)\rangle = \langle v, w\rangle$، من أجل كل $v,w \in V$. وبذلك، (i) تقتضي (ii). الآن، إذا تحققت (ii)، فإن $\|U(v)\| = \sqrt{\langle U(v), U(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|$، وبالتالي، (ii) تقتضي (iii). يبقى أن نبين أن (iii) تقتضي (i).

لنفترض تحقق (iii). إذن، $\langle U^*U(v), v\rangle = \langle U(v), U(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \langle I(v), v\rangle$. من أجل كل $v \in V$. وبالتالي، $\langle (U^*U - I)(v), v\rangle = 0$ من أجل كل $v \in V$. بما أن $U^*U - I$ قرين ـ لذاته، فيكون لدينا $U^*U - I = 0$. وبالتالي $U^*U = I$ إذن، $U^* = U^{-1}$ وهو المطلوب.

56.20 ليكن U مؤثراً واحدياً [متعامداً] على V، وليكن W فضاء جزئياً لا متغيراً تحت U. بين أن $W^\perp$ لا متغير تحت U.

■ بما أن U غير شاذ، فإن $U(W) = W$؛ أي أنه يوجد، من أجل أي $w \in W$، متجه $w' \in W$ بحيث أن $U(w') = w$. ليكن الآن $v \in W^\perp$. إذن $\langle U(v), w\rangle = \langle U(v), U(w')\rangle = \langle v, w'\rangle = 0$. من أجل أي $w \in W$. وبذلك، ينتمي $U(v)$ إلى $W^\perp$. إذن، يكون $W^\perp$ لا متغيراً تحت U.

57.20 بيّن أن كل مصفوفة 2×2 متعامدة A، بحيث أن $\det(A) = 1$، تكون في الشكل $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ من أجل عدد حقيقي θ.

■ لنفترض أن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. بما أن A متعامدة، فإن صفوفها تشكل مجموعة ناظمية التعامد؛ وبالتالي، $a^2 + b^2 = 1$، $c^2 + d^2 = 1$، $ac + bd = 0$، $ad - bc = 1$. المعادلة الأخيرة ناتجة من أن $\det(A) = 1$. ننظر في الحالتين $a = 0$ و $a \neq 0$ كلاً على حدة.

إذا $a = 0$، تعطينا المعادلة الأولى $b^2 = 1$ وبذلك $b = \pm 1$. عندئذ، نحصل من المعادلة الرابعة على $c - b = \pm 1$، ومن المعادلة الثانية على $1 + d^2 = 1$ أو $d = 0$. إذن

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

البديل الأول يكون في الشكل المطلوب بـ $\theta = -\pi/2$، أما البديل الثاني فيكون في الشكل المطلوب عندما $\theta = \pi/2$.

إذا $a \neq 0$، يمكن حل المعادلة الثالثة لتعطي $c = -bd/a$. بالتعويض بهذه في المعادلة الثانية، نجد $b^2d^2/a^2 + d^2 = 1$ أو $b^2d^2 + a^2d^2 = a^2$ أو $(b^2 + a^2)d^2 = a^2$ أو $a^2 = d^2$، وبذلك $a = d$ أو $a = -d$. إذا $a = -d$، إذن المعادلة الثالثة تعطي $c = b$ وبذلك تعطينا المعادلة الرابعة $-a^2 - c^2 = 1$ وهو أمر مستحيل. إذن، $a = d$. ولكن المعادلة الثالثة تعطينا عندئذ $b = -c$ وبذلك

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

بما أن $a^2 + c^2 = 1$، فيوجد عدد حقيقي θ بحيث أن $a = \cos\theta$، $c = \sin\theta$؛ بالتالي يكون لـ A، في هذه الحالة أيضاً، الشكل المطلوب.

58.20 أثبت مبرهنة 10.20: ليكن T مؤثراً متعامداً على فضاء جداء داخلي حقيقي V. إذن، توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد B على V بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ T في هذه القاعدة، يكون مصفوفة مركبة قطرية بقوالب. قطرية متكونة من الرقمين 1 و -1، وقوالب في الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

(أنظر شكل 20-1).

■ $S = T + T^{-1} = T + T^*$. إذن، $S^* = (T + T^*)^* = T^* + T = S$. وبذلك، يكون S مؤثراً متناظراً على V. نعرف، من مبرهنة 7.20، أنه توجد قاعدة ناظمية التعامد لـ V تتكون من متجهات ذاتية لـ S. إذا كانت $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ترمز للقيم الذاتية المختلفة لـ S، فإنه يمكن تحليل V إلى المجموع المباشر $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$ حيث يتكون V_i لـ من المتجهات الذاتية المقترنة بـ λ_i. سوف نبين أن كل V_i لا متغير تحت T. لنفترض أن $v \in V_i$؛ إذن $S(v) = \lambda_i v$ و $S(T(v)) = (T + T^{-1})T(v) = T(T + T^{-1})(v) = TS(v) = T(\lambda_i v) = \lambda_i T(v)$. أي أن $T(v) \in V_i$. وبالتالي، يكون V_i لا متغيراً تحت T. بما أن الـ V_i متعامدة، كل واحد منها مع الآخر، فإنه يمكننا حصر بحثنا في الطريقة التي يؤثر بها T على كل V_i لوحده.

لدينا، على كل V_i، أن $(T + T^{-1})v = S(v) = \lambda_i v$. نضرب في T، فنحصل على $(T^2 - \lambda_i T + I)(v) = 0$. ننظر في الحالتين $\lambda = \pm 2$ و $\lambda \neq \pm 2$، بشكل منفصل. إذا $\lambda = \pm 2$، إذن $(T \pm I)^2(v) = 0$ وهذا يقود إلى $(T \pm I)(v) = 0$ أو $T(v) = \pm v$. وبذلك تكون T، مقيدة على هذه الـ V_i، إما I أو $-I$.

إذا $\lambda_i \neq \pm 2$، إذا لا يكون لـ T متجهات ذاتية [المسألة 52.20] لأن القيمتين الذاتيتين لـ T هما 1 أو -1. ينتج عن ذلك، ومن أجل $v \neq 0$، أن v و $T(v)$ مستقلان ذاتياً. ليكن W الفضاء الجزئي المولّد بواسطة v و $T(v)$. إذن، يكون W لا متغيراً تحت T، لأن $T(T(v)) = T^2(v) = \lambda_i T(v) - v$. لدينا أيضاً $V_i = W \oplus W^\perp$. كما أن $W^\perp$ لا متغير أيضاً تحت T [المسألة 56.20]. وبذلك، يمكننا تحليل V_i إلى المجموع المباشر لفضاءات جزئية ثنائية ـ البعد W_j، حيث الـ W_j متعامدة ثنائياً، وحيث كل W_j لا متغير تحت T. وبذلك، يمكننا الآن أن نقصر بحثنا على الطريقة التي يؤثر بها T على كل W_j لوحده.

بما أن $T^2 - \lambda_i T + I = 0$، فإن الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ T، مؤثراً على W_j، يكون $\Delta(t) = t^2 - \lambda_i t + 1$. وبذلك، فإن محددة T تساوي 1، وهو الحد الثابت في $\Delta(t)$. ينتج، من مسالة 57.20، أن المصفوفة A الممثلة لـ T (بتأثيره على W_j) نسبة لأي قاعدة ناظمية ـ التعامد W_j يجب أن تكون في الشكل

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ويعطينا إتحاد قواعد الـ W_j قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V_i، ويعطينا إتحاد قواعد الـ V_i قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V يكون فيها التمثيل المصفوفي لـ T في الشكل المطلوب.

4.20 مؤثرات موجبة ومعرّفة ـ موجبة

59.20 عرّف مؤثراً موجباً ومعرّفاً ـ موجباً.

■ نقول عن مؤثر خطي، P، على فضاء جداء داخلي V، أنه موجب [أو نصف ـ معرّف] إذا $P = S^*S$ من أجل مؤثر ما S، وبأنه معرّف ـ موجب إذا كان S غير شاذ أيضاً.

60.20 بيّن ان مؤثراً موجباً [أو معرفاً موجباً] P يكون ايضاً قريناً ـ لذاته.

■ لدينا، من التعريف، أن $P = S^*S$ من أجل بعض S. وبالتالي، $P^* = (S^*S)^* = S^*S^{**} = S^*S = P$. وبذلك يكون P قريناً ـ لذاته.

المبرهنتان 13.20 و 14.20 المثبتتان في المسألتين 69.20 و 70.20، تعطيان تمييزات بديلة لهذه المؤثرات.

مبرهنة 13.20: الشروط التالية، حول مؤثرٍ P، متكافئة.

(i) $P = T^2$، من أجل مؤثر قرين ـ لذاته -T.

(ii) $P = S^*S$، من أجل مؤثر S.

(iii) يكون P قريناً ـ لذاته و $\langle P(u),u\rangle \geqslant 0$ من أجل كل $u \in V$.

المبرهنة المقابلة من أجل المؤثرات المعرّفة ـ موجبة هي

مبرهنة 14.20: الشروط التالية، حول مؤثرٍ P، متكافئة:

(i) $P = T^2$، من أجل مؤثر غير صفري قرين ـ لذاته T.

(ii) $P = S^*S$، من أجل مؤثر غير شاذ S.

(iii) يكون P قريناً ـ لذاته و $\langle P(u),u\rangle\, 0$ من أجل كل $u \neq 0$ في V.

مبرهنة 15.20: تمثل مصفوفة عقدية $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مؤثراً موجباً [موجباً ـ معرّفاً] إذا وفقط إذا كانت A قرينة ـ لذاتها [أي إذا $A^* = A$ في الحالة العقدية و $A^T = A$ في الحالة الحقيقية] وكانت a، d، $|A| = ad - bc$ أعداداً حقيقية غير سالبة [موجبة].

المسائل 61.20-66.20 تتعلق بمبرهنة 15.20 والمصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

61.20 هل A معرّف ـ موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن $|A| = 0$، فإن A ليست معرّفة موجبة. ومع ذلك، فإن A موجبة لأن $a = 1$، $d = 1$، $|A| = 0$ أعداد غير سالبة.

62.20 هل B معرّفة ـ موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن $a = 3$، $d = 3$، $|B| = 8$ أعداد موجبة. إذن، تكون B موجبة ـ معرّفة [وبالتالي موجبة].

63.20 هل C معرّفة ـ موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن C ليست قرينة لذاتها أي أن $C^T \neq C$، فإن C ليست معرّفة موجبة، وليست موجبة.

64.20 هل D معرّفة موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن $a = 2$ ، $d = 2$ ، $|D| = 3$ أعداد موجبة، فإن D تكون معرّفة موجبة [وبالتالي موجبة].

65.20 هل E معرّفة موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن $|E| = 0$ ، فإن E ليست معرّفة موجبة. ومع ذلك، فإن E موجبة لأن $a = 1$ ، $d = 1$ ، و $|E| = 0$ أعداد غير سالبة.

66.20 هل F معرّفة موجبة؟ موجبة؟

■ بما أن $|F| = -3$ ، فإن F لا تكون معرّفة موجبة، ولا تكون موجبة.

67.20 لنفترض أن T مُوجب. ولتكن λ قيمة ذاتية لـ T. بيّن أن λ حقيقية وغير سالبة.

■ بما أن T موجب، فهو قرين ـ لذاته؛ وبالتالي، λ حقيقية. ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T مقرناً بـ λ ، أي أن $T(v) = \lambda v$ ، $v \neq 0$؛ وبالتـالـي، $\langle v,v \rangle$ مـوجـب. بمـا أن T مـوجـب، فـإن $T = S^*S$ مـن أجـل مـؤثـرٍ S. نبيـن أن $\lambda\langle v,v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle$: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle = \langle S^*S(v),v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle$. بمـا أن $\langle S(v),S(v)\rangle$ غيـر سـالـب و $\langle v,v\rangle$ موجب، فيكون لدينا أن λ غير سالبة، وهو المطلوب.

68.20 لنفترض أن T معرّف موجب. ولتكن λ قيمة ذاتية لـ T. بيّن ان λ حقيقية وموجبة.

■ بما أن T معرّف ـ موجب، فهو قرين ـ لذاته؛ وبالتالي، تكون λ حقيقية. ليكن v متجهاً ذاتياً غير صفري لـ T مقرناً بـ λ ، أي أن $T(v) = \lambda v$ ، $v \neq 0$؛ وبالتالي، $\langle v,v\rangle$ موجب. بما أن T معرّف ـ موجب، فإن $T = S^*S$ من اجل مؤثر غيـر شـاذ S. وبـذلـك، $S(v) \neq 0$؛ وبـالـتـالـي يكـون $\langle S(v),S(v)\rangle$ مـوجبـاً. نبيـن أن $\lambda\langle v,v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle$: $\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \langle T(v),v\rangle = \langle S^*S(v),v\rangle = \langle S(v),S(v)\rangle$. بما أن $\langle v,v\rangle$ و $\langle S(v),S(v)\rangle$ موجبان ، فإن λ تكون موجبة، وهو المطلوب.

69.20 أثبت مبرهنة 13.20.

■ لنفترض أن (i) متحققة، أي أن $P = T^2$ حيث $T^* = T$. إذن، $P = TT = T^*T$ وبذلك (i) تقتضي (ii). لنفترض الآن تحقـق (ii). إذن $P^* = (S^*S)^* = S^*S^{**} = S^*S = P$. إذن، تـكـون P قـريـنـة ـ لـذاتهـا. كمـا أن $\langle P(u),u\rangle = \langle S^*S(u),u\rangle = \langle S(u),S(u)\rangle \geq 0$. ولذلك، (ii) تقتضي (iii). يبقى علينا أن نثبت أن (iii) تقتضي (i).

لنفترض الآن تحقق (iii). بما أن P قرينة ـ لذاتها، فتوجد قاعدة ناظمية التعامد $\{u_1,...,u_n\}$ لـ V متكونة من متجهات ذاتية لـ P، أي أن $P(u_i) = \lambda_i u_i$. نجد، من المسألة 67.20، أن الـ λ_i أعداد حقيقية غير سالبة. وبذلك، يكون $\sqrt{\lambda_i}$ عدداً حقيقياً. ليكن T المؤثر الخطي المعرف بواسطة $T(u_i) = \sqrt{\lambda_i}u_i$ ، من أجل $i = 1,...,n$. بما أن T ممثل بواسطة مصفوفة قطـريـة حقيقيـة بـالنسبـة للقـاعـدة نـاظمية ـ التعـامـد $\{u_i\}$ ، فـإن T يكـون قـريـنـاً ـ لـذاتـه. وبـالإضـافـة إلـى ذلـك، $T^2(u_i) = T(\sqrt{\lambda_i}u_i) = \sqrt{\lambda_i}T(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}u_i = \lambda_i u_i = P(u_i)$. لأجل كل i. بما أن T^2 و P يتوافقان على قاعدةٍ لـ V، إذن $P = T^2$. وهذا يكمل إثبات المبرهنة.

70.20 أثبت مبرهنة 14.20.

■ لنفترض نحقق (i)، أي أن $P = T^2$ ، حيث T غير شاذ و $T^* = T$. إذن، $P = TT = T^*T$ ، وبالتالي (i) يقتضي (ii). لنفترض الآن أن (ii) متحققة. إذن، $P^* = (S^*S)^* = S^*S^{**} = S^*S = P$ ، وبذلك يكون P قريناً ــ لذاته. لنفترض أن $u \neq 0$. إذن، $S(u) \neq 0$ لأنّ S غير شاذ؛ وبالتالي $\langle S(u),S(u)\rangle > 0$. إذن، $\langle P(u),u\rangle = \langle S^*S(u),u\rangle = \langle S(u),S(u)\rangle > 0$. وبذلك، (ii) بقتضي (iii)، ويبقى علينا إثبات أن (iii) يقتضي (i).

لنفترض الآن أن (iii) متحقق. بما أن P قرين ـ لذاته، فيوجد قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_1,...,u_n\}$ لـ V متكونة من متجهات ذاتيـة لـ P: أي أن $P(u_i) = \lambda_i u_i$. نعـرف، مـن مسـالـة 68.20، أن الـ λ_i أعـداد حقيقية مـوجبـة. وبـذلـك، يكـون $\sqrt{\lambda_i}$ عـدداً حقيقيـاً موجبـاً . ليكـن T المؤثـر الخطـي المـعـرّف بـ $T(u_i) = \sqrt{\lambda_i}u_i$ ، من أجل $i = 1,...,n$. بما أن T

ممثل بواسطة مصفوفة قطرية حقيقية بالنسبة للقاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_i\}$ ، فإن T يكون قريناً ـ لذاته، وبما أن المداخل القطرية غير صفرية، فإن T غير شاذ. ولدينا، بالإضافة إلى ذلك ومن أجل كل i، أن $T^2(u_i) = T(\sqrt{\lambda_i}u_i) = \sqrt{\lambda_i}T(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}u_i = \lambda_i u_i = P(u_i)$. بما أن T^2 و P متوافقان على قاعدة لـ V، فإن $P = T^2$.
وهذا يكمل إثبات المبرهنة.

ملاحظة: إن المؤثر T أعلاه هو المؤثر المعرف ـ موجب الوحيد بحيث أن $P = T^2$؛ ويسمّى الجذر التربيعي الموجب لـ P.

71.20 لنفترض أن A مصفوفة قطرية ذات مداخل قطرية حقيقية، لتكن $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. بيّن أن A معرّفة ـ موجبة.

■ ليكن T المصفوفة القطرية T ذات المداخل القطرية $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. إذن، $A = T^2$ حيث T غير شاذة وقرينة ـ لذاتها [متناظرة]. وبالتالي، تكون A معرّفة موجبة.

72.20 لتكن A مصفوفة حقيقية معرّفة موجبة، ولتكن Q مصفوفة متعامدة. بيّن أن $Q^TAQ = Q^{-1}AQ$ معرّفة موجبة.

■ بما أن A مصفوفة حقيقية معرّفة موجبة، فإن $A = S^TS$ حيث S غير شاذة. إذن، $Q^TAQ = Q^T(S^TS)Q = (SQ)^T(SQ)$ حيث SQ غير شاذة. وبذلك، تكون Q^TAQ معرّفة موجبة.

المسائل 73.20-77.20 يتعلق بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

73.20 هل A معرّفة موجبة؟

■ بما أن $a_{11} = 5$، $a_{22} = 5$، و $|A| = 24$ أعداد موجبة، فإن A تكون مصفوفة معرّفة موجبة.

74.20 أوجد مصفوفة متعامدة Q بحيث تكون Q^TAQ قطرية.

■ الحدودية المتميزة $\Delta(t)$ لـ A تكون

$$\Delta(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-5 & -1 \\ -1 & t-5 \end{vmatrix} = t^2 - 10t + 24 = (t-6)(t-4)$$

وبذلك، تكون القيمتان الذاتيتان 6 و 4 نعوض بـ $t = 6$ في المصفوفة $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة $x - y = 0$، $-x + y = 0$. التي لها حلّ غير صفري $v_1 = (1,1)$. نناظم v_1 لإيجاد الحل الوحدة $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
ثم نعوض بـ $t = 4$ في المصفوفة $tI - A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة $-x - y = 0$ ، $-x - y = 0$ ، والتي لها حل غير صفري $v_2 = (1,-1)$. نناظم v_2، فنجد الحل الوحدة $u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

لتكن أخيراً Q المصفوفة التي عموديها u_1 و u_2 على الترتيب؛ إذن

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad Q^TAQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

75.20 أوجد الجذر التربيعي S لـ $B = Q^TAQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

■ نأخذ الجذرين التربيعيين للمدخلين القطريين فنحصل على $S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

76.20 بيّن أن $T = QSQ^T$ هو الجذر التربيعي لـ A.

■ لدينا $B = Q^TAQ = Q^{-1}AQ$، وبالتالي، $A = QBQ^{-1} = QBQ^T$. إذن، $T^2 = (QSQ^T)(QSQ^T) = (QSQ^{-1})(QSQ^{-1}) = QS^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = A$. أيضاً، ومن المسألة 71.20، تكون T معرّفة موجبة. وبذلك، تكون T الجذر التربيعي الموجب لـ A.

77.20 أوجد T، الجذر التربيعي الموجب لـ A.

■
$$T = QSQ^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & \sqrt{6}-2 \\ \sqrt{6}-2 & \sqrt{6}+2 \end{pmatrix}$$

5.20 المؤثرات الناظمية

78.20 عرّف مؤثراً ناظمياً.

■ نقول عن مؤثر خطي T، على فضاء جداء داخلي V، أنّه ناظمي إذا كان T يتبادل مع قرينه، أي إذا $TT^* = T^*T$.
[بالمثل، تكون مصفوفة عقدية A ناظمية إذا $AA^* = A^*A$، وتكون مصفوفة حقيقية ناظمية إذا $AA^T = A^TA$].

79.20 بيّن أن المؤثرات القرينة ـ لذاتها والواحدية [المتعامدة] تكون ناظمية.

■ لنفترض أن $T^* = T$ أي أن T قرين ـ لذاته. إذن، $TT^* = TT = T^*T$، وبالتالي يكون T ناظمياً. لنفترض أن $T^* = T^{-1}$، أي أن T واحدي [متعامد]. إذن، $TT^* = I = T^*T$، وبالتالي يكون T ناظمياً.

مبرهنة 16.20: ليكن T مؤثراً ناظمياً على فضاء جداء داخلي عقدي منته ـ البعد V. إذن، توجد قاعدة ناظمية ـ التعامد لـ V متكونة من متجهات ذاتية لـ T؛ أي أنه يمكن تمثيل T بواسطة مصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة ناظمية ـ التعامد.

نقدم فيما يلي المنطوق المقابل من أجل المصفوفات:

مبرهنة 17.20[شكل بديل لمبرهنة 5.20]: لتكن A مصفوفة ناظمية. إذن، توجد مصفوفة واحدية P بحيث أن $B = P^{-1}AP = P^*AP$ تكون قطرية.

المسائل 80.20-82.20 تتعلق بالمصفوفات التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}$$

80.20 هل A ناظمية؟

■ نحسب

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$
$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 14 \end{pmatrix}$$

بما أن $AA^* = A^*A$، فإن A تكون ناظمية.

81.20 هل B ناظمية؟

■ نحسب

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \qquad BB^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

بما أن $BB^* \neq B^*B$، فإن B ليست ناظمية.

82.20 هل C ناظمية؟

■ نحسب

$$CC^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$
$$C^*C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

بما أن $CC^* = C^*C$، فإن C تكون ناظمية.

المسائل 83.20-86.20 تتعلق بمؤثر ناظمي T.

83.20 بيّن أن $T(v) = 0$ إذا وفقط إذا $T^*(v) = 0$.

■ نبيّن أن $\langle T(v), T(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle$: $\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle = \langle v, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle$. وبذلك $T(v) = 0$ إذا وفقط إذا $T^*(v) = 0$.

84.20 بيّن أن $T - \lambda I$ ناظمي.

■ نبين أن $T - \lambda I$ تبديلي مع قرينه:

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* &= (T-\lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \lambda\bar{\lambda} I \\ &= T^*T - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \bar{\lambda}\lambda I = (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) \\ &= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\end{aligned}$$

وبذلك، يكون $T - \lambda I$ ناظمياً.

85.20 بيّن أنه إذا $T(v) = \lambda v$، إذن $T^*(v) = \bar{\lambda} v$؛ وبالتالي فإن أي متجه ذاتي لـ T يكون أيضاً متجهاً ذاتياً لـ T^*.

■ إذا $T(v) = \lambda v$، إذن $(T - \lambda I)(v) = 0$. بما أن $T - \lambda I$ ناظمي، يكون لدينا $(T - \lambda I)^*(v) = 0$. وبذلك، يكون $(T^* - \bar{\lambda} I)(v) = 0$؛ وبالتالي، $T^*(v) = \bar{\lambda} v$.

86.20 بيّن أنه إذا $T(v) = \lambda_1 v$ و $T(w) = \lambda_2 w$ حيث $\lambda_1 \neq \lambda_2$، إذن $\langle v,w\rangle = 0$؛ أي أن المتجهات الذاتية لـ T المقرنة بقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة.

■ نبين أن $\lambda_1\langle v, w\rangle = \lambda_2\langle v, w\rangle$: $\lambda_1\langle v, w\rangle = \langle \lambda_1 v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle = \langle v, \bar{\lambda}_2 w\rangle = (T^* - \lambda I)(v) = 0$.
ولكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$؛ إذن، $\langle v,w\rangle = 0$.

87.20 أثبت مبرهنة 16.20.

■ يكون البرهان بالاستقراء على بعد V. إذا $\dim V = 1$، فإن المبرهنة تتحقق بديهياً. لنفترض الآن أن $\dim V = n > 1$ بما أن V فضاء متجهي عقدي، فإنه يكون لـ T قيمة ذاتية واحدة على الأقل وبالتالي متجه ذاتي غير صفري v. ليكن W الفضاء الجزئي في V المولّد بواسطة v، وليكن u_1 متجه وحده في W. بما أن v متجه ذاتي لـ T، فإن الفضاء الجزئي W يكون لا متغيراً تحت T. ومع ذلك، فإن v يكون أيضاً متجهاً ذاتياً لـ T^* (بالمسألة السابقة)؛ وبالتالي، يكون W لا متغيراً أيضاً تحت T^*. لذلك، يكون $W^\perp$ لا متغيراً تحت $T = T^{**}$. ويكون التقييد $\hat{T}$ لـ T على $W^\perp$ مؤثراً ناظمياً. أيضاً، $\dim W^\perp = n-1$ لأن $\dim W = 1$. نوجد، بالاستقراء، قاعدة ناظمية ـ التعامد $\{u_2,\ldots,u_n\}$ لـ $W^\perp$ متكونة من متجهات ذاتية لـ $\hat{T}$، وبالتالي لـ T. ولكن $\langle u_1,u_i\rangle = 0$، من أجل $i = 2,\ldots,n$، لأن $u_i \in W^\perp$. ينتج عن ذلك أن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ مجموعة ناظمية ـ التعامد وتتكون من متجهات ذاتية لـ T. وهذا يكمل البرهان.

6.20 مبرهنة طيفية

88.20 عرّف مؤثراً قابلاً ـ للتقطير.

■ نقول عن مؤثر خطي T، على فضاء جداء داخلي V، أنّه قابل ـ للتقطير إذا كانت توجد مؤثرات $E_1,\ldots,E_r$ على V، وسلّميات $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ بحيث أن

(i) $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r$ (iii) $E_1^2 = E_1, \ldots, E_r^2 = E_r$

(ii) $E_1 + E_2 + \ldots + E_r = I$ (iv) $E_i E_j = 0$ من أجل كل $i \neq j$.

89.20 عرّف إسقاط متعامداً.

▩ نقول عن مؤثر خطي E، على فضاء جداء داخلي V، أنه إسقاط متعامد إذا $E^2 = E$ [بذلك، تكون المؤثرات الخطية E_i، في المسألة 88.20، إسقاطات متعامدة].

90.20 لننظر في مصفوفة قطرية، مثلا

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

بيّن أن A قابلة ـ للتقطير [وفق التعريف في المسألة 88.20].

▩ لتكن

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

إذن (i) $A = 2E_1 + 3E_2 + 5E_3$، (ii) $E_1 + E_2 + E_3 = I$، (iii) $E_i^2 = E_i$، و (iv) $E_i E_j = 0$ من أجل $i \neq j$.

91.20 قيل سابقاً أن مؤثراً T يكون قابلاً ـ للتقطير إذا أمكن تمثيله بواسطة مصفوفة قطرية بالنسبة لقاعدة ما. ما هو السبب وراء إعادة تعريف المؤثرات القابلة ـ للتقطير في المسألة 88.20؟

▩ إن التعريف في المسألة 88.20 لا يستخدم مفهوم المصفوفات، وبالتالي يمكن تطبيقه أيضاً على الفضاءات لا نهائية ـ البعد V. وتتطابق التعريفات عندما يكون V ذا بعد منتهٍ، كما يتضح من المسألة 90.20.

92.20 أعد صياغة المبرهنتين 7.20 و 16.20 باستخدام تعريف المسألة 88.20 حول المؤثرات القابلة للتقطير.

مبرهنة 18.20 [المبرهنة الطيفية]: ليكن T مؤثراً ناظمياً [متناظراً] على فضاء جداء داخلي عقدي [حقيقي] منته البعد V. إذن، توجد إسقاطات متعامدة $E_1, \ldots, E_r$ على V وسلميات $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ بحيث أن

(i) $T = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r$ (iii) $E_1^2 = E_1, \ldots, E_r^2 = E_r$

(ii) $E_1 + E_2 + \ldots + E_r = I$ (iv) $E_i E_j = 0$ من أجل $i \neq j$.

الفصل 21

تطبيقات في الهندسة والحسبان

1.21 ترميز متجهي في R^3

1.21 عرّف الترميز ijk في R^3.

■ يستخدم الترميز $i = (1,0,0)$، $j = (0,1,0)$، $k = (0,0,1)$ من أجل القاعدة المعتادة في R^3.

2.21 أعد كتابة $u = (3,-5,6)$ و $v = (1,3,-2)$ في الترميز ijk.

■ بما أن $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$، يكون لدينا $u = 3i - 5j + 6k$ و $v = i + 3j - 2k$.

3.21 أوجد الجداءات النقطية $i.i$، $j.j$، $k.k$.

■ بما أن i، j، k متجهات وحدة، فإن $i.i = 1$، $j.j = 1$ و $k.k = 1$.

4.21 أوجد الجداءات النقطية $i.j$، $i.k$ و $j.k$.

■ بما أن i، j، k تشكل قاعدة ناظمية - التعامد، فهي متعامدة؛ وبالتالي $i.j = 0$، $i.k = 0$ و $j.k = 0$.

المسائل 5.21-8.21 تتعلق بالمتجهين $u = a_1i + a_2j + a_3k$ و $v = b_1i + b_2j + b_3k$.

5.21 أعط صيغة من أجل $u + v$ و cu، حيث c سلّمي في R.

■ باستخدام حقيقة أن i، j، k تشكل قاعدة لـ R^3، نجد أن $u + v = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$ و $cu = ca_1i + ca_2j + ca_3k$.

6.21 أعط صيغة من أجل الجداء النقطي $u.v$.

■ نستخدم تعريف الجداء الداخلي في R^3، فنحصل على $u.v = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

7.21 أعط صيغة من أجل الجداء التقاطعي $u \times v$.

■
$$u \times v = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

أو، بشكل بديل

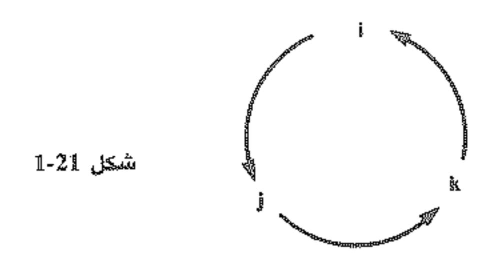
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

8.21 أعط صيغة من أجل النظيم $\|u\|$.

■
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

9.21 أوجد الجداءات التقاطعية $i \times j$، $j \times k$، $k \times i$، $j \times i$، $k \times j$، $i \times k$.

■ هنا $i \times j = k$، $j \times k = i$، $k \times i = j$ و $j \times i = -k$، $k \times j = -i$، $i \times k = -j$ بتعبير آخر، إذا نحن نظرنا إلى الثلاثية $[i,j,k]$ كتبديل دوري، أي منسقة حول دائرة في اتجاه عكس عقارب الساعة، كما في شكل 21-1، فإن جداء أي اثنين منها في الاتجاه المذكور يعطينا المتجه الثالث، ولكن جداء أي اثنين منها في الاتجاه المضاد يعطينا سالب المتجه الثالث.



شكل 21-1

المسائل 10.21-32.21 تتعلق بالمتجهات $u = 2i - 3j + 4k$، $v = 3i + j - 2k$، $w = i + 5j + 3k$.

10.21 أوجد $u + v$.

■ نجمع المركبات المقابلة، فنحصل على $u + v = 5i - 2j + 2k$.

11.21 أوجد $2u - 3w$.

■ أولاً، نضرب المتجهين في العددين السلميين ثم نجمع
$2u - 3w = (4i - 6j + 8k) + (-3i - 15j - 9k) = i - 21j - k$.

12.21 أوجد $3u - 2v + 4w$.

■ $3u - 2v + 4w = (6i - 9j + 12k) + (-6i - 2j + 4k) + (4i + 20j + 12k) = 4i + 9j + 28k$.

13.21 أوجد $u.v$.

■ نضرب المركبات المتقابلة في بعضها ثم نجمع: $u.v = 6 - 3 - 8 = -5$.

14.21 أوجد $u.w$.

■ $u.w = 2 - 15 + 12 = -1$.

15.21 أوجد $v.w$.

■ $v.w = 3 + 5 - 6 = 2$.

16.21 أوجد $\|u\|$.

■ نربع كل مركبة في u ثم نجمع، فنحصل على $\|u\|^2$؛ أي أن $\|u\|^2 = 4 + 9 + 16 = 29$. إذن، $\|u\| = \sqrt{29}$.

17.21 أوجد $\|v\|$.

■ $\|v\|^2 = 9 + 1 + 4 = 14$؛ وبالتالي، $\|v\| = \sqrt{14}$.

18.21 أوجد $\|v\|$.

■ $\|w\|^2 = 1 + 25 + 9 = 35$؛ وبالتالي، $\|w\| = \sqrt{35}$.

19.21 أوجد $u \times v$.

■
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (6-4)i + (12+4)j + (2+9)k = 2i + 16j + 11k$$

[ملاحظة: لاحظ أن المركبة j يتحصل عليها بأخذ المحددة «تراجعياً». أنظر المسألة 7.21 حول الجداءات التقاطعية].

20.21 أوجد $u \times w$.

■
$$u \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-9-20)i + (4-6)j + (10+3)k = -29i - 2j + 13k$$

21.21 أوجد $v \times w$.

■
$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (3+10)\mathbf{i} + (-2-9)\mathbf{j} + (15-1)\mathbf{k} = 13\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

22.21 أوجد $v \times u$.

■ $v \times u = (u \times v) = -(2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$.

23.21 أوجد $w \times v$.

■ $w \times v = -(v \times w) = -(13\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 14\mathbf{j}) = -13\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 14\mathbf{j}$.

24.21 أوجد $w \times u$.

■ $w \times u = -(u \times w) = -(-29\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 13\mathbf{k}) = 29\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$.

25.21 أوجد $\cos\theta$، حيث θ الزاوية بين u و v.

■
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{-5}{\sqrt{29}\sqrt{14}}$$

26.21 أوجد $\cos\theta$، حيث الزاوية بين v و w.

■
$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \frac{2}{7\sqrt{10}}$$

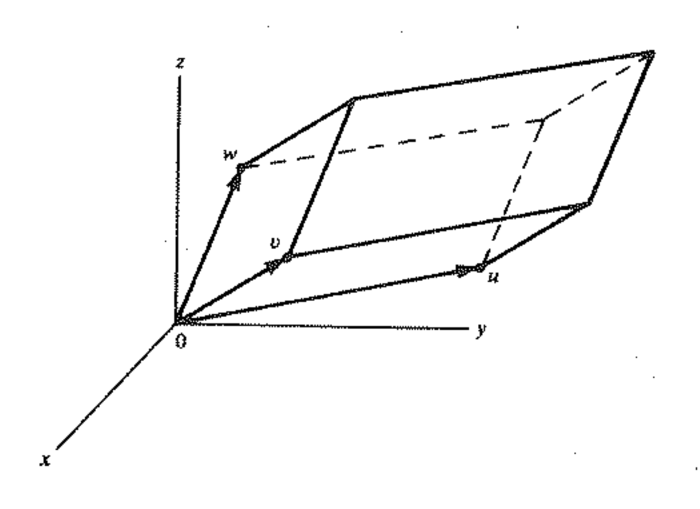
27.21 أوجد $u.v \times w$.

■
$$u \cdot v \times w = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 60 - 4 + 20 + 27 = 115$$

[لاحظ أن $u.v \times w = \det(A)$، حيث u، v، w صفوف A].

28.21 أعط تفسيراً هندسياً لـ $u.v{\times}w$.

■ القيمة المطلقة لـ $u.v{\times}w$ تمثل حجم متوازي السطوح المكوّن بواسطة المتجهات u,v,w كما في الشكل 21-2.



شكل 21-2

29.21 أوجد $w.v{\times}u$.

■ بما أن $[w,v,u]$ تبديل فردي لـ $[u,v,w]$، فيكون لدينا $w.v \times u = -(u.v \times w) = -115$.

30.21 أوجد $w.u \times v$.

■ بما أن $[w,u,v]$ تبديل زوجي لـ $[u,v,w]$، فيكون لدينا $w.v \times w = u.v \times w = 115$.

31.21 أوجد $(u.v) \times w$.

■ نعرف من المسألة 19.21، أن $u \times v = 2i + 16j + 11k$. إذن

$$(u \times v) \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 16 & 11 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (48 - 55)\mathbf{i} + (11 - 6)\mathbf{j} + (10 - 16)\mathbf{k} = -7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

32.21 أوجد $u \times (v \times w)$.

■ يكون لدينا، من المسألة 21.21، أن $v \times w = 13i - 11j + 14k$. إذن

$$u \times (v \times w) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 13 & -11 & 14 \end{vmatrix} = (-42 + 44)\mathbf{i} + (52 - 28)\mathbf{j} + (-22 + 39)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$$

[ملاحظة: لاحظ أن الجداء التقاطعي لا يحقق قانون التجميع، أي أن $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$].

33.21 أوجد متجه وحدة يكون متعامداً مع $u_1 = 4i - 6j + k$ و $u_2 = 2i + j - 3k$.

■ نحسب أولاً $v = u_1 + u_2$، والذي يعطينا متجهاً متعامداً مع u_1 و u_2 معاً:

$$v = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (18 - 1)\mathbf{i} + (2 + 12)\mathbf{j} + (4 + 12)\mathbf{k} = 17\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$$

نناظم v، بأن نحسب أولاً $\|v\|$. لدينا $\|v\|^2 = 289 + 196 + 256 = 741$. إذن،

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|}\, v = \frac{1}{\sqrt{741}}(17\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 16\mathbf{k})$$

وهو المتجه المطلوب

34.21 أوجد c بحيث يكون $u = 4i + 3j + ck$ في المستوى W المولّد بواسطة $v_1 = i + 2j - 3k$ و $v_2 = 2i - j + 4k$.

■ لاحظ أن u يكون في W إذا $u.v_1 \times v_2 = 0$، أي إذا $\det(A) = 0$، حيث u, v_1, v_2 صفوف A. نضع

$$0 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & c \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 18 - c - 4c - 12 - 12 = -5c - 10$$

وبذلك $5c = -10$؛ وبالتالي $c = -2$.

2.21 المستويات، المستقيمات، المنحنيات، السطوح في R^3

سوف نستخدم الصيغ التالية:

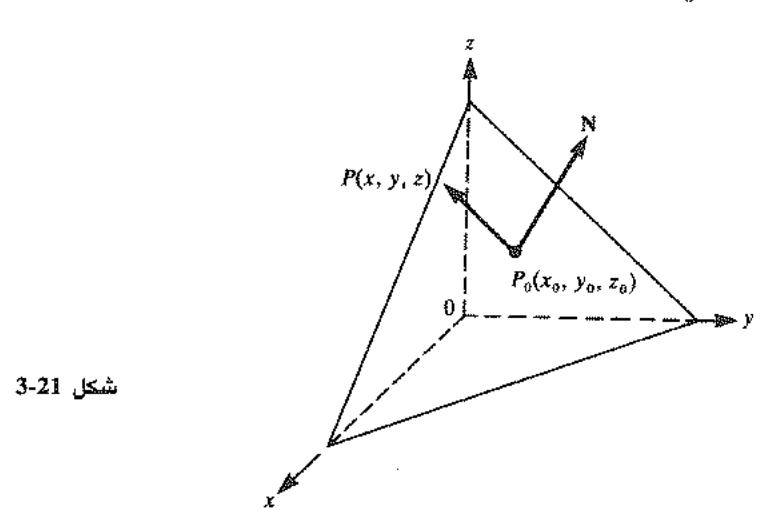
(أ) معادلة مستوٍ يمر بالنقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ وباتجاه نناظمي $N = ai + bj + ck$ تكون $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(x - x_0) = 0$.

(ب) التمثيل الوسيطي المستقيم L يمر عبر $P_0(x_0,y_0,z_0)$ في اتجاه المتجه $v = ai + bj + ck$ يكون $x = at + x_0$، $y = bt + y_0$، $z = ct + z_0$؛ أو، بشكل بديل: $L(t) = (at + x_0)i + (bt + y_0)j + (ct + z_0)k$.

(ج) المتجه N الناظمي على سطح $F(x,y,z) = 0$ يكون $N = F_x i + F_y j + F_z k$.

35.21 أوجد الصيغة (أ).

■ لتكن $P(x,y,z)$ نقطة إختيارية في المستوى. المتجه v من P_0 إلى P يكون $v = P - P_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. بما أن v متعامد مع $N = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (شكل 21-3)، فإننا نحصل على $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$؛ وهو المطلوب.



شكل 21-3

36.21 أوجد معادلة المستوى ذي الاتجاه الناظمي $N = 5\mathbf{j} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ويحتوي على النقطة $P(3,4,-2)$.

■ نعوض P و N في الصيغة (أ) فنحصل على $5(x - 3) - 6(y - 4) + 7(z + 2) = 0$ أو $5x - 6y + 7z = -23$.

37.21 أوجد متجهاً ناظمياً N على المستوى $4x + 7y - 12z = 3$.

■ تعطينا معاملات x، y، z إتجاهاً ناظمياً، وبالتالي $N = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$. [إن أي مضاعف لـ N يكون أيضاً ناظمياً على المستوى].

38.21 أوجد المستوى H الموازي لـ $4x + 7y - 12z = 3$، ويحتوي على النقطة $P(2,3,-1)$.

■ يكون لـ H والمستوى المعلوم نفس الاتجاه الناظمي، أي أن $N = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ ناظمي على H. نعوض بـ P و N في الصيغة (أ) فنحصل على $4(x - 2) + 7(y - 3) - 12(z + 1) = 0$ أو $4x + 7y - 12z = 41$.

39.21 ليكن H و K المستويين $x + 2y - 4z = 5$ و $2x - y + 3z = 7$، على الترتيب. أوجد $\cos\theta$ حيث θ الزاوية بين المستويين H و K.

■ الزاوية θ بين H و K هي نفسها الزاوية بين الناظم N على H والناظم N' على K. لدينا $N = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ و $N' = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. إذن $N.N' = 2 - 2 - 12 = -12$، $\|N\|^2 = 1 + 4 + 16 = 21$، $\|N'\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$. إذن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}'}{\|\mathbf{N}\|\,\|\mathbf{N}'\|} = -\frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = -\frac{12}{7\sqrt{6}}$$

40.21 أوجد الصيغة (ب).

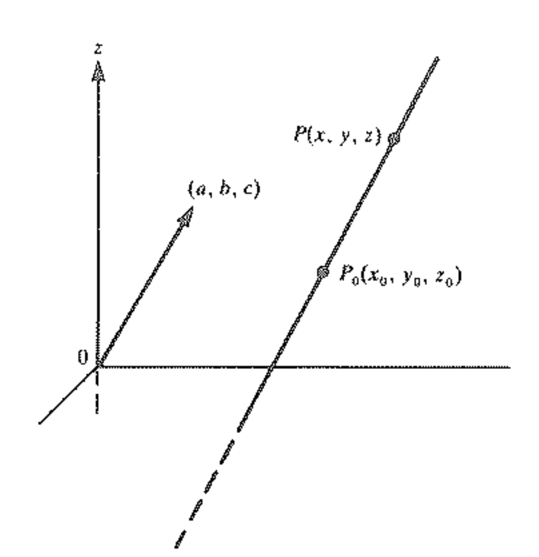
■ لتكن $P(x,y,z)$ نقطة إختيارية على المستقيم L. المتجه w من P_0 إلى P هو

$$w = P - P_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} \qquad (1)$$

بما أن w و v لهما نفس الاتجاه [شكل 21-4]، فإن

$$w = tv = t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) = at\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \qquad (2)$$

المعادلتان (1) و (2) تعطياننا النتيجة المطلوبة



شكل 21-4

41.21 أوجد المعادلة [الوسيطية] للمستقيم L الذي يمر بالنقطة $P(3,4,-2)$ ويكون في الاتجاه $v = 5i - j + 3k$.

▩ نعوض في الصيغة (ب)، فنحصل على $L(t) = (5t + 3)i + (-t + 4)j + (3t - 2)k$.

42.21 أوجد معادلة المستقيم L عبر النقطتين $P(1,3,2)$ و $Q(2,5,-6)$.

▩ نوجد أولاً المتجه v من P إلى Q: $v = Q - P = i + 2j - 8k$. ثم نستخدم الصيغة (ب) بـ v وإحدى النقطتين، لتكن P، فنحصل على $L(t) = (t + 1)i + (2t + 3)j + (-8t + 2)k$.

43.21 ليكن H المستوى $3x + 5y + 7z = 15$. أوجد معادلة المستقيم L العمودي على H والمار بالنقطة $P(1,-2,4)$.

▩ بما أن L عمودي على H، فلا بد أن يكون في نفس إتجاه الناظم $N = 3i + 5j + 7k$ على H. لذلك، نستخدم الصيغة (ب) بـ N و P فنحصل على $L(t) = (3t + 1)i + (5t - 2)j + (7t + 4)k$.

44.21 عرّف منحنى في R^3.

▩ ليكن D فترة (منتهية أو لا نهائية) على الخط الحقيقي R. إن دالة مستمرة $F: D \to R^3$ تعرّف منحنىً في R^3. وبذلك، تقرن بكل نقطة $t \in D$ $F(t) = F_1(t)i + F_2(t)j + F_3(t)k$ في R^3.

ملاحظة: لنفترض أن الدالة F(t) أعلاه تمثل موضع جسم متحرك B في لحظة زمنية t. إذن، ترمز $V(t) = dF(t)/dt$ إلى سرعة B، كما يرمز $A(t) = dV(t)/dt$ إلى تسارع B.

المسائل 45.21-49.21 تتعلق بالمنحنى التالي، حيث $0 \leqslant t \leqslant 5$: $F(t) = t^2i + (3t + 4)j + t^3k$.

45.21 أوجد F(t) عندما $t = 4$.

▩ نعوض بـ $t = 2$ في F(t) فنحصل على $F(2) = 4i + 10j + 8k$.

46.21 أوجد F(t) عندما $t = 4$.

▩ $F(t) = F(4) = 16i + (12 + 4)j + 64k = 16i + 16j + 64k$.

47.21 أوجد F(t) عندما $t = 6$.

▩ F(t) ليست معرّفة عندما $t = 6$، لأن نطاق F هو الفترة $0 \leqslant t \leqslant 5$.

48.21 أوجد نقطتي الطرفين للمنحنى.

■ إن نقطتي الطرفين للنطاق هما $t = 0$ و $t = 5$. وبالتالي، نقطتا طرفي المنحنى هما $F(0) = 4\mathbf{j}$ و $F(5) = 25\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 125\mathbf{k}$.

49.21 أوجد متجه الوحدة T المماس للمنحنى عند $t = 2$.

■ نأخذ مشتق $F(t)$، نحصل على متجهٍ V يكون مماساً للمنحنى:

$$V(t) = \frac{dF(t)}{dt} = 2t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

ثم نوجد V عندما $t = 2$. يعطينا هذا: $V = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$. نناظم V، لنحصل على متجه الوحدة T المماس للمنحنى عند $t = 2$. لدينا $\|V\| = 13$. إذن،

$$\mathbf{T} = \tfrac{4}{13}\mathbf{i} + \tfrac{3}{13}\mathbf{j} + \tfrac{12}{13}\mathbf{k}$$

المسائل 50.21-53.21 تتعلق بجسم متحرك B يُعطى موضعه عند اللحظة t بواسطة $R(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$.

50.21 أوجد موضع B عندما $t = 1$.

■ نعوض بـ $t = 1$ في $R(t)$ فنحصل على $R(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

51.21 أوجد السرعة v لـ B عندما $t = 1$.

■ نأخذ مشتق $R(t)$ فنحصل على

$$V(t) = \frac{dR(t)}{dt} = 3t^2\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

نعوض بـ $t = 1$ في $V(t)$ فنحصل على $v = V(1) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

52.21 أوجد قيمة السرعة s لـ B عندما $t = 1$.

■ إن قيمة السرعة s هي مقدار السرعة v. بذلك، $s^2 = \|v\|^2 = 9 + 16 + 3 = 34$، وبالتالي $s = \sqrt{34}$.

53.21 أوجد التسارع a لـ B عندما $t = 1$.

■ نأخذ المشتق الثاني لـ $R(t)$ أو، بتعبير آخر، مشتق $V(t)$ فنحصل على

$$A(t) = \frac{dV(t)}{dt} = 6t\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

نعوض بـ $t = 1$ في $A(t)$ فنحصل على $a = A(1) = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

المسألتان 54.21-55.21 تتعلقان بالسطح التالي: $xy^2 + 2yz = 16$.

54.21 أوجد المتجه الناظم $N(x,y,z)$ على السطح.

■ أوجد المشتقات الجزئية F_x، F_y، F_z حيث $F(x,y,z) = xy^2 + 2yz - 16$. لدينا $F_x = y^2$، $F_y = 2xy + 2z$، $F_z = 2y$. وبذلك، $N(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.

55.21 أوجد المستوى المماس H للسطح في النقطة $P(1,2,3)$.

■ إن الناظم على السطح في النقطة P يكون $N(P) = N(1,2,3) = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. وبذلك، يكون $N = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ متجهاً ناظماً عند P. نعوض بـ P و N في الصيغة (أ) فنحصل على $2(x - 1) + 5(y - 2) + 2(z - 3) = 0$ أو $2x + 5y + 2z = 18$.

56.21 ليكن المجسم الإهليلجي (الكرواني) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 15$. أوجد المستوى المماس H في النقطة $P(2,2,1)$.

■ نوجد المتجه الناظم $N(x,y,z) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$. نحسب المتجه الناظم $N(x,y,z)$ عند P، فنحصل على $N(P) = N(2,2,1) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. وبذلك، يكون $N = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ناظماً للمجسم الإهليلجي عند P. نعوض بـ P و N في الصيغة (أ) فنحصل على H: $2(x-2) + 4(y-2) + 3(z-1) = 0$ أو $2x + 4y + 3z = 15$.

المسألتان 57.21-58.21 تتعلقان بالدالة $f(x,y) = x^2 + y^2$ حيث $z = x^2 + y^2$ يمثل سطحاً S في $\mathbb{R}^3$.

57.21 أوجد المتجه الناظم N للسطح S عندما $x = 2$، $y = 3$.

■ $N = [f_x, f_y, -1] = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. [ملاحظة: نستخدم حقيقة أنّه عندما $F(x,y,z) = f(x,y) - z$، يكون لدينا $F_x = f_x$، $F_y = f_y$، و $F_z = -1$].

58.21 أوجد المستوى المماس H للسطح S عندما $x = 2$، $y = 3$.

■ إذا $x = 2$، $y = 3$، إذن $z = 4 + 9 = 13$؛ وبالتالي، تكون $P(2,3,13)$ نقطة على السطح S. نعوض بـ P و $N = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ في الصيغة (أ) فنحصل على H: $4(x-2) + 6(y-3) - (z-13) = 0$ أو $4x + 6y - z = 13$.

3.21 الحقول السلّمية والمتجهية

59.21 عرّف حقلاً سلّمياً.

■ نقول عن دالة $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ انها حقل سلّمي في $\mathbb{R}^3$. بتعبير آخر، يقرن حقل سلّمي f بقيمة سلّمية $f(x,y,z)$ لكل نقطة $P(x,y,z)$ في $\mathbb{R}^3$. [بالمثل، تسمى دالة $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حقلاً سلّمياً في $\mathbb{R}^n$].

60.21 عرّف حقلاً متجهاً.

■ نطلق على دالة $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ إسم «حقل متجهي» في $\mathbb{R}^3$. بتعبير آخر، يقرن حقل متجهي F متجهاً $F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$ بكل نقطة $P(x,y,z)$ في $\mathbb{R}^3$. [بالمثل، تسمى دالة $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ حقلاً متجهياً في $\mathbb{R}^n$].

ملاحظة: غالباً ما يكون نطاق حقل سلّمي أو حقل متجهي مجموعة جزئية D في $\mathbb{R}^n$، وليس $\mathbb{R}^n$ نفسه.

المسائل 61.21-64.21 تتعلق بالحقول التالية على نطاق D:

(أ) درجة الحرارة في نقطة.
(ب) سرعة الريح في نقطة.
(ج) إرتفاع نقطة فوق مستوى البحر.
(د) الحقل المغناطيس.

61.21 هل (أ) حقل سلمي أم متجهي؟

■ بما أن درجة الحرارة سلّمية، فإن (أ) يكون حقلاً سلّمياً.

62.21 هل (ب) حقل سلّمي أم متجهي؟

■ إن سرعة الريح في نقطة تكون متجهاً ذات مقدار وإتجاه؛ وبالتالي، يكون (ب) حقلاً متجهياً.

63.21 هل (ج) حقل سلّمي أم متجهي؟

■ بما أن ارتفاع نقطة كمية سلّمية؛ فإن (ج) حقل سلّمي.

64.21 هل (د) حقل سلّمي أم متجهي؟

■ إن الحقل (المجال) المغنطيس حقل متجهي، لأنه توجد قوة مغنطيسية ذات مقدار واتجاه عند كل نقطة.

المسائل 65.21-67.21 تتعلق بالحقل السلّمي $f(x,y,z) = x^2 + yz$.

65.21 أوجد $f(P_1)$ من أجل النقطة $P_1(1,2,-4)$.

■ $f(P_1) = f(1,2,-4) = 1 - 8 = -7$.

66.21 أوجد $f(P_2)$ من أجل النقطة $P_2(2,-3,5)$.

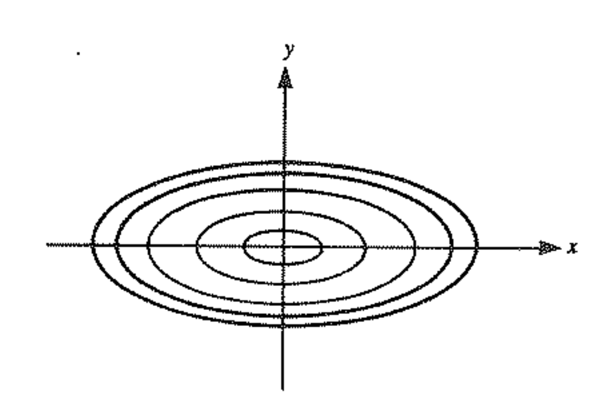
■ $f(P_2) = f(2,-3,5) = 4 - 15 = -11$.

67.21 أوجد $f(P_3)$ من أجل النقطة $P_3(3,1,-2)$.

■ $f(P_3) = f(3,1,-2) = 9 - 2 = 7$.

68.26 ليكن الحقل السلّمي $g(x,y) = x^2 + 2y^2$ في $\mathbf{R}^3$. صف وارسم منحنيات المناسيب لـ g.

■ من أجل كل سلّمي $c \in \mathbf{R}$، يوجد منحنى منسوبي $g(x,y) = x^2 + 2y^2 = c$. تكون هذه المنحنيات قطوعاً ناقصة (إهليلجات) مراكزها عند نقطة الأصل، كما هو موضح في شكل 21-5.



شكل 21-5

المسائل 69.21-71.21 تتعلق بالحقل المتجهي التالي في $\mathbf{R}^3$: $F(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 - yz)\mathbf{k}$.

69.21 أوجد $F(P_1)$ من أجل النقطة $P_1(1,2,-4)$.

■ $F(P_1) = F(1,2,-4) = -8\mathbf{i} + (1 + 4 + 16)\mathbf{j} + (1 + 8)\mathbf{k} = -8\mathbf{i} + 21\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

70.21 أوجد $F(P_2)$ من أجل النقطة $P_2(2,-3,5)$.

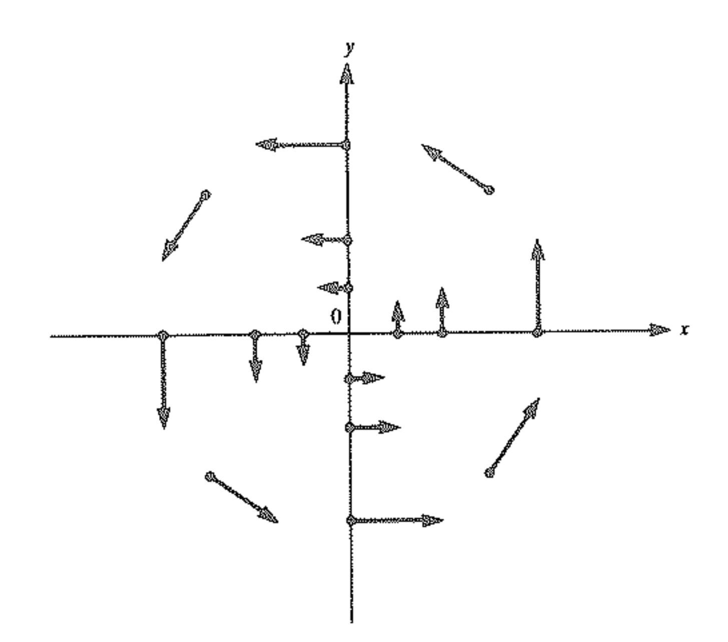
■ $F(P_2) = F(2,-3,5) = -30\mathbf{i} + (4 + 9 + 25)\mathbf{j} + (4 + 15)\mathbf{k} = -30\mathbf{i} + 38\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$.

71.21 أوجد $F(P_3)$ من أجل النقطة $P_3(3,1,-2)$.

■ $F(P_3) = F(3,1,-2) = -6\mathbf{i} + (9 + 1 + 4(\mathbf{j} + (9 + 2)\mathbf{k} = -6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$.

72.21 ليكن الحقل المتجهي $F(x,y) = 1/2\ x\mathbf{i} - 1/2\ y\mathbf{j}$ في $\mathbf{R}^2$. صف الحقل.

■ يوجد، عند كل نقطة $P(x,y)$ في المستوى، متجه $F(P)$ الذي له 1/2 الطول من نقطة الأصل 0 إلى P ويكون عمودياً على المتجه من 0 إلى P، كما هو موضح في شكل 21-6.



شكل 6-21

4.21 مؤثر دِل ∇ ، التدرج، التباعد، الدّوران

73.21 عرّف مؤثر دِلْ.

■ إن المؤثر المتجهي التفاضلي دِلْ، والذي نرمز له بـ ∇ ، يعرّف بواسطة $\nabla \equiv D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k} = \mathbf{i}D_x + \mathbf{j}D_y + \mathbf{k}D_z$ ، حيث D_x ، D_y ، D_z ترمز للمشتقات الجزئية بالنسبة لـ x ، y ، z على الترتيب. أي أن

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

بعمومية أكبر، يعرّف المؤثر دِلْ ∇ ، من أجل أي مجموعة من المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$، بواسطة $\nabla \equiv [D_1, D_2, \ldots, D_n]$ حيث برمز D_i للمشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_i.

74.21 عرّف تدرّج حقل سلَمي.

■ ليكن f(x,y,z) مؤثراً سلَمياً إشتقاقياً. يعرّف تدرج f ، ونكتبه ∇f أو grad f، بواسطة $\nabla f = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k})(f) = D_x(f)\mathbf{i} + D_y(f)\mathbf{j} + D_z(f)\mathbf{k}$. لاحظ أن ∇f حقل متجي.

75.21 عرّف تباعد حقل متجهي.

■ ليكن $F(x, y, z) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ حقلاً متجهياً إشتقاقياً. إذن، يعرّف تباعد F، ونكتبه $\nabla \cdot F$ أو div F، بواسطة $\nabla \cdot F = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = D_x(F_1) + D_y(F_2) + D_z(F_3)$. لاحظ أن $\nabla \cdot F$ حقل سلَمي.

76.21 عرّف دوران حقل متجهي.

■ ليكن $F(x, y, z) = F_1\mathbf{i} - F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ حقلاً متجهياً إشتقاقياً. نعرّف عندئذ دوران F، ونكتبه $\nabla \times F$ أو curl F أو rot F، بواسطة

$$\nabla \times F = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= [D_y(F_3) - D_z(F_2)]\mathbf{i} + [D_z(F_1) - D_x(F_3)]\mathbf{j} + [D_x(F_2) - D_y(F_1)]\mathbf{k}$$

نلاحظ أن $\nabla \times F$ هو أيضاً حقل متجهي.

77.21 هل التدرج والتباعد والدوران مفاهيم معرّفة في $\mathbf{R}^n$؟

■ إذا كـان $f(x_1,...,x_n)$ حقلاً سلّمياً في $\mathbf{R}^n$، فإن $\text{div}\, f = \nabla f = [D_1(f), D_2(f), \ldots, D_n(f)]$. وإذا كان $F = [F_1, F_2, \ldots, F_n]$ حقلاً متجهياً في $\mathbf{R}^n$، فإن $\text{div}\, F = \nabla \cdot F = D_1(F_1) + D(F_2) + \cdots + D_n(F_n)$. أما دوران حقل متجهي F في $\mathbf{R}^n$، فإنه لا يكون معرّفاً إلا عندما $n = 3$، كما أنه تماماً لا يعرّف الجداء التقاطعي للمتجهات إلا في $\mathbf{R}^3$. [لاحظ أنه لا يمكننا استخدام الترميز **ijk** في $\mathbf{R}^n$].

مبرهنة **4.21**: لنفترض أن f حقل سلّمي إشتقاقي. وليكن $D_u(f)$ رمزاً للمشتق الإتجاهي f في اتجاه المتجه u. إذن

$$D_u(f)(P) = (\nabla f)(P) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{(\nabla f)(P) \cdot u}{\|u\|}$$

عند نقطة P في المجال. [مركبة التدرج لـ f في اتجاه المتجه u مساوٍ للمشتق الإتجاهي لـ f في اتجاه u].

78.21 أوجد تدرج f، أي ∇f.

■
$$\nabla f = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k})(x^2y^2 + z^3) = D_x(x^2y^2 + z^3)\mathbf{i} + D_y(x^2y^2 + z^3)\mathbf{j} + D_z(x^2y^2 + z^3)\mathbf{k}$$
$$= 2xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}.$$

79.21 أوجد المشتق الاتجاهي لـ f عند النقطة $P(3,2,1)$ في الاتجاه $u = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

■ نحسب ∇f عند النقطة P: $(\nabla f)(P) = (\nabla f)(3,2,1) = 24\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. نأخذ الجداء النقطي [الداخلي] لـ $(\nabla f)(P)$ مع u، ونقسم على $\|u\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$، لنحصل على $D_u(f)(P)$

$$D_u(f)(P) = \frac{(24\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

80.21 أوجد المشتق الاتجاهي لـ f عند النقطة $Q(1,-2,3)$ في الاتجاه $v = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

■ نحسب التدرج ∇f عند النقطة Q: $(\nabla f)(Q) = (\nabla f)(1,-2,3) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$. إذن

$$D_v(f)(Q) = \frac{(\nabla f)(Q) \cdot v}{\|v\|} = \frac{(8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 27\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{\sqrt{1+4+9}} = -\frac{58}{\sqrt{14}}$$

المسائل 81.21-83.21 تتعلق بالحقل السلّمي التالي في $\mathbf{R}^4$: $f(x,y,z,t) = xt^3 + yz^3$.

81.21 أوجد التدرج ∇f.

■ $\nabla f = [D_x, D_y, D_z, D_t]f = [D_x(f), D_y(f), D_z(f), D_t(f)] = [t^3, z^3, 3yz^2, 3xt^2]$.

82.21 أوجد المشتق الاتجاهي لـ f عند النقطة $P(1,2,-2,1)$ في الاتجاه $u = [2,-1,3,-2]$.

■ نحسب التدرج ∇f عند النقطة P: $(\nabla f)(P) = (\nabla f)[1,2,-2,1] = [1,-8,24,3]$. ثم نوجد $(\nabla f)(P) \cdot u = [1,-8,24,3] \cdot [2,-1,3,-2] = 2 + 8 + 72 - 6 = 76$. نحسب بعدئذ $\|u\| = \sqrt{4+1+9+4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. إذن

$$D_u(f)(P) = \frac{76}{3\sqrt{2}}$$

83.21 أوجد المشتق الاتجاهي لـ f عند النقطة $Q(1,-3,2,-1)$ في الاتجاه $v = [3,-2,1,4]$.

■ لدينا $(\nabla f)(Q) = (\nabla f)[1,-3,2,-1] = [1,8,-36,3]$، $(\nabla f)(Q) \cdot v = [1,8,-36,3] \cdot [3,-2,1,4] = 3 - 16 - 36 + 12 = -37$، $\|v\| = \sqrt{9+4+1+16} = \sqrt{30}$. إذن، $D_v(f)(Q) = -37/\sqrt{30}$.

المسائل 84.21-89.21 تتعلق بالحقل المتجهي التالي: $F(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$.

84.21 أوجد التباعد $\nabla \cdot F$.

■ $\nabla \cdot F = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) \cdot (xz^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}) = D_x(xz^2) + D_y(xy^2) + D_z(xyz) = z^2 + 2xy + xy = z^2 + 3xy$

85.21 أوجد $\nabla \cdot F$ عند النقطة P(3,2,1).

■ $(\nabla \cdot F)(P) = (\nabla \cdot F)(3, 2, 1) = 1 + 18 = 19$.

86.21 أوجد $\nabla \cdot F$ عند النقطة Q(1,−2,3).

■ $(\nabla \cdot F)(Q) = (\nabla \cdot F)(1, -2, 3) = 9 - 6 = 3$.

87.21 أوجد الدّوران $\nabla \times F$.

■
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xz^2 & xy^2 & xyz \end{vmatrix}$$
$$= [D_y(xyz) - D_z(xy^2)]\mathbf{i} + [D_z(xz^2) - D_x(xyz)]\mathbf{j} + [D_x(xy^2) - D_y(xz^2)]\mathbf{k}$$
$$= (xz - 0)\mathbf{i} + (2xz - yz)\mathbf{j} + (y^2 - 0)\mathbf{k} = xz\mathbf{i} + (2xz - yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

88.21 أوجد $\nabla \times F$ عند P(3,2,1).

■ $(\nabla \times F)(P) = (\nabla \times F)(3, 2, 1) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

89.21 أوجد $\nabla \times F$ عند Q(1,−2,3).

■ $(\nabla \times F)(Q) = (\nabla \times F)(1, -2, 3) = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

المسائل 90.21-93.21 تتعلق بالحقل المتجهي التالي: $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 - yz)\mathbf{k}$.

90.21 أوجد التباعد $\nabla \cdot F$.

■ $\nabla \cdot F = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k})[xyz\mathbf{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 - yz)\mathbf{k}] = D_x(xyz) + D_y(x^2 + y^2 + z^2) + D_z(x^2 - yz)$
$= yz + 2y - y = yz + y$

91.21 أوجد الدوران $\nabla \times F$.

■
$$F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xyz & x^2 + y^2 + z^2 & x^2 - yz \end{vmatrix}$$
$$= [D_y(x^2 - yz) - D_z(x^2 + y^2 + z^2)]\mathbf{i} + [D_z(xyz) - D_x(x^2 - yz)]\mathbf{j}$$
$$+ [D_x(x^2 + y^2 + z^2) - D_y(xyz)]\mathbf{k}$$
$$= (-z - 2z)\mathbf{i} + (xy - 2x)\mathbf{j} + (2x - xz)\mathbf{k} = -3z\mathbf{i} + (xy - 2x)\mathbf{j} + (2x - xz)\mathbf{k}$$

92.21 أوجد $\nabla(\nabla \cdot F)$.

■ $\nabla(\nabla \cdot F) = (D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k})(yz + y) = D_x(yz + y)\mathbf{i} + D_y(yz + y)\mathbf{j} + D_z(yz + y)\mathbf{k} = (z + 1)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

93.21 أوجد $\nabla \times (\nabla \times F)$.

■
$$\nabla \times (\nabla \times F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -3z & xy - 2x & 2x - xz \end{vmatrix}$$
$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (-3 - 2 + z)\mathbf{j} + (y - 2 - 0)\mathbf{k} = (z - 5)\mathbf{j} + (y - 2)\mathbf{k}$$

94.21 بيّن أن $\nabla\cdot(\nabla\times V)=0$ ، من أجل أي حقل متجهي V.

■ لنفترض أن $V=F\mathbf{i}+G\mathbf{j}+H\mathbf{k}$. إذن

$$\nabla\times V=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ D_x & D_y & D_z\\ F & G & H\end{vmatrix}=(H_y-G_z)\mathbf{i}+(F_z-H_x)\mathbf{j}+(G_x-F_y)\mathbf{k}$$

وبذلك،

$$\nabla\cdot(\nabla\times V)=D_x(H_y-G_z)+D_y(F_z-H_x)+D_z(G_x-F_y)=H_{xy}-G_{xz}+F_{yz}-H_{xy}+G_{xz}-F_{yz}=0$$

5.21 المعادلات التفاضلية

95.21 أعد كتابة المنظومة التالية لمعادلات تفاضلية في شكل مصفوفي:

$$\frac{dx}{dt}=4x-y$$
$$\frac{dy}{dt}=2x+y$$

■ ليكن $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. إذن، تكون المنظومة مكافئة للمعادلة التفاضلية المصفوفية $dX/dt=AX$.

96.21 لننظر في معادلة تفاضلية مصفوفية خطية

$$\frac{d}{dt}(X)=AX \qquad (1)$$

ولنفترض أن $X=PY$ تحويل متغيرات غير شاذ. بيّن أن المنظومة المُحَوَّلة تكون في الشكل

$$\frac{d}{dt}(Y)=P^{-1}APY$$

■ نعوض بـ $X=PY$ في (1) فنحصل على $d(PY)/dt=APY$. بما أن المؤثر التفاضلي خطيّ، فهو يتبادل مع المصفوفة P؛ أي أن $d(PY)/dt=P[dY/dt]$. وبذلك، نحصل على $P[dY/dt]=APY$. بالضرب في P^{-1}، نحصل على (1).

97.21 لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ في المسألة 95.21. أوجد مصفوفة غير شاذة P، بحيث تكون $B=P^{-1}AP$ قطرية.

■ إن الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A هي

$$\Delta(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-4 & 1\\ -2 & t-1\end{vmatrix}=t^2-5t+6=(6-3)(t-2)$$

وبذلك، تكون القيمتان الذاتيتان لـ A: 3 و 2. نعوض بـ $t=3$ في المصفوفة $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة المقابلة: $-x+y=0$ ، $-2x+2y=0$ ، والتي لها حلّ غير صفري $v_1=(1,1)$. نعوض بـ $t=2$ في المصفوفة $tI-A$ فنحصل على المنظومة المتجانسة $-2x+y=0$ ، $-2x+y=0$. والتي لها حلّ غير صفري $v_2=(1,2)$.
لتكن P المصفوفة التي عموديها v_1 و v_2 على الترتيب. إذن

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad و \qquad B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

98.21 حل منظومة المعادلات التفاضلية في المسألة 95.21.

■ نحوّل المنظومة إلى الشكل القطري بواسطة تحويل للمتغيرات مستخدمين المصفوفة P في المسألة 97.21، وذلك كما يلي:

$$x = r + s \qquad y = r + 2s \qquad \text{أو} \qquad \binom{x}{y} = P\binom{r}{s} \tag{1}$$

نجد، من المسألتين 96.21 و 97.21، أن المنظومة تصبح، تحت هذا التحويل للمتغيرات، في الشكل القطري:

$$\frac{dr}{dt} = 3r$$
$$\frac{ds}{dt} = 2s$$

ويكون حلّ هذه المنظومة القطرية $r = ae^{3t}$، $s = be^{2t}$ حيث a و b وسيطين. نعوض في (1)، فنحصل على الحل المطلوب:

$$x = ae^{3t} + be^{2t}$$
$$y = ae^{3t} + 2be^{2t}$$

المسائل 99.21-104.21 تتعلق بمنظومة المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 2y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + 5y + 2z$$
$$\frac{dz}{dt} = -2x - 4y - z$$

99.21 أعد كتابة المنظومة في شكل مصفوفي.

■ لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

إذن، تكون المصفوفة مكافئة للمعادلة المصفوفية $dX/dt = AX$.

100.21 أوجد الحدودية المميزة $\Delta(t)$ لـ A.

■ $\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - \det(A) = t^3 - 8t^2 + 17t - 10$. [هنا $\text{tr}(A)$ هو أثر A و A_{ii} متعامل العنصر القطري a_{ii}].

101.21 أوجد القيم الذاتية لـ A أو، بتعبير آخر، جذور $\Delta(t)$.

■ إذا كان لـ $\Delta(t)$ جذر منطق، فلا بد أن يقسم 10. نختبر $t = 1$، فنحصل على

$$1 \left| \begin{array}{l} 1 - 8 + 17 - 10 \\ \quad\;\; 1 - \;\, 7 + 10 \\ \hline 1 - 7 + 10 \end{array} \right.$$

وبذلك يكون $t - 1$ عاملاً في $\Delta(t)$ وتكون $\Delta(t) = (t-1)(t^2 - 7t + 10) = (t-1)(t-2)(t-5)$. ينتج عن ذلك أن قيم A الذاتية هي $\lambda = 1$، $\lambda = 2$، $\lambda = 5$.

102.21 أوجد متجهاً ذاتياً لكل واحدة من القيم الذاتية لـ A.

■ نطرح $\lambda = 1$ من قطر A، فنحصل على المنظومة المقابلة: $3x + 2y + z = 0$، $2x + 4y + 2x = 0$، $-2x - 4y - 2z = 0$، والتي لها حل غير صفري $v_1 = (0,1,-2)$. ونطرح $\lambda = 2$ من قطر A، فنحصل على المنظومة $2x + 2y + z = 0$، $2x + 3y + 2z = 0$، $-2x - 4y - 3z = 0$، والتي لها حل غير صفري $v_2 = (1,-2,2)$. نطرح $\lambda = 5$ من قطر A، فنحصل على المنظومة المتجانسة $-x + 2y + z = 0$، $2x - 2z = 0$، $-2x - 4y - 6z = 0$، والتي لها حل غير صفري $v_3 = (1,1,-1)$.

103.21 أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $B = P^{-1}AP$ قطرية.

■ لتكن P المصفوفة التي أعمدتها v_1، v_2، v_3 على الترتيب. إذن

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

104.21 حلّ منظومة المعادلات التفاضلية

■ نحول المنظومة إلى الشكل القطري، بواسطة تحويل للمتغيرات باستخدام المصفوفة P أعلاه، وذلك كما يلي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} x &= y' + z' \\ y &= x' - 2y' + z' \\ z &= -2x' + 2y' - z' \end{aligned} \qquad (1)$$

ويكون للمنظومة الآن، وبسبب هذا التحويل للمتغيرات، الشكل القطري

$$\frac{dx'}{dt} = x' \qquad \frac{dy'}{dt} = 2y' \qquad \frac{dz'}{dt} = 5z'$$

إن حل المنظومة القطرية $x' = ae^{t}$، $y' = be^{2t}$، $z' = ce^{5t}$ حيث a، b، c وسائط. نعوض في (1) فنحصل على الحل المطلوب:

$$\begin{aligned} x &= be^{2t} + ce^{5t} \\ y &= ae^{t} - 2be^{2t} + ce^{5t} \\ z &= -2ae^{t} + 2be^{2t} - ce^{5t} \end{aligned}$$